

文章编号: 1007-4627(2011)04-0448-06

# 强流束在四极磁铁中传输的矩阵法与程序设计<sup>\*</sup>

李超龙<sup>1</sup>, 石海泉<sup>1</sup>, 吕建钦<sup>2</sup>

(1. 华东交通大学基础科学学院, 江西 南昌 330013;

2. 北京大学核物理与核技术国家重点实验室, 北京 100871)

**摘要:** 强流脉冲束传输的计算是一个相当复杂的问题, 因为不同类型的粒子束分布产生不同的空间电荷场, 而在束流运动过程中, 空间电荷场也在不断地变化, 而且粒子运动的轨迹与空间电荷势又是相互依赖的, 因此需要求得一个自洽解。采用矩阵法分析了非强流脉冲束流与强流脉冲束流在四极磁铁中传输的矩阵, 并编写了束流在四极磁铁等元件中的传输计算程序, 程序采用迭代计算方法获得自洽解。程序运行时, 可以进行直观的图形显示。

**关键词:** 强流脉冲束; 四极磁铁; 矩阵法; 程序设计

**中图分类号:** TL501<sup>+</sup>.5; TL503.8; TP39.9

**文献标志码:** A

## 1 引言

在束流传输中, 四极磁铁是强聚焦元件, 主要用于各种高能粒子加速器的聚焦。国内外关于带电粒子束流在四极磁铁中的传输计算程序主要有 TRACE、TRANSPORT、PARMILA 和 PARMTEQ 等。其中, TRANSPORT 程序作为当今世界上关于束流传输计算的最流程序之一, 不能进行强流束的传输计算, 而 TRACE、PARMILA 和 PARMTEQ 等程序虽然能够进行强流束的传输计算, 但是计算强流束的空间电荷效应时都不经过迭代计算, 所得结果都不是自洽的<sup>[1-8]</sup>。

为进一步提高强流脉冲束流在四极磁铁中传输的计算精度, 我们编写了一个可以计算非强流脉冲束、强流脉冲束在四极磁铁中传输的程序, 并进行了 35 kV 强流脉冲束在四极磁铁、漂浮空间等元件中传输的实例计算。本程序的优点是, 不但采用了最优化方法可实现所需要的光学条件, 而且采用迭代方法, 计算强流束的传输时可以获得自洽结果。

## 2 四极磁铁的矩阵法

束流传输系统的设计基于束流传输理论。束流为许多单粒子的集合, 发射度和强度或亮度为束流

的基本参量。每一个粒子都可以用由坐标和动量构成的相空间  $(x, p_x, y, p_y, z, p_z)$  的点来表示。因此, 束流占有一定的相空间体积, 此即发射度, 由刘维定理可知, 它在运动中保持不变。束流强度为单位时间通过某截面的粒子数或其电荷数, 打靶时则多采用束流亮度, 其定义为单位时间通过单位截面的粒子数。

设计束流传输系统就是根据给定的加速器出口的束流参量, 设计最佳的传输元件组合, 使在靶上以及传输过程中得到所要求的束流参数, 在传输过程中获得合理的束流包络。在束流传输系统的设计中, 有矩阵法和轨迹方程法两种数值计算方法。矩阵法就是根据束流传输理论, 将束流用一个六维相空间椭球来描述, 加速器元件对束流运动的作用用传输矩阵算子表示, 根据给定的初始束流相空间椭球, 通过计算传输矩阵算子, 设计束流传输系统, 使得传输中和传输后的束流相空间椭球符合要求; 轨迹方程法就是采用对带电粒子在电磁场中的运动方程直接积分的方法来设计束流传输系统, 积分中, 各个加速器元件所产生的电磁场是预先给定的, 它既可是实验测量值, 也可是数值计算结果。这里采用矩阵法描述束流在四极磁铁中的传输。

\* 收稿日期: 2010-12-13; 修改日期: 2011-03-28

\* 基金项目: 江西省科技支撑计划资助项目(2010BGB00602); 江西省自然科学基金资助项目(2008GQW0017); 华东交通大学校立科研基金资助项目(O9JC04)

作者简介: 李超龙(1976—), 男, 江西上饶人, 讲师, 硕士, 从事粒子动力学研究; E-mail: clljpx@126.com

非强流脉冲束在四极磁铁中传输时, 不需要考虑空间电荷效应, 四极磁铁的传输矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos(kl) & (1/k)\sin(kl) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k\sin(kl) & \cos(kl) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(kl) & (1/k)\sinh(kl) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\sinh(kl) & \cosh(kl) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中:  $l$  为四极磁铁的长度;  $k^2 = G/(B\rho)$ ;  $G$  为磁场梯度;  $B\rho$  为粒子的磁刚度。

强流脉冲束在四极磁铁中传输时, 需要考虑空间电荷效应, 把四极磁铁的场作用区均匀分成若干个区间, 每个区间  $[z_{i-1}, z_i]$  的传输矩阵为<sup>[9-15]</sup>

$$\begin{pmatrix} \cosh(k_x l_i) & 1/k_x \sinh(k_x l_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_x \sinh(k_x l_i) & \cosh(k_x l_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(k_y l_i) & 1/k_y \sinh(k_y l_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_y \sinh(k_y l_i) & \cosh(k_y l_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(k_z l_i) & \sinh(k_z l_i)/k_z \beta_0^2 \gamma_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_z \beta_0^2 \gamma_0^2 \sinh(k_z l_i) & \cosh(k_z l_i) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中:  $l_i$  为每个区间的长度;

$$k_x^2 = \frac{qG}{p_0} - \frac{2Q\mu_x}{\beta_0}; \quad k_y^2 = \frac{qG}{p_0} + \frac{2Q\mu_y}{\beta_0}; \quad k_z^2 = \frac{2Q\mu_z}{\beta_0 \gamma_0^2};$$

$$Q = \frac{3qIT_{rf}}{8\pi\epsilon_0 XYZ}; \quad \gamma_0 = \left[ 1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2 \right]^{-1/2};$$

而  $q$  为粒子的电荷,  $p_0$  为参考粒子的动量,  $I$  为脉冲高斯分布束团的平均流强,  $T_{rf}$  为脉冲束的周期; 椭圆的形状因子  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  和  $\mu_z$  的表达式如下:

$$\mu_x = \frac{XYZ\gamma}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(X^2 + \xi) \sqrt{(X^2 + \xi)(Y^2 + \xi)(Z^2\gamma^2 + \xi)}}, \quad (3)$$

$$\mu_y = \frac{XYZ\gamma}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(Y^2 + \xi) \sqrt{(X^2 + \xi)(Y^2 + \xi)(Z^2\gamma^2 + \xi)}}, \quad (4)$$

$$\mu_z = \frac{XYZ\gamma}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(Z^2\gamma^2 + \xi) \sqrt{(X^2 + \xi)(Y^2 + \xi)(Z^2\gamma^2 + \xi)}}, \quad (5)$$

其中:  $\xi$  为等位面参变量;  $X$ ,  $Y$  和  $Z$  分别为脉冲束团在  $x$ ,  $y$  和  $z$  三个方向的几何尺寸。

### 3 程序设计

当计算束流在四极磁铁中传输时, 先计算非强流脉冲束流的传输, 采用最优化方法自动调整元件的参数, 束流粒子的轨迹通过传输矩阵的直接相乘计算得出; 然后计算强流脉冲束的传输, 采用迭代

方法计算束流的空间电荷效应。下面介绍最优化方法和空间电荷效应的迭代方法。

#### 3.1 最优化方法

最优化方法是加速器粒子动力学设计的重要手段, 它不但能够使设计方案更加合理, 而且可以大大节省计算时间。为了能够进行寻优计算, 本程序

采用了直接寻优的 Powell 法，通过自动调整某些元件的参数，使系统实现给定的光学条件。例如，成像、成腰、消色差和限定束斑大小等。直接寻优方法不需要计算目标函数的导数，它们适合于这样一些问题：目标函数非常复杂，或者根本写不出其解析式，故很难计算其导数。

Powell 法属于共轭梯度法，因此有较快的收敛速度。Powell 方法的计算步骤为<sup>[16]</sup>：

(1) 给定初始点  $X_0$ ，容差  $\epsilon > 0$ ， $n$  个线性无关的方向  $D_{1,1}, D_{1,2}, \dots, D_{1,n}$ ，置  $k=1$ 。

(2) 置  $X_{k,0} = X_{k,1}$ ，从  $X_{k,0}$  出发，依次沿方向  $D_{k,1}, D_{k,2}, \dots, D_{k,n}$  作一维搜索，得到点  $X_{k,1}, X_{k,2}, \dots, X_{k,n}$ 。

(3) 令  $D_{k,n+1} = D_{k,n} - D_{k,0}$ ，再从  $X_{k,0}$  出发，沿  $D_{k,n+1}$  作一维搜索，即求  $\lambda_{n+1}$ ，使

$$F(X_{k,0} + \lambda_{k,n+1} D_{k,n+1}) = \min_{\lambda} F(X_{k,0} + \lambda D_{k,n+1}). \tag{6}$$

令 
$$X_{k+1,0} = X_k = X_{k,0} + \lambda_{k,n+1} D_{k,n+1},$$

若  $\|X_k - X_{k-1}\| < \epsilon$ ，则停止计算，得到近似极小点  $X_k$ ；否则，转入下一步。

(4) 求指标  $m$ ，使 
$$|F(X_{k,m-1}) - F(X_{k,m})| = \max_{1 \leq j \leq n} |F(X_{k,j-1}) - F(X_{k,j})|.$$

若 
$$|\lambda_{n+1}| > \left[ \left| \frac{F(X_{k,0}) - F(X_{k+1,0})}{F(X_{k,m-1}) - F(X_{k,m})} \right| \right]^{\frac{1}{2}}$$

则令 
$$D_{n+1,j} = D_{n,j}, \quad j = 1, \dots, m-1$$
 
$$D_{n+1,j} = D_{n,j+1}, \quad j = m, \dots, n$$

置  $k = k + 1$ ，转步(2)。

### 3.2 空间电荷效应的迭代方法

强流脉冲束在四极磁铁中传输时，束流中的空间电荷效应对束流传输的影响是一个相当复杂的问题，因为不同类型的粒子束分布产生不同的空间电荷场，而在束流运动过程中，空间电荷场也在不断地变化，而且粒子运动的轨迹与空间电荷势又是相互依赖的，因此需要一个自洽解，本程序采用迭代方法获得自洽解。

当计算束流的空间电荷效应时，首先，把四极磁铁均分成  $i$  个区间，把束流流强分成  $j$  等份；其次，在第 1 区间，调用相应数组中考虑空间电荷时四极磁铁中的传输矩阵(式(2))，先进行流强迭代，后进行误差迭代，经过逐次迭代，可以计算出第 1 区间的  $j$  级传输矩阵和  $j$  级束包络；再次，重复上述步骤，依次计算第 2 至  $i$  区间的  $j$  级传输矩阵和  $j$  级束包络；最后，把元件第 1 至第  $i$  区间的  $j$  级传输矩阵依次连乘可以得到考虑空间电荷效应时四极磁铁的总矩阵，替换原先存储在相应数组中不考虑空间电荷效应时四极磁铁的总矩阵。至此，四极磁铁传输矩阵的计算结束，程序进行下一个元件的传输计算。

#### 3.2.1 流强迭代

设元件的有效长度为  $l$ ，把  $l$  均分成  $i$  个区间，并设各区间的长为  $l_i$ ，假定在第  $i-1$  区间上，即在区间  $(z_{i-2}, z_{i-1})$  上的束包络  $X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}$  已经算出。将第  $i-1$  区间上的束包络作为第  $i$  区间上的零级流强(即  $i=0$ )近似束包络  $X_i, Y_i, Z_i$ ，即令  $X_i^{(i0)} = X_i, Y_i^{(i0)} = Y_i$  和  $Z_i^{(i0)} = Z_i$ ，取平均值

$$\bar{X}_i^{(i0)} = \frac{1}{2}(X_{i-1} + X_i^{(i0)}) = X_{i-1},$$

$$\bar{Y}_i^{(i0)} = \frac{1}{2}(Y_{i-1} + Y_i^{(i0)}) = Y_{i-1},$$

$$\bar{Z}_i^{(i0)} = \frac{1}{2}(Z_{i-1} + Z_i^{(i0)}) = Z_{i-1}. \tag{7}$$

利用  $\bar{X}_i^{(i0)}, \bar{Y}_i^{(i0)}$  和  $\bar{Z}_i^{(i0)}$  可算出系数  $K_{x,i}, K_{y,i}$  和  $K_{z,i}$ ，以及零级流强(即  $i=0$ )近似下的传输矩阵  $M$ ，进而可以算出一级流强(即  $i=I/10$ )近似下的束包络  $\bar{X}_i^{(i1)}, \bar{Y}_i^{(i1)}$  和  $\bar{Z}_i^{(i1)}$ 。再取平均值：

$$\bar{X}_i^{(i1)} = \frac{1}{2}(X_{i-1} + X_i^{(i1)}),$$

$$\bar{Y}_i^{(i1)} = \frac{1}{2}(Y_{i-1} + Y_i^{(i1)}),$$

$$\bar{Z}_i^{(i1)} = \frac{1}{2}(Z_{i-1} + Z_i^{(i1)}), \tag{8}$$

经过逐次递增，可以算出十级流强(即  $i=I$ )近似下的束包络  $\bar{X}_i^{(i10)}, \bar{Y}_i^{(i10)}$  和  $\bar{Z}_i^{(i10)}$ 。

#### 3.2.2 误差迭代

在第  $i$  区间的流强均匀递增迭代完成后，进行误差减小迭代。将第  $i$  区间十级流强(即  $i=I$ )近似下的束包络  $\bar{X}_i^{(i10)}, \bar{Y}_i^{(i10)}$  和  $\bar{Z}_i^{(i10)}$  作为本区间上的零

级近似束包络  $X_i^{(0)}$ ,  $Y_i^{(0)}$  和  $Z_i^{(0)}$ , 即令  $X_i^{(i10)} = X_i^{(0)}$ ,  $Y_i^{(i10)} = Y_i^{(0)}$  和  $Z_i^{(i10)} = Z_i^{(0)}$ , 取平均值:

$$\begin{aligned} \bar{X}_i^{(0)} &= \frac{1}{2}(X_{i-1} + X_i^{(0)}) = X_{i-1}, \\ \bar{Y}_i^{(0)} &= \frac{1}{2}(Y_{i-1} + Y_i^{(0)}) = Y_{i-1}, \\ \bar{Z}_i^{(0)} &= \frac{1}{2}(Z_{i-1} + Z_i^{(0)}) = Z_{i-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

利用  $\bar{X}_i^{(0)}$ ,  $\bar{Y}_i^{(0)}$  和  $\bar{Z}_i^{(0)}$  可算出  $K_{x,i}$ ,  $K_{y,i}$  和  $K_{z,i}$ , 以及零级近似下的传输矩阵  $M$ . 进而可以算出一级近似下的束包络  $\bar{X}_i^{(1)}$ ,  $\bar{Y}_i^{(1)}$  和  $\bar{Z}_i^{(1)}$ , 再取平均值:

$$\begin{aligned} \bar{X}_i^{(1)} &= \frac{1}{2}(X_{i-1} + X_i^{(1)}), \\ \bar{Y}_i^{(1)} &= \frac{1}{2}(Y_{i-1} + Y_i^{(1)}), \\ \bar{Z}_i^{(1)} &= \frac{1}{2}(Z_{i-1} + Z_i^{(1)}). \end{aligned} \quad (10)$$

重复上述步骤, 直到前后两次所得到的束包络之差:

$$\begin{aligned} \Delta X_i^{(n+k)} &= \left| \left[ X_i^{(n+k)} - X_i^{(n+k-1)} \right] \right|, \\ \Delta Y_i^{(n+k)} &= \left| \left[ Y_i^{(n+k)} - Y_i^{(n+k-1)} \right] \right|, \\ \Delta Z_i^{(n+k)} &= \left| \left[ Z_i^{(n+k)} - Z_i^{(n+k-1)} \right] \right| \end{aligned} \quad (11)$$

满足所允许的误差为止。

在计算出第  $i$  区间 ( $z_{i-1}$ ,  $z_i$ ) 上满足误差要求的束包络  $X_i$ ,  $Y_i$  和  $Z_i$  后, 按照上述方法可以计算出第  $i+1$  区间 ( $z_i$ ,  $z_{i+1}$ ) 上的束包络  $X_{i+1}$ ,  $Y_{i+1}$  和  $Z_{i+1}$ . 重复前面步骤, 就可以算出整个元件各个区间的束包络。

### 4 图形显示与实例计算

计算机程序的应用给束流运输系统的设计和研究提供了一种直观而方便的工具。本程序在计算过程中可以直接在计算机屏幕上显示横向发射相图  $X-X'$ 、 $Y-Y'$  和纵向发射相图  $\Delta\varphi-\Delta E$ , 不必经过后处理, 相图如图 1~3 所示。当所有粒子通过束流传输系统以后, 程序可以把  $x$  和  $y$  两个方向的束包络曲线显示在同一个坐标框架内, 横轴上方为  $x$  方向的束包络曲线, 下方为  $y$  方向的束包络曲线, 根据束包络曲线可以直接判断出束流运输系统的设计是

否满意。

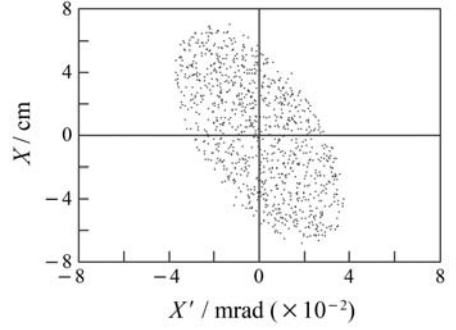


图 1 横向 X 相图

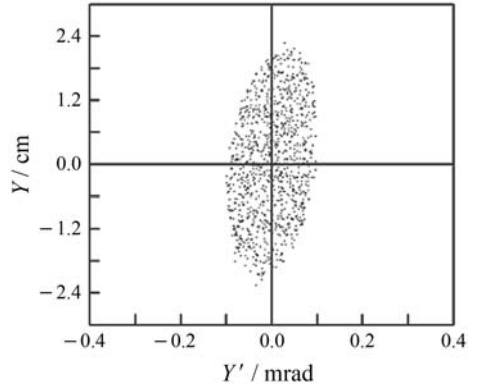


图 2 横向 Y 相图

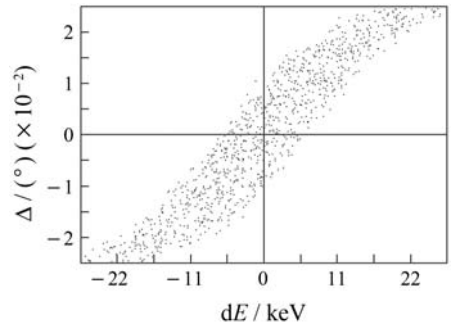


图 3 纵向相图

利用本程序计算了由四极磁铁和漂浮空间组成的束流传输系统(如图 4 所示), 粒子的初始能量为 35 keV, 质量数和电荷数均为 1。在不考虑空间电荷效应的情况下, 束流传输系统的束流包络曲线如图 5 所示; 在考虑空间电荷效应的情况下, 当  $I=5$

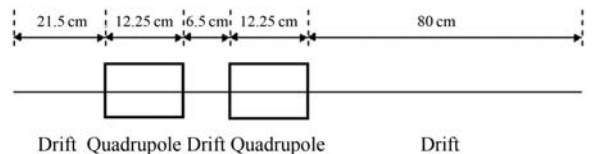


图 4 束流传输系统

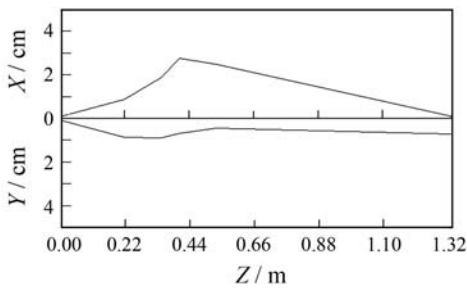


图 5 不考虑空间电荷效应时的束流包络线

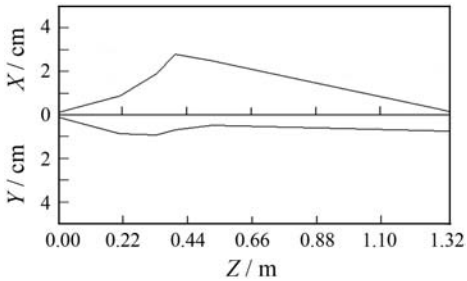


图 6 考虑空间电荷效应时 5 mA 流强的束流包络线

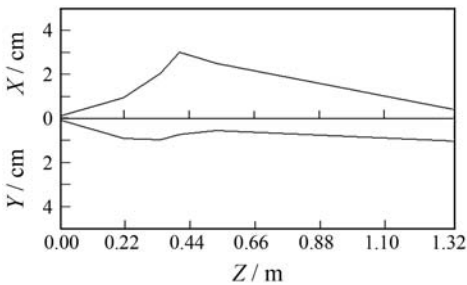


图 7 考虑空间电荷效应时 10 mA 流强的束流包络线

mA 时,束流传输系统的束流包络曲线如图 6 所示,当  $I=10$  mA 时,束流包络曲线如图 7 所示。根据程序输出的束流包络曲线,考虑空间电荷效应时的束流包络曲线比不考虑空间电荷效应时的束流包络曲线大,并且随束流流强增大,束流包络曲线增大。其原因是,束流流强越大,空间电荷效应对脉冲束流传输的影响越大,迫使束流横向扩张越大,因此束流包络曲线越大。

## 5 结论与展望

文中介绍了强流脉冲束在四极磁铁中的传输,内容包括矩阵法、程序设计和实例计算等。本程序计算束流在四极磁铁中传输时,先计算非强流脉冲束流的传输,采用最优化方法自动调整元件的参数,束流粒子的轨迹可通过传输矩阵的直接相乘计算得出;然后计算强流脉冲束的传输,采用迭代方

法计算束流的空间电荷效应,直到前后两次计算结果都满足所要求的精度(即达到前后自洽)为止,因此其计算结果是自洽的;本程序在运行过程中可以进行直观的图形显示,上述这些特点显示了本程序的实用性与优越性。本程序虽然可以直观地比较不同流强的束流包络线,但在不同流强发射相图的比较上还有很大的提升空间。

## 参考文献 (References):

- [1] Dragt A J. Physics of High Energy Particle Accelerators// Carrigan R A. AIP Conference Proceeding. New York: Am Inst Phys, 1987, (87): 147.
- [2] Yasuda K, Hatashita M, Hatori S, *et al.* Nucl Instr and Meth, 2003, **B210**: 27.
- [3] Watt F, Rajta I, van Kan J A, *et al.* Nucl Instr and Meth, 2002, **B190**: 306.
- [4] Crandall K R, Rusthoi D P. TRACE3-D documentation[CP], 1997, LA-UR-97-886.
- [5] Wang H W. High Power Laser and Particle Beam, 1998, **10** (2): 287(in Chinese).  
(王厚稳. 强激光与粒子束, 1998, **10**(2): 287.)
- [6] Mao Naifeng, Xiao Meiqin, Li Zenghai. Atomic Energy Science and Technology, 1986, **20**(6): 117(in Chinese).  
(茅乃丰, 肖美琴, 李增海. 原子能科学技术, 1986, **20**(6): 117.)
- [7] Harunori T, Billen J H. Parmila[CP], 2005, LA-UR-98-4478.
- [8] Ding Furong, Shi Ping, Wang Yao, *et al.* Nuclear Physics Review, 2004, **21**(1): 34(in Chinese).  
(丁富荣, 史平, 王尧, 等. 原子核物理评论, 2004, **21**(1): 34.)
- [9] Lü Jianqin, Li Jinhai, Li Chaolong. Science Technology and Engineering, 1998, **20**(6): 117(in Chinese).  
(吕建钦, 李金海, 李超龙. 科学技术与工程, 1998, **20**(6): 117.)
- [10] Lü Jianqin, Li Jinhai, Li Chaolong. High Power Laser and Particle Beam, 2003, **15**(7): 717.
- [11] Zhao Zhuo, Lü Jianqin. Chinese Physics C, 2008, **32**(3): 209.
- [12] Li Jinhai, Li Chaolong, Lu Jianqin. High Energy Physics and Nuclear Physics, 2003, **27**(7): 645.
- [13] Li Jinhai, Lu Jianqin. High Energy Physics and Nuclear Physics, 2004, **28**(9): 998.
- [14] Li Jinhai, Lu Jianqin. High Energy Physics and Nuclear Physics, 2005, **29**(7): 695.
- [15] Zhu Kun, Wang Shengli, Yin Quanmin. Nuclear Physics Re-

view, 2001, **18**(2): 101(in Chinese).

(朱昆, 王胜利, 尹全民. 原子核物理评论, 2001, **18**(2): 101.)

Higher Education Press, 2004, 342–348(in Chinese).

(吕建钦. 带电粒子束光学. 北京: 高等教育出版社, 2004, 342–348.)

[16] Lu Jianqin. The Optics of Charged Particle Beams. Beijing:

## Matrix Method and Program Design of Intense Beam Transport in Quadrupole Magnet<sup>\*</sup>

LI Chao-long<sup>1, 1)</sup>, SHI Hai-quan<sup>1</sup>, LÜ Jian-qin<sup>2</sup>

(1. Basic Science School, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;

2. State Key Laboratory of Nuclear Physics and Technology, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** It is very difficult to calculate the nonlinear transport of an intense beam, because the particle trajectories depend on the electric potentials excited by the particle beams, and the electric potentials of the beams depend on the particle trajectories and the particle distributions in the phase spaces. So, it is necessary to solve the problem by iterations to get self-consistent solutions. We use transport matrix method to analyze the transportation in quadrupole magnet of non-intense pulsed beam and intense pulsed beam respectively, and write a computer code for the pulsed beam transporting in quadrupole magnet. The self-consistent solution can be obtained by using iteration calculation method. During the calculation, the result can be shown by the prompt graph.

**Key words:** intense pulsed beam; quadrupole magnet; matrix method; program design

---

\* Received date: 13 Dec. 2010; Revised date: 28 Mar. 2011

\* Foundation item: Supporting Program for Science and Technology of Jiangxi Province(2010BGB00602); Natural Science Foundation of Jiangxi Province(2008GQW0017); Research Foundation of East China Jiaotong University(09JC04)

1) E-mail: clljpx@126.com