

文章编号: 1007-4627(2018)02-0111-08

Weizsäcker-Skyrme 核质量模型的统计误差研究

陈梦华¹, 王宁^{1,2,†}

(1. 广西师范大学物理科学与技术学院, 广西 桂林 541004;
2. 广西核物理与核技术重点实验室培育基地, 广西 桂林 541004)

摘要: 基于最大值近似估算的方法, 系统地研究了 Weizsäcker-Skyrme(WS4) 核质量模型的参数不确定性, 并计算了 WS4 核质量模型理论预言值的统计误差。WS4 核质量模型的理论预言值与实验值的偏差基本都小于模型的统计误差, 表明采用最大值近似估算法对 WS4 核质量模型理论预言的统计误差的分析是简捷而有效的。进一步研究了 WS4 核质量模型理论计算中最敏感的参数, 结果表明, 对称能系数相关的两个参数 c_{sym} 和 κ 对核质量有重要影响。此外还对 WS4 模型与 WS* 模型的参数不确定性及统计误差进行了对比研究, WS4 模型中各模型参数的不确定性比 WS* 模型中相应模型参数的不确定性降低了 10%~50%。

关键词: 原子核质量模型; 理论预言; 参数不确定性; 统计误差

中图分类号: O571.53 **文献标志码:** A **DOI:** 10.11804/NuclPhysRev.35.02.111

1 引言

原子核质量作为原子核的基本性质之一, 是核结构和核反应研究的基础课题, 也是核天体物理研究的重要输入量。原子核质量的深入研究对于探索丰中子核的奇特结构以及研究超重核结构及其衰变特性都具有重要意义^[1-6]。此外, 相关研究表明, 原子核质量模型中的对称能系数对核质量有着重要影响^[7-12]。因此, 对原子核质量模型的研究将有助于进一步了解原子核的对称能。

人们对于原子核质量的研究一直都十分关注, 并发展了一系列计算核质量的模型, 如有限力程的小液滴模型(FRDM)^[13]、Weizsäcker-Skyrme 核质量模型^[14-19]、Hartree-Fock-Bogoliubov(HFB)模型^[20, 21]、Dufo-Zuker(DZ)模型^[22]等。这些核质量模型的理论计算值与核质量表 AME2016^[23]中最新的实验数据的均方根偏差为 0.3~1.0 MeV^[24]。在众多的核质量模型中, 精确度较高的 WS4 核质量模型是基于宏观-微观模型结合 Skyrme 能量密度泛函理论发展而来的, 它的理论计算值与 AME2016 中 2408 个已知原子核质量实验数据(质子数 $Z \geq 8$ 、中子数 $N \geq 8$)的均方根偏差为 0.302 MeV。然而, 不同的核质量模型在预言未知原子核质量时存在较大差异, 对中子滴线附近核

的偏差甚至大于 20 MeV^[25]。因此, 对核质量模型的理论预言能力以及理论预言的统计误差的研究就显得尤为重要。近年来, 最小二乘拟合、协方差分析、拟合参数变换等^[26-29]方法相继被用于计算不同理论模型的统计误差, 引起了人们的广泛关注。探寻合理有效的理论模型误差分析方法成为近年来很热门的研究课题之一。对原子核质量模型参数的不确定性及统计误差的研究, 将有助于进一步提高原子核质量模型的计算精确度。传统的能量密度泛函理论的统计误差是通过计算协方差矩阵分析得到的。由于计算协方差矩阵的运算量大、耗时长, 且涉及到复杂的参数空间, 我们将尝试采用一个相对有效的方法来分析 WS4 核质量模型的统计误差。

2 Weizsäcker-Skyrme 核质量模型

在 Weizsäcker-Skyrme(WS4) 核质量模型中, 原子核基态能量包含液滴能和 Strutinsky 壳修正能,

$$E(A, Z, \beta) = E_{\text{LD}}(A, Z) \prod_{K \geq 2} (1 + b_k \beta_k^2) + \Delta E(A, Z, \beta) + \Delta E_{\text{res}} \quad (1)$$

$E_{\text{LD}}(A, Z)$ 和 $\Delta E(A, Z, \beta)$ 分别为球形核的液滴能和原子核的微观壳修正能, ΔE_{res} 表示残余修正项, b_k 项是考虑了原子核形变对宏观液滴能的修正, 由 Skyrme 能

收稿日期: 2018-04-17; 修改日期: 2018-05-14

基金项目: 广西自然科学基金资助项目(2015GXNSFDA139004); 广西研究生教育创新计划项目(YCSW2018088)

作者简介: 陈梦华(1993-), 男, 广东韶关人, 硕士研究生, 从事原子核物理研究; E-mail: physcmh@163.com

† 通信作者: 王宁, E-mail: wangning@gxnu.edu.cn.

量密度泛函和拓展的 Thomas-Fermi 近似 (ETF) 给出, 其中原子核形变主要考虑了轴对称的 $\beta_2, \beta_4, \beta_6$ 形变。基于 Weizsäcker-Skyrme 核质量公式的球形核液滴能表示为

$$E_{LD}(A, Z) = a_v A + a_s A^{2/3} + E_c + a_{\text{sym}} I^2 A f_s + a_{\text{pair}} \delta_{np} A^{-1/3}。 \quad (2)$$

式(2)中 a_v 是体积能系数, a_s 是表面能系数, 库仑能 E_c 写为

$$E_c = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 0.76 Z^{-2/3})。 \quad (3)$$

式(2)中同位旋不对称度 $I = (N - Z)/A$, f_s 为对称能修正因子, 体现了核表面弥散对原子核对称能系数的影响。有限核的对称能系数 a_{sym} 写为

$$a_{\text{sym}} = c_{\text{sym}} \left[1 - \frac{\kappa}{A^{1/3}} + \xi \frac{2 - |I|}{2 + |I|A} \right], \quad (4)$$

它在传统的液滴模型表面对称项的基础上引入同位旋相关的修正项, 用来描述原子核的 Wigner 效应。 c_{sym}, κ 和 ξ 为对称能系数相关的 3 个参数。式(2)中 a_{pair} 为对能系数, 描述的是对效应, 对能项修正因子 δ_{np} 表示为

$$\delta_{np} = \begin{cases} \frac{17}{16} (2 - |I| - |I|^2) : N \text{ and } Z \text{ even} \\ |I| - I^2 : N \text{ and } Z \text{ odd} \\ 1 - |I| : N \text{ even, } Z \text{ odd, and } N > Z \\ 1 - |I| : N \text{ odd, } Z \text{ even, and } N < Z \\ 1 : N \text{ even, } Z \text{ odd, and } N < Z \\ 1 : N \text{ odd, } Z \text{ even, and } N > Z \end{cases}。 \quad (5)$$

式(1)中 $b_k \beta_k^2$ 项描述原子核形变对宏观部分能量的贡献, 其中修正系数 b_k 表示为

$$b_k = \left(\frac{k}{2} \right) g_1 A^{1/3} + \left(\frac{k}{2} \right)^2 g_2 A^{-1/3}, \quad (6)$$

g_1 和 g_2 为原子核形变能相关的模型参数。

原子核的微观壳修正在传统的 Strutinsky 方法基础上考虑了镜像核修正及表面弥散的影响, 写为

$$\Delta E = c_1 f_d E_{\text{sh}} + |I| E'_{\text{sh}}, \quad (7)$$

其中 E_{sh} 和 E'_{sh} 分别表示原子核及相应镜像核的壳修正能, f_d 为表面弥散修正因子。

在 Strutinsky 壳修正计算中取光滑参量 $\gamma = 1.2 \hbar \omega_0$, Gauss-Hermite 多项式 $p = 6$ 阶, $\hbar \omega_0 =$

$41A^{-1/3}$ MeV, 并且只考虑原子核的轴对称形变。采用轴对称形变的 Woods-Saxon 势计算单粒子能级, 哈密顿量为

$$H = T + V + V_{s.o}, \quad (8)$$

其中: T 为动能项, 自旋-轨道耦合势 $V_{s.o}$ 为

$$V_{s.o} = -\lambda \left(\frac{\hbar}{2Mc} \right)^2 \nabla V \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})。 \quad (9)$$

式(9)中 M 为自由核子质量, $\boldsymbol{\sigma}$ 和 \mathbf{p} 分别表示泡利自旋矩阵及核子动量, λ 为同位旋依赖的自旋-轨道耦合强度:

$$\lambda = \frac{3}{2} \lambda_0 \left[1 \pm \frac{1}{3} (I - I^2) \right], \quad (10)$$

λ_0 为自旋轨道势系数。

中心势 V 采用轴对称形变的 Woods-Saxon 形式:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{V_q}{1 + \exp\left(\frac{r - R(\theta)}{a}\right)}。 \quad (11)$$

式(11)中 V_q 是势阱深度 (对于质子 $q=p$, 中子 $q=n$)

$$V_q = V_0 \pm V_s I, \quad (12)$$

式(12)中 V_s 是势深度的同位旋不对称部分, 对中子取正号, 对质子取负号。 $R(\theta)$ 是核表面上的点到坐标原点的距离

$$R(\theta) = c_0 R_0 [1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta) + \beta_6 Y_{60}(\theta)], \quad (13)$$

比例因子 c_0 体现原子核中核物质不可压缩性的影响, 它由等体积条件决定, $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 为球谐函数, $R_0 = r_0 A^{1/3}$ 为球形核半径。为了简化问题, 本文假定质子和中子的半径相同, 对于质子需同时考虑库仑势。

WS4 模型在 WS* 模型^[17]的基础上, 考虑了残余对修正、重核 Wigner 修正^[16]、原子核表面弥散修正^[30]等效应。Woods-Saxon 势表面弥散参数 a 写为

$$a = a_0 (1 + 2\varepsilon \delta_q)。 \quad (14)$$

式(14)中, 表面弥散修正因子 $\varepsilon = (I - I_0)^2 - I^4$, $I_0 = 0.4A/(A + 200)$ 表示 Green 公式描述的沿着 β 稳定线的核的同位旋不对称性。对 $I > I_0$ ($I < I_0$) 核子中的中子(质子)取 $\delta_q = 1$, 其它情况下取 $\delta_q = 0$ 。原子核表面弥散的对能修正 f_s 和微观壳修正 f_d 分别写为

$$f_s = 1 + k_s \varepsilon A^{1/3}, \quad f_d = 1 + k_d \varepsilon。 \quad (15)$$

其中: k_s 和 k_d 为原子核表面弥散相关的模型参数。

WS4 模型参数有 18 个, 通过拟合核质量表 AME2012^[31] 中 2 353 个已测量核质量的实验数据得到 18 个参数的最优值, 结果如表 1 所列。WS4 模型相较于 FRDM2012, HFB27, DZ31 等模型参数明显减少, 这将便于我们进一步分析和研究模型参数的不确定性。

表 1 WS4 和 WS* 模型参数最优值

Parameter	WS4	WS*
a_v/MeV	-15.518 1	-15.622 3
a_s/MeV	17.409 0	18.057 1
a_c/MeV	0.709 2	0.719 4
$c_{\text{sym}}/\text{MeV}$	30.159 4	29.156 3
$a_{\text{pair}}/\text{MeV}$	-5.816 6	-5.442 3
κ	1.518 9	1.348 4
g_1	0.010 46	0.008 95
g_2	-0.506 9	-0.463 2
V_0/MeV	-45.856 4	-46.878 4
r_0/fm	1.380 4	1.384 0
a_0/fm	0.764 2	0.784 2
λ_0	26.479 6	26.316 3
c_1	0.630 9	0.629 7
ξ	1.223 0	/
c_w/MeV	0.870 5	/
c_2/MeV^{-1}	1.337 1	/
k_s	0.153 6	/
k_d	5.008 6	/

3 模型参数的不确定性及统计误差分析

在 WS4 核质量模型中, 18 个参数可以按宏观项参数、微观项参数和残余修正项参数分为 3 组。其中, 残余修正项参数为 k_s, k_d, c_2 。残余修正项参数的值需要特定区域的多个原子核质量来共同确定, 分析较为困难。并且, 残余修正项对计算原子核结合能的贡献相对较小, 因此, 本文将主要分析 WS4 核质量模型中的 15 个宏观-微观参数的不确定性。

在 WS4 核质量模型中, 宏观项与微观项各个参数之间的关联很弱^[32]。因此, 可以假定各模型参数之间相互独立, 采用最大值近似估算的方法研究模型的统计误差。在计算某一个原子核质量的过程中, 每个模型参数都有在计算这个原子核质量的参数“最佳值”。这个参数“最佳值”与模型参数最优值之间存在一定的差异。以 Woods-Saxon 势的表面弥散参数 a_0 为例, 保持其余的模型参数取最优值不变, 在 a_0 最优值的附近取一系列的值, 计算某一个原子核的质量 M_{th} , 并

与该原子核的实验值 M_{exp} 对比。当模型的理论计算值 M_{th} 与实验值 M_{exp} 相等时, 这时该参数的值是计算该原子核的“最佳值”。图 1 以 $^{40}\text{Ca}, ^{190}\text{Au}$ 为例, 给出 $M_{\text{th}} - M_{\text{exp}}$ 随弥散参数 a_0 的变化关系。由图可见, ^{40}Ca 的弥散参数 a_0 的“最佳值”为 0.703 2, 而 ^{190}Au 的弥散参数 a_0 的“最佳值”为 0.740 1。

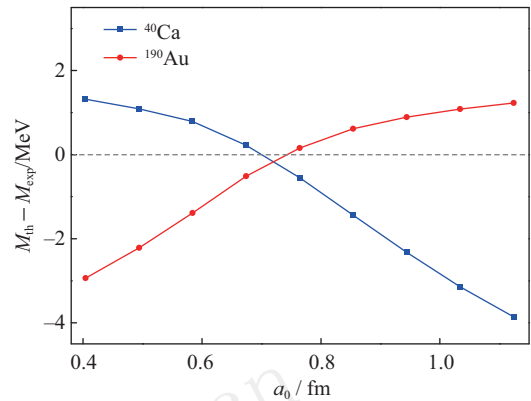


图 1 (在线彩图) WS4 理论值与实验值的偏差 $M_{\text{th}} - M_{\text{exp}}$ 随弥散参数 a_0 的变化

分别计算 2 353 个已知核对应的最佳弥散参数值, 可以得到弥散参数 a_0 的“最佳值”的统计分布, 如图 2 所示。其统计分布峰值与表 1 中相应的模型参数值基本一致。

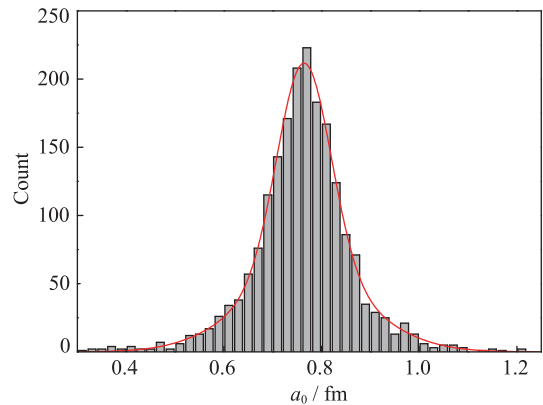


图 2 (在线彩图) 弥散参数 a_0 的“最佳值”的统计分布

分别对 15 个宏观-微观参数作上述计算, 可以得到每个参数的“最佳值”统计分布。图 3 给出了库仑能系数 a_c 、对修正系数 a_{pair} 、表面能系数 a_s 和自旋轨道势系数 λ_0 的“最佳值”的统计分布。统计分布的宽度与模型参数的不确定性紧密相关。通过对这 15 个模型参数的“最佳值”的统计分布进行分析, 发现这些“最佳值”的统计分布可以用双高斯函数很好的来描述。通过双高斯曲线拟合, 取 68.27% 的置信区间, 可以分别得到这 15 个宏观-微观参数的标准差 σ , 结果如表 2 所列。

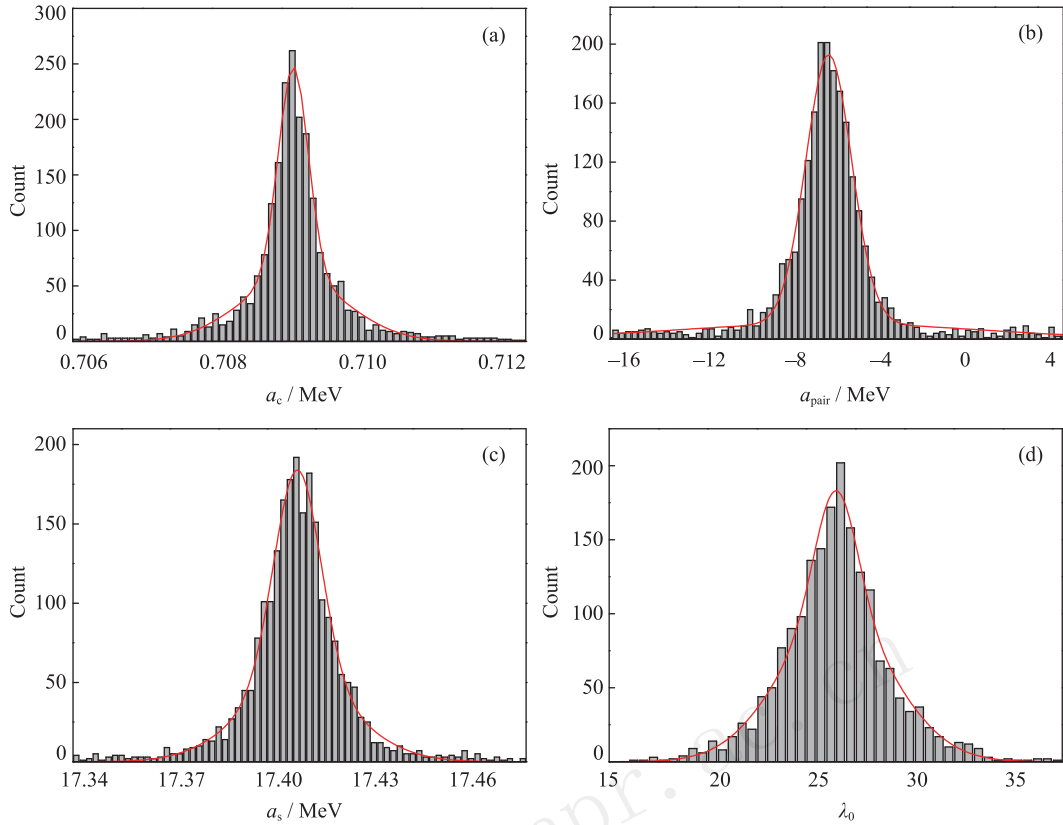


图 3 (在线彩图) WS4 模型中的库仑能系数 a_c 、对修正系数 a_{pair} 、表面能系数 a_s 和自旋轨道势系数 λ_0 的“最佳值”的统计分布, 曲线为双高斯函数拟合结果

表 2 WS4 和 WS* 模型参数的不确定性

Parameter	$\sigma_{\text{WS4}}(68.27\%)$	$\sigma_{\text{WS}^*}(68.27\%)$
a_v/MeV	0.001 73	0.003 0
a_s/MeV	0.010 86	0.015 6
a_c/MeV	0.000 43	0.000 7
$c_{\text{sym}}/\text{MeV}$	0.094 36	0.129 8
$a_{\text{pair}}/\text{MeV}$	1.361 83	1.909 5
κ	0.012 31	0.018 6
g_1	0.001 21	0.002 4
g_2	0.046 76	0.066 8
V_0/MeV	2.968 21	3.360 2
r_0/fm	0.057 17	0.083 5
a_0/fm	0.080 01	0.103 8
λ_0	2.333 30	2.789 8
c_1	0.113 74	0.156 6
ξ	0.037 75	/
c_w/MeV	0.358 60	/

从表 2 中可以看出, 对修正系数 a_{pair} , Woods-Saxon 势阱深度 V_0 , 自旋轨道势系数 λ_0 , 壳修正系数 c_1 以及 Wigner 修正系数 c_w 的不确定性相对较大, 甚至达到了模型参数的数量级。因此, 对这些模型参数所反映的

物理机制做进一步研究将有利于改进 WS4 核质量模型, 提高模型的计算精确度。此外, 表 2 同时给出了 WS4 模型与 WS* 模型的不确定性的比较。可以看出 WS4 核质量模型中各模型参数的不确定性比 WS* 核质量模型中相应模型参数的不确定性降低了 10%~50%。这一结果表明, WS4 核质量模型相对于 WS* 核质量模型, 在与实验数据拟合精度提高的同时, 模型的不确定性降低, 理论预言的可靠性增加。

基于表 2 中给出的模型参数的不确定性, 我们进一步分析了由模型参数的不确定性在理论计算时带来的统计误差。在 15 个宏观-微观参数中, 分别对任一参数只改变一个标准差而其余参数保持最优值不变时引起的原子核质量的改变 δM_i ,

$$\delta M_i = |E(x_1, x_2, \dots, x_i \pm \sigma_i, \dots, x_{15}) - E(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{15})|, \quad (16)$$

x_i 表示第 i 个参数值, σ_i 表示第 i 个参数的标准差。取这 15 个宏观-微观参数中, δM_i 的最大值作为统计误差 δM ,

$$\delta M = \max(\delta M_1, \delta M_2, \dots, \delta M_i, \dots, \delta M_{15}), \quad (17)$$

引起原子核质量改变最大的参数为最敏感参数。表 3 以 ^{40}Ca 为例, 给出每个模型参数不确定性在计算 ^{40}Ca 质量时所引起的原子核质量的改变 δM_i 。从表 3 可以看出, Woods-Saxon 势阱深度系数 V_0 的不确定性在计

表 3 模型参数不确定性引起 ^{40}Ca 质量的改变 δM_i

$\delta M_i/\text{MeV}$	$x_i + \sigma_i$	$x_i - \sigma_i$
δM_{a_v}	0.0690	0.0689
δM_{a_s}	0.1269	0.1268
δM_{a_c}	0.0449	0.0452
$\delta M_{c_{\text{sym}}}$	0.0026	0.0029
$\delta M_{a_{\text{pair}}}$	0.8462	0.8465
δM_{κ}	0.0025	0.0028
δM_{g_1}	0.0001	0.0005
δM_{g_2}	0.0016	0.0013
δM_{V_0}	1.3839	0.3842
δM_{r_0}	0.7235	0.0557
δM_{a_0}	0.7911	0.6967
δM_{λ_0}	1.3070	1.2059
δM_{c_1}	0.5849	0.5318
δM_{ξ}	0.0121	0.0123
δM_{c_w}	0.3586	0.3586

算 ^{40}Ca 质量时所引起的质量改变最大。因此 ^{40}Ca 理论预言质量的统计误差 δM 为 1.3839 MeV, 对 ^{40}Ca 质量的计算最敏感参数是 Woods-Saxon 势阱深度系数 V_0 。可以看到, Woods-Saxon 势相关的 3 个参数 V_0 、 r_0 和 a_0 的 $+\sigma$ 与 $-\sigma$ 之间差异较大, 这是由于 Woods-Saxon 势参数的改变引起了单粒子能级变化。

图 4 给出了质子数 Z 分别为 20, 40, 60, 82 时的原子核质量理论预言的统计误差 δM 随质量数 A 的变化情况, 统计误差用绿色误差棒表示。图中同时给出 WS4 模型理论预言值与 AME2016 中实验值的偏差。从图 4 中可以看出, WS4 模型理论计算值与实验数据的偏差基本都落在统计误差范围内。这表明, 用最大值近似估算法对 WS4 核质量模型理论预言的统计误差分析是简捷而有效的。在极端丰中子的重核区域, 统计误差随着中子数的增加而明显增大, 这主要是由对称能项所引起的。

图 5 给出核素图中质子数 $Z = 8 \sim 122$, 中子数 $N = 8 \sim 200$ 范围内 WS4 模型的统计误差。可以看出, β 稳定线附近的中等质量核及重核的理论值的统计误差普遍小于 1 MeV。而中子滴线附近的重核及超重核的理论值的统计误差相对较大, 甚至超过 4 MeV。

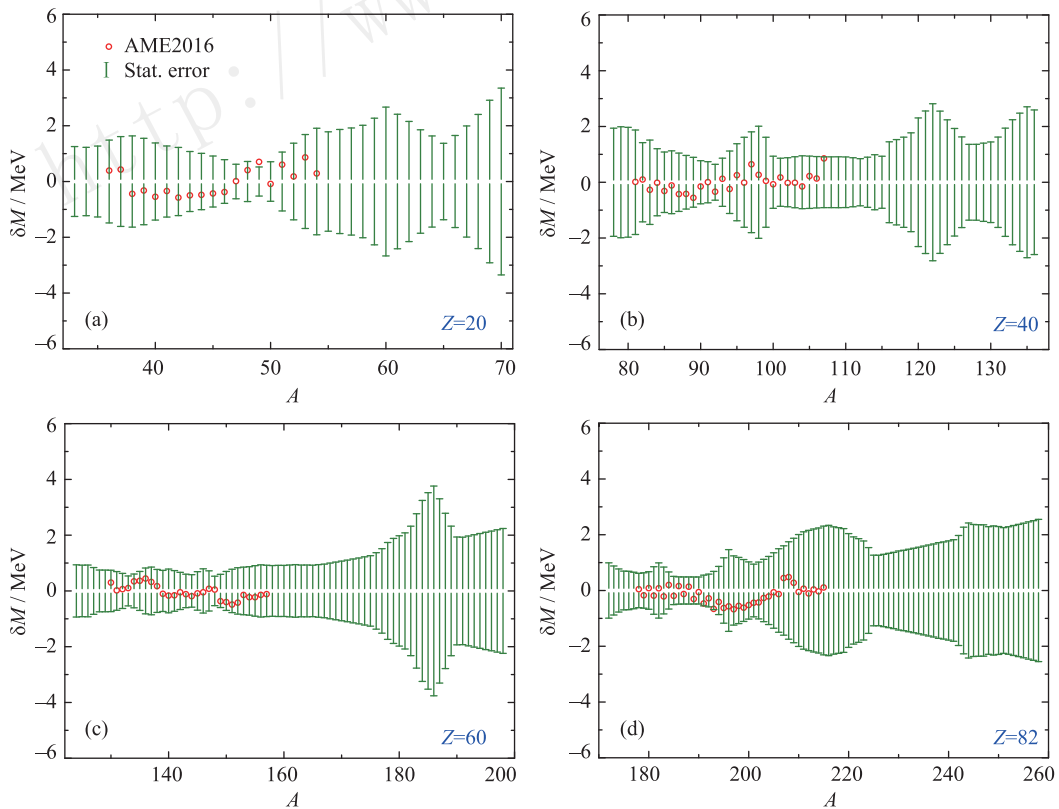


图 4 (在线彩图) WS4 模型中, 质子数 Z 分别为 20, 40, 60, 82 时的原子核质量理论预言的统计误差 δM 随质量数 A 的变化情况, 统计误差用绿色误差棒表示, 圆圈表示 WS4 理论预言值与 AME2016 中实验数据的偏差

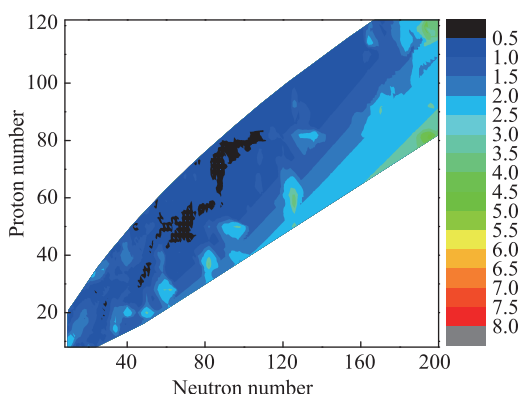


图 5 (在线彩图) WS4 模型理论预言的统计误差 δM

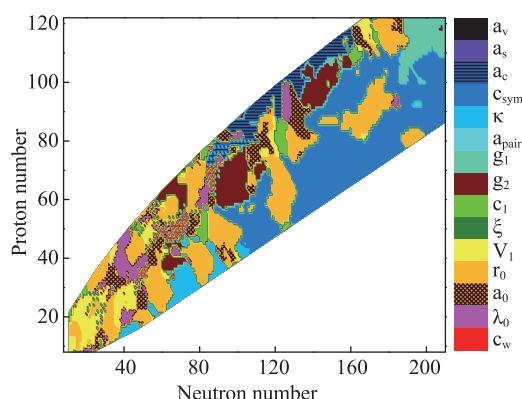


图 6 (在线彩图) WS4 模型最敏感参数的分布

为进一步分析模型参数对理论预言结果的影响，我们研究了 WS4 核质量模型理论计算中的最敏感参数。图 6 给出了 WS4 核质量模型最敏感参数的分布。从图 6 中可以看出，对称能系数相关的两个参数 c_{sym} 和 κ 对于中子滴线附近的中等质量核和重核有重要影响。Woods-Saxon 势半径系数 r_0 对中子滴线和质子滴线附近的原子核影响较大，库仑能系数 a_c 对质子滴线附近的重核影响较大。此外，形变能系数 g_1 和 g_2 对 β 稳定线周围的形变核影响显著。

此外，本文还将 WS4 核质量模型与 WS* 核质量模

型的统计误差进行了对比，图 7 给出了中子数 $N = 50$, $N = 82$ 和质子数 $Z = 50$, $Z = 82$ 的统计误差。为了便于比较不同模型理论预言值的差异，我们分别给出了 WS4, WS*, HFB27, DZ31 模型理论计算值及 AME2016 的实验值与 FRDM2012 模型的理论计算值的偏差。从图 7 可以看出，在已知原子核质量的区域，不同的核质量模型都能与已知原子核质量的实验数据不同程度地符合，WS4 和 WS* 核质量模型的统计误差也较小；但是外推到未知质量的原子核时，特别是外推到中子滴线附近的原子核时，不同模型间就存在着很

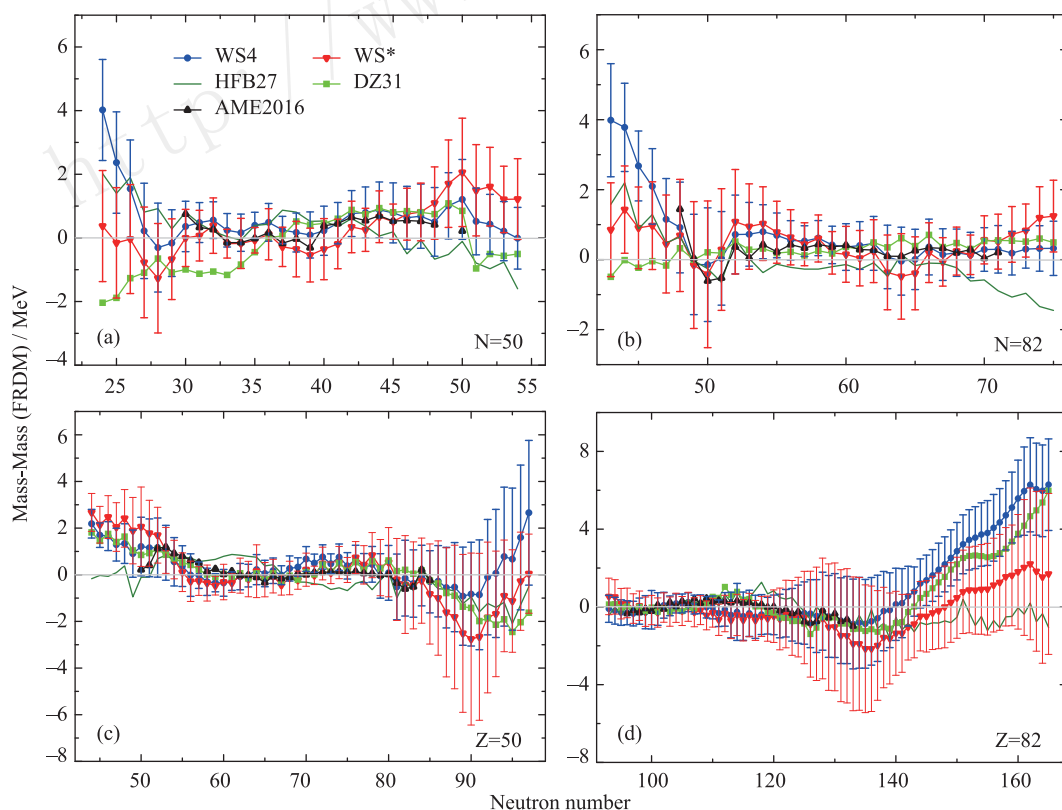


图 7 (在线彩图) WS4, WS*, HFB27, DZ31 模型中子数 $N = 50$, $N = 82$ 和质子数 $Z = 50$, $Z = 82$ 时的理论计算值与 FRDM2012 模型的理论计算值的偏差，蓝色误差棒和红色误差棒分别表示 WS4 和 WS* 理论预言值的统计误差

大的差异, WS4 和 WS* 核质量模型的统计误差也显著增大。因此, 对 neutron 滴线附近原子核质量的测量可以进一步降低模型中对称能系数的不确定性, 提高模型的计算精确度。WS4 与 WS* 核质量模型的误差范围有重叠部分, 暗示这些未知核质量落入重叠区域的可能性更大。

4 总结与讨论

本文系统地研究了 Weizsäcker-Skyrme(WS4) 核质量模型中的 15 个宏观-微观参数的不确定性。研究表明, 在 WS4 核质量模型中, 对修正系数 a_{pair} , 壳修正因子 c_1 , Woods-Saxon 势阱深度 V_0 , 自旋轨道势系数 λ_0 以及 Wigner 修正项系数 c_w 的不确定性相对较大。同时, 本文基于最大值近似估算的分析方法, 计算了 WS4 核质量模型理论预言的统计误差。WS4 核质量模型理论计算值与实验值的偏差基本都在统计误差范围内, 表明采用最大值近似估算法对 WS4 核质量模型理论预言的统计误差分析是简捷而有效的, 特别是对于分析滴线核以及超重核的理论预言值的不确定性具有一定的参考价值。本文还进一步研究了 WS4 核质量模型理论计算中最敏感的参数。结果表明, 对称能系数相关的两个参数 c_{sym} 和 κ 对 neutron 滴线附近的原子核有重要影响, Woods-Saxon 势半径系数 r_0 对 neutron 滴线和 proton 滴线附近的原子核影响较大。此外, 还将 WS4 核质量模型与 WS* 核质量模型参数的不确定性及统计误差进行了对比研究, 发现这两个版本得到的模型统计误差随中子数变化的趋势非常的相似。研究发现 WS4 核质量模型中各模型参数的不确定性比 WS* 核质量模型中相应模型参数的不确定性降低了 10% ~ 50%。

致谢 衷心感谢刘敏教授对本论文的修改所提出的宝贵意见, 感谢姚红对本工作的帮助。

参考文献:

- [1] CWIOK S, HEENEN P H, NAZAREWICZ W. *Nature*, 2005, **433**: 705.
- [2] SOBICZEWSKI A, POMORSKI K. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2007, **58**: 292.
- [3] LU Bingnan, ZHAO Enguang, ZHOU Shangui. *Physical Review C*, 2012, **85**: 011301(R).
- [4] SOBICZEWSKI A. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2016, **43**: 095106.
- [5] OGANESSIAN Y T, UTYONKOV V K. *Nuclear Physics A*, 2015, **944**: 62.
- [6] WANG Y Z, Wang S J, HOU Z Y, *et al.* *Physical Review C*, 2015, **92**: 064301.
- [7] LI Baoan, CHEN Liewen, KO Mingche. *Physics Reports*, 2008, **464**: 113.
- [8] LIU Min, WANG Ning, LI Zhuxia, *et al.* *Physical Review C*, 2010, **82**: 064306.
- [9] DANIELEWICZ P, LEE J. *Nuclear Physics A*, 2014, **922**: 1.
- [10] JIANG H, WANG N, CHEN Liewen, *et al.* *Physical Review C*, 2015, **91**: 054302.
- [11] WANG Ning, LIU Min, OU Li, *et al.* *Physics Letters B*, 2015, **751**: 553.
- [12] MOLLER P, MYERS W D, SAGAWA H, *et al.* *Physical Review Letters*, 2012, **108**: 052501.
- [13] MOLLER P, NIX J R, MYERS W D, *et al.* *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 1995, **59**: 185.
- [14] WANG Ning, LIU Min, WU Xizhen. *Physical Review C*, 2010, **81**: 044322.
- [15] MO Qihong, LIU Min, WANG Ning. *Physical Review C*, 2014, **90**: 024320.
- [16] LIU Min, WANG Ning, DENG Yangge, *et al.* *Physical Review C*, 2011, **84**: 014333.
- [17] WANG Ning, LIANG Zuoying, LIU Min, *et al.* *Physical Review C*, 2010, **82**: 044304.
- [18] WANG Ning, LIU Min, WU Xizhen, *et al.* *Physics Letters B*, 2014, **734**: 215.
- [19] WANG Ning, LIU Min. *Chin Sci Bull*, 2015, **60**: 1145. (in Chinese)
(王宁, 刘敏. *科学通报*, 2015, **60**: 1145.)
- [20] GORIELY S, SAMYN M, PEARSON J M. *Physical Review C*, 2007, **75**: 064312.
- [21] GORIELY S, CHAMEL N, PEARSON J M. *Physical Review Letters*, 2009, **102**: 152503.
- [22] DUFLO J, ZUKER A P. *Physical Review C*, 1995, **52**: R23.
- [23] WANG Meng, AUDI G, KONDEV F G, *et al.* *Chinese Physics C*, 2017, **41**(3): 030003.
- [24] CHEN Menghua, LIU Min, WANG Ning. *Journal of Guangxi Normal University(Natural Science Edition)*, 2018, **36**(1): 1. (in Chinese)
(陈梦华, 刘敏, 王宁. *广西师范大学学报(自然科学版)*, 2018, **36**(1): 1.)
- [25] WANG Ning, LIU Min, JIANG H, *et al.* *Physical Review C*, 2015, **91**: 044308.
- [26] GAO Y, DOBACZEWSKI J, KORTELAINE M, *et al.* *Physical Review C*, 2013, **87**: 034324.
- [27] ERLER J, REINHARD P G. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2015, **42**: 034026.
- [28] ROCA-MAZA X, PAAR N, COLO G. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2015, **42**: 034033.
- [29] YUAN Cenxi. *Physical Review C*, 2016, **93**: 034310.
- [30] WANG Ning, LIU Min, WU Xizhen, *et al.* *Physics Letters B*, 2014, **734**: 215.
- [31] WANG Meng, AUDI G, WAPSTRA A H, *et al.* *Chinese Physics C*, 2012, **36**(12): 1603.
- [32] LIU Min, GAO Yu, WANG Ning. *Chinese physics C*, 2017, **41**(11): 114101.

Statistical Errors in Weizsäcker-Skyrme Mass Model

CHEN Menghua¹, WANG Ning^{1,2,†}

(1. Department of Physics, Guangxi Normal University, Guilin 541004, Guangxi, China;

2. Guangxi Key Laboratory Breeding Base of Nuclear Physics and Technology, Guilin 541004, Guangxi, China)

Abstract: The statistical uncertainties of 15 model parameters in the Weizsäcker-Skyrme (WS4) mass model are investigated with an efficient approach, and the propagated errors in the predicted masses are estimated. The discrepancies between the predicted masses and the experimental data are almost all smaller than the model errors. The most sensitive model parameter which causes the largest statistical error is analyzed for all bound nuclei. We find that the two coefficients of symmetry energy term significantly influence the mass predictions of extremely neutron-rich nuclei. In addition, the parameter uncertainties and statistical errors of the WS4 mass model and the WS* mass model are compared. The uncertainties of model parameter in the WS4 mass model is reduced by 10%~50% compared with the WS* mass model.

Key words: nuclear mass model; predictive power; uncertainty of parameter; statistical error

<http://www.npr.ac.cn>

Received date: 17 Apr. 2018; **Revised date:** 14 May 2018

Foundation item: Guangxi Natural Science Foundation (2015GXNSFDA139004); Innovation Project of Guangxi Graduate Education (YCSW2018088)

† **Corresponding author:** WANG Ning, E-mail: wangning@gxnu.edu.cn.