

文章编号: 1007-4627(2011)01-0044-07

Wigner 函数的性质及其在一维无限深势阱和一维谐振子中的应用*

徐 皓, 石田君

(西北大学物理学系, 陕西 西安 710069)

摘 要: 首先介绍了 Wigner 函数的基本性质以及以 Wigner 函数为基础的相空间定态微扰理论, 然后将其应用到一维无限深势阱和谐振子。推导出一维无限深势阱所对应的 Wigner 函数, 而且发现了存在于其纯态 Wigner 函数中奇特的压缩效应, 并利用不确定性关系给予了解释。同时计算出一维无限深势阱和谐振子在微扰的作用下, 相应 Wigner 函数和能级的修正。

关键词: 一维无限深势阱; 相空间; Wigner 函数; 微扰; 一维线性谐振子

中图分类号: O413.1 **文献标识码:** A

1 引言

作为和海森堡、薛定谔所创立的标准量子力学相等效的形式, Wigner 创立了相空间的量子力学并引入相空间准几率分布函数: Wigner 函数。Wigner 函数在量子光学、凝聚态、动力学系统以及 M 理论等领域有着广泛的应用^[1]。它由 Wigner 和 Szilard 引入作为密度矩阵在相空间的表示。它可以完全描述量子态, 可以用经典观测量的平均值来表示量子力学的平均值, 而且直接和测量有关。然而由 Wigner 和 Szilard 引入的 Wigner 函数只相应于密度矩阵的对角元素, 而是量子力学的应用(如: 微扰理论)却需要将密度矩阵的非对角元素考虑进去, 所以 Moyal 给出的与时间无关且为实的包含密度矩阵对角元素和非对角元素的 Wigner 函数被广泛应用, 其具体形式是^[2]

$$f_{mn}(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{iy p/\hbar} \varphi_m^* \times \left(x + \frac{1}{2}y\right) \varphi_n \left(x - \frac{1}{2}y\right), \quad (1)$$

其中 φ_m 是本征方程 $H\varphi = E\varphi$ 的正交归一解。这里约定纯态的 Wigner 函数 $f_{mm} \equiv f_m$ 。

2 Wigner 函数的基本性质

用 Wigner 函数来表示量子态的过程建立在一

种非对易且具有结合性的星乘运算之上:

$$\star \equiv \exp\left(\frac{i\hbar \vec{\partial}_x \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_x}{2}\right), \quad (2)$$

这种新的运算法则是 Hilbert 空间中算符之间乘积在相空间的对应。结合平移算符的性质 $\exp(a\partial_x) \cdot h(x) = h(x+a)$ 可以得到:

$$\begin{aligned} f(x, p) \star g(x, p) &= \\ f\left(x, p - \frac{i\hbar \vec{\partial}_x}{2}\right) g\left(x, p + \frac{i\hbar \vec{\partial}_x}{2}\right) &= \\ f\left(x + \frac{i\hbar \vec{\partial}_p}{2}, p - \frac{i\hbar \vec{\partial}_x}{2}\right) g(x, p), \end{aligned} \quad (3)$$

同时星乘也决定了相空间迹的性质^[3],

$$\int dp dx f \star g = \int dp dx fg = \int dp dx g \star f. \quad (4)$$

这样密度矩阵的性质可以在相空间中被重新表述, 例如文献^[3]中,

$$\int dx dp f_{mn}(x, p) = \delta_{mn}, \quad (5)$$

$$f_{mn} \star f_{kl} = \frac{1}{2\pi\hbar} \delta_{ml} f_{kn}, \quad (6)$$

$$\int dx dp f_{mn}(x, p) f_{ik}^*(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \delta_{ml} \delta_{nk}, \quad (7)$$

所以一个任意的相空间函数 $\phi(x, p)$ 可以被展开成

* 收稿日期: 2010-04-25; 修改日期: 2010-05-20

作者简介: 徐皓(1988—), 男(汉族), 江苏徐州人, 本科, 从事物理学基础研究; E-mail: nwuxuhao@126.com

如下形式:

$$\phi(x, p) = \sum_{m, n} c_{mn} f_{mn}(x, p), \quad (8)$$

系数可以利用(7)式求得

$$c_{mn} = 2\pi\hbar \int dx dp f_{mn}^*(x, p) \phi(x, p), \quad (9)$$

而哈密顿量为 $\mathcal{H}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$, 本征值为 E_n 的本征方程所对应的 Wigner 函数满足下述方程^[3]:

$$H \star f_{mn} = E_n f_{mn}, \quad f_{mn} \star H = E_m f_{mn}. \quad (10)$$

3 相空间定态微扰理论

定态微扰方法一般在 Hilbert 空间中应用, 但是由于 Moyal 形式的相空间量子力学和 Hilbert 空间量子力学的等效性, 在相空间中同样可以独立地计算出体系 Wigner 函数和能级的各级微扰。相应过程和 Hilbert 空间中的计算过程类似, 首先将系统的哈密顿量分成自由的和所受到微扰的部分:

$$H = H_0 + \lambda H_1. \quad (11)$$

然后利用 Wigner 函数的基本性质可以得到体系能量的一级微扰修正为^[3]

$$E_n^1 = \iint dx dp H_1 f_n^0, \quad (12)$$

其中 f_n^0 为不存在微扰时体系纯态的 Wigner 函数。体系 Wigner 函数的一级微扰修正为^[3]:

$$f_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{1}{E_n^0 - E_m^0} [f_{nm}^0 (\int dx dp H_1 \star f_{nm}^0) + f_{mn}^0 (\int dx dp H_1 \star f_{nm}^0)], \quad (13)$$

其中 E_n^0 为不存在微扰时, 体系第 n 个能级的能量本征值。体系 Wigner 函数的二级微扰修正为^[3]:

$$E_n^2 = \sum_{l \neq n} \frac{\int dx dp H_1 f_{ln}^0 \cdot \int dx dp H_1 f_{nl}^0}{E_n^0 - E_l^0}. \quad (14)$$

4 Wigner 函数的应用

4.1 一维无限深势阱的 Wigner 函数

由于许多实际问题都可以简化为一维无限深势阱进行处理(例如:有机染料分子(多烯烃)是线性分子, 电子在整个分子里运动是自由的, 在通常条件下是不能运动到分子之外的, 所以可认为电子在一

维无限深势阱中运动), 而且在 Hilbert 空间研究体系发现了能量是分立谱、基态能量不为零这些经典物理无法解释的现象, 这都表明一维无限深势阱在理论研究中有着重要的意义。下面将在相空间研究粒子在一维无限深势阱中的运动。首先要推导出的一维无限深势阱在相空间所对应的 Wigner 函数。

设质量为 m 的粒子在下述势场中运动:

$$V_0 = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq l \\ \infty, & x > l \end{cases} \quad (15)$$

其相应 Hilbert 空间本征方程的解为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ (形式 1)} \\ c \left[\exp\left(i \frac{n\pi}{l} x\right) - \exp\left(-i \frac{n\pi}{l} x\right) \right], & 0 \leq x \leq l \text{ (形式 2)} \\ 0, & x > l \text{ (形式 3)} \end{cases}, \quad (16)$$

其中

$$c = \frac{1}{i\sqrt{2l}}.$$

由此可见波函数由于位置坐标 x 的区间的不同而被划分为 3 段, 即:形式 1, 2 和 3, 可以判定(1)式中 Wigner 函数中被积函数有 9 种不同的组合。用 $M-N$ ($M, N=1, 2, 3$) 来表示每一种不同的组合, 其中 M 和 N 分别代表 $\varphi_n[(x-(y/2))]$ 和 $\varphi_m^*[(x-(y/2))]$, 对于固定的 x 值, 被积函数由一种组合过渡到另一种组合的临界点由下列方程组决定^[4]:

$$x \pm \frac{y}{2} = 0, \quad x \pm \frac{y}{2} = l. \quad (17)$$

上述方程的解所对应的 4 个点为 $y = \pm x$, $y = \pm 2(x-l)$, 所以将(1)式关于 y 的积分分为 5 段, 将其从小到大用 a, b, c, d, e 来表示。这样就可以确定(1)式中的积分限和被积函数, 具体方法如下:将 $y = \pm x$, $y = \pm 2(x-l)$ 4 个点排序, 当 $x < 0$ 时 $2(x-l) < 2x < -2x < 2(l-x)$, 此时关于 y 的积分区域被划分为: $(-\infty, 2(x-l)]$, $(2(x-l), 2x]$, $(2x, -2x]$, $(-2x, 2(l-x)]$, $(2(l-x), +\infty)$; 当 $x < 0$, $-\infty < y \leq 2(x-l)$ 时, 由线性规划的知识可知 $x - y/2 \geq l$, $x + y/2 \leq -l$, 所以 $M=3, N=1$ 。同理可得其他积分限所对应的被积函数。

所有 4 种不同的排序方式不同区间的被积函数

的组合见表 1:

表 1 一维无限深势阱的 Wigner 函数所对应的不同积分限和被积函数

	积分限和被积函数				
	a	b	c	d	e
$x < 0$	$(-\infty, 2(x-l)]$	$(2(x-l), 2x]$	$(2x, -2x]$	$(-2x, 2(l-x)]$	$(2(l-x), \infty)$
	3-1	2-1	1-1	1-2	1-3
$0 < x < l/2$	$(-\infty, 2(x-l)]$	$(2(x-l), -2x]$	$(-2x, 2x]$	$(2x, 2(l-x)]$	$(2(l-x), \infty)$
	3-1	2-1	2-2	1-2	1-3
$l/2 < x < l$	$(-\infty, -2x]$	$(-2x, 2(x-l)]$	$(2(x-l), 2(l-x)]$	$(2(l-x), 2x]$	$(2x, \infty)$
	3-1	3-2	2-2	2-3	1-3
$x > l$	$(-\infty, -2x]$	$(-2x, 2(l-x)]$	$(2(l-x), 2(x-l)]$	$(2(x-l), 2x]$	$(2x, \infty)$
	3-1	3-2	3-3	2-3	1-3

表 1 显示将(1)式的积分分解成 20 个不同积分限、不同被积函数的和。但由于波函数的形式 1 和形式 3 都为零, 所以在这 20 个积分中只有当 $0 < x \leq l/2$, 被积函数为 2-2 型的积分 $f_{mn}^{(2)}$ 和当 $l/2$

$< x \leq l$, 被积函数为 2-2 型的积分 $f_{mn}^{(3)}$ 不为零, 下面就来计算它们的值。

$$\text{令 } \frac{p}{\hbar} = k, \quad \frac{n\pi}{l} = k_n$$

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(2)}(x, p) &= \frac{|c|^2}{\hbar} \int_{-2x}^{2x} dy \exp(iky) \left\{ \exp\left[ik_n \left(x - \frac{y}{2} \right) \right] - \exp\left[-ik_n \left(x - \frac{y}{2} \right) \right] \right\} \times \\ &\quad \left\{ \exp\left[-ik_m \left(x + \frac{y}{2} \right) \right] - \exp\left[ik_m \left(x + \frac{y}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{2}{\hbar l} \exp[ix(k_n - k_m)] \frac{\sin[x(2k - k_n - k_m)]}{2k - k_n - k_m} - \frac{2}{\hbar l} \exp[-ix(k_n + k_m)] \frac{\sin[x(2k + k_n - k_m)]}{2k + k_n - k_m} - \\ &\quad \frac{2}{\hbar l} \exp[ix(k_n + k_m)] \frac{\sin[x(2k - k_n + k_m)]}{2k - k_n + k_m} + \frac{2}{\hbar l} \exp[-ix(k_m - k_n)] \frac{\sin[x(2k + k_n + k_m)]}{2k + k_n + k_m}, \end{aligned} \quad (18)$$

将 x 换成 $(l-x)$, 即得 $f_{mn}^{(3)}$,

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(3)} &= \frac{2}{\hbar l} \exp[i(l-x)(k_n - k_m)] \frac{\sin[(l-x)(2k - k_n - k_m)]}{2k - k_n - k_m} - \frac{2}{\hbar l} \exp[-i(l-x)(k_n + k_m)] \times \\ &\quad \frac{\sin[(l-x)(2k + k_n - k_m)]}{2k + k_n - k_m} - \frac{2}{\hbar l} \exp[i(l-x)(k_n + k_m)] \frac{\sin[(l-x)(2k - k_n + k_m)]}{2k - k_n + k_m} + \\ &\quad \frac{2}{\hbar l} \exp[i(l-x)(k_m - k_n)] \frac{\sin[(l-x)(2k + k_n + k_m)]}{2k + k_n + k_m}, \end{aligned} \quad (19)$$

所以一维无限深势阱的 Wigner 函数为

$$f_{mn} = \begin{cases} f_{mn}^{(2)}, & 0 < x \leq \frac{l}{2} \\ f_{mn}^{(3)}, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases} \quad (20)$$

当 $m=n$ 时, 纯态的一维无限深势阱的 Wigner 函数为

$$\begin{aligned} f_n &= \begin{cases} \frac{2}{\hbar l} \left\{ \frac{\sin[x(2k - 2k_n)]}{2k - 2k_n} + \frac{\sin[x(2k + 2k_n)]}{2k + 2k_n} - \frac{\sin(2xk)}{k} \cos(2xk_n) \right\}, & 0 < x \leq l - 2 \\ \frac{2}{\hbar l} \left\{ \frac{\sin[(l-x)(2k - 2k_n)]}{2k - 2k_n} + \frac{\sin[(l-x)(2k + 2k_n)]}{2k + 2k_n} - \frac{\sin[2(l-x)k]}{k} \cos[2(l-x)k_n] \right\}, & \\ l/2 < x < l, \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $k = p/\hbar$, $k_n = n\pi/l$

为了进一步研究其性质, 利用 Mathematics 软

件作出了一系列纯态的一维无限深势阱的 Wigner 函数的三维图像, 如图 1 和图 2 所示。

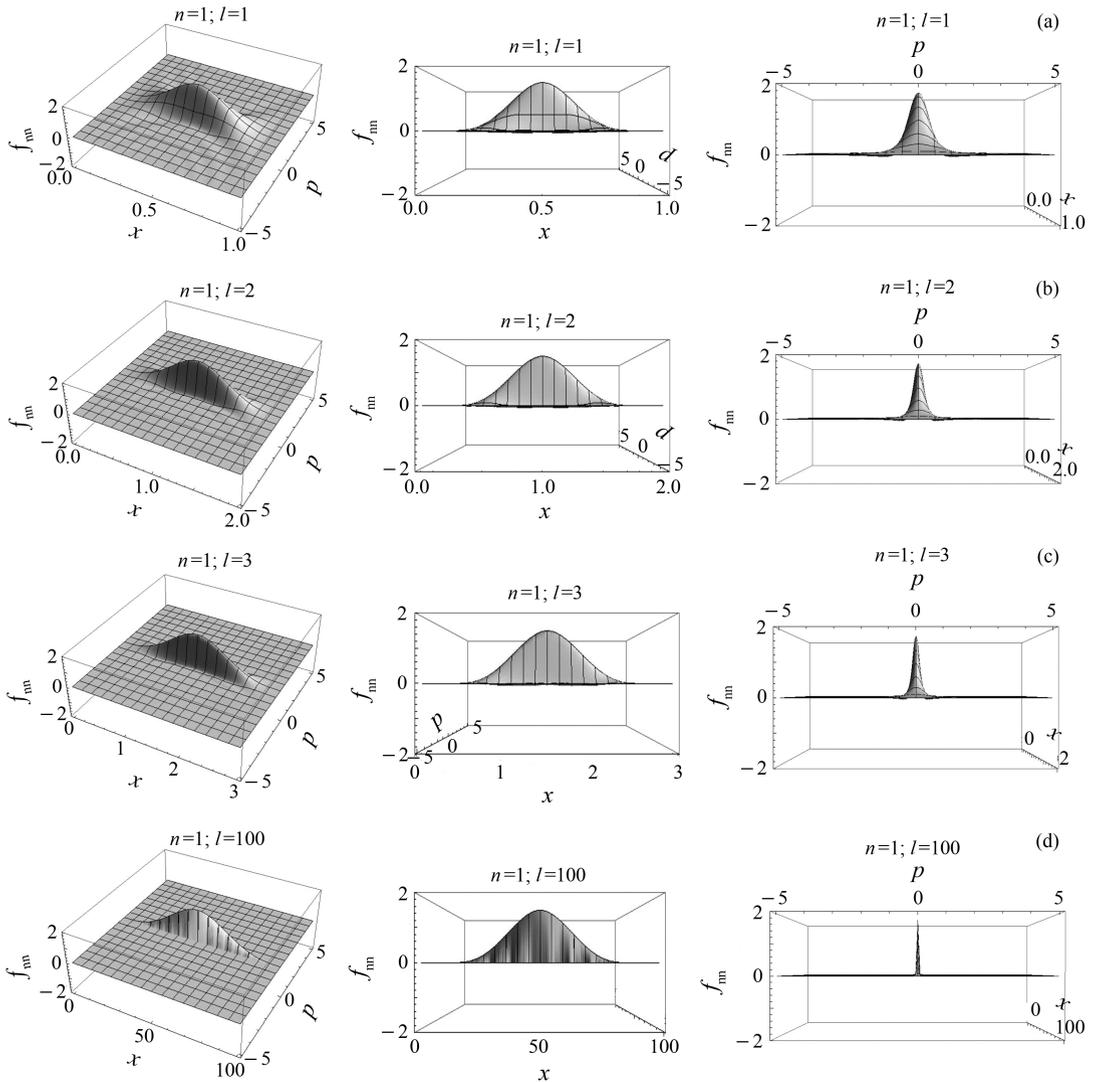


图 1 $n=1$ 时的一维无限深势阱的 Wigner 函数的三维图像

(a), (b), (c), (d) 分别代表 $l=1, 2, 3, 100$ 时的 4 种情况; 第 1 列代表 Wigner 函数的三维图像; 第 2 列代表与第 1 列相应的沿 p 轴方向的侧视图; 第 3 列代表与第 1 列相应的沿 x 轴方向的侧视图。

首先从图 1 和图 2 可以看出无论是基态还是第一激发态, 而实际上对于所有的激发态, 无限深势阱内的 Wigner 函数都有大于零的区域和小于零的区域, 而这些小于零的区域被认为是非经典行为的最显著的特性^[5]。特别是, 对于那些震荡的负区域, 它们由于干涉效应产生^[6]。在三维图中, 峰意味着在相空间内的这一点, 粒子出现的概率非常大, 而小于零的谷则表明在这一点粒子出现的概率为零^[7]。当 $n=1$ 时, 出现 1 个峰; 当 $n=2$ 时, 出现 2 个峰, 这与实空间一维无限深势阱中粒子位置概率分布中

的峰值数相符。而且对于 n 确定的情况下, 峰的相对位置和数值大小与势阱的宽度 l 无关, 这也与实空间中位置概率分布相符。由图 1 和图 2 的第 3 列可以观察到相空间的压缩效应: 当势阱宽度 l 逐渐变大时, 在相空间中所有的峰在动量方向上被压缩, 而且 l 值越大, 压缩的程度就越大。这种效应可以理解为: 当势阱宽度逐渐增加时, 粒子坐标的不确定度逐渐增加, 由不确定性关系可知动量的不确定度将逐渐减小, 在相空间表现为 Wigner 函数被压缩。这些都表明利用相空间和实空间来解决问

题的等效性。

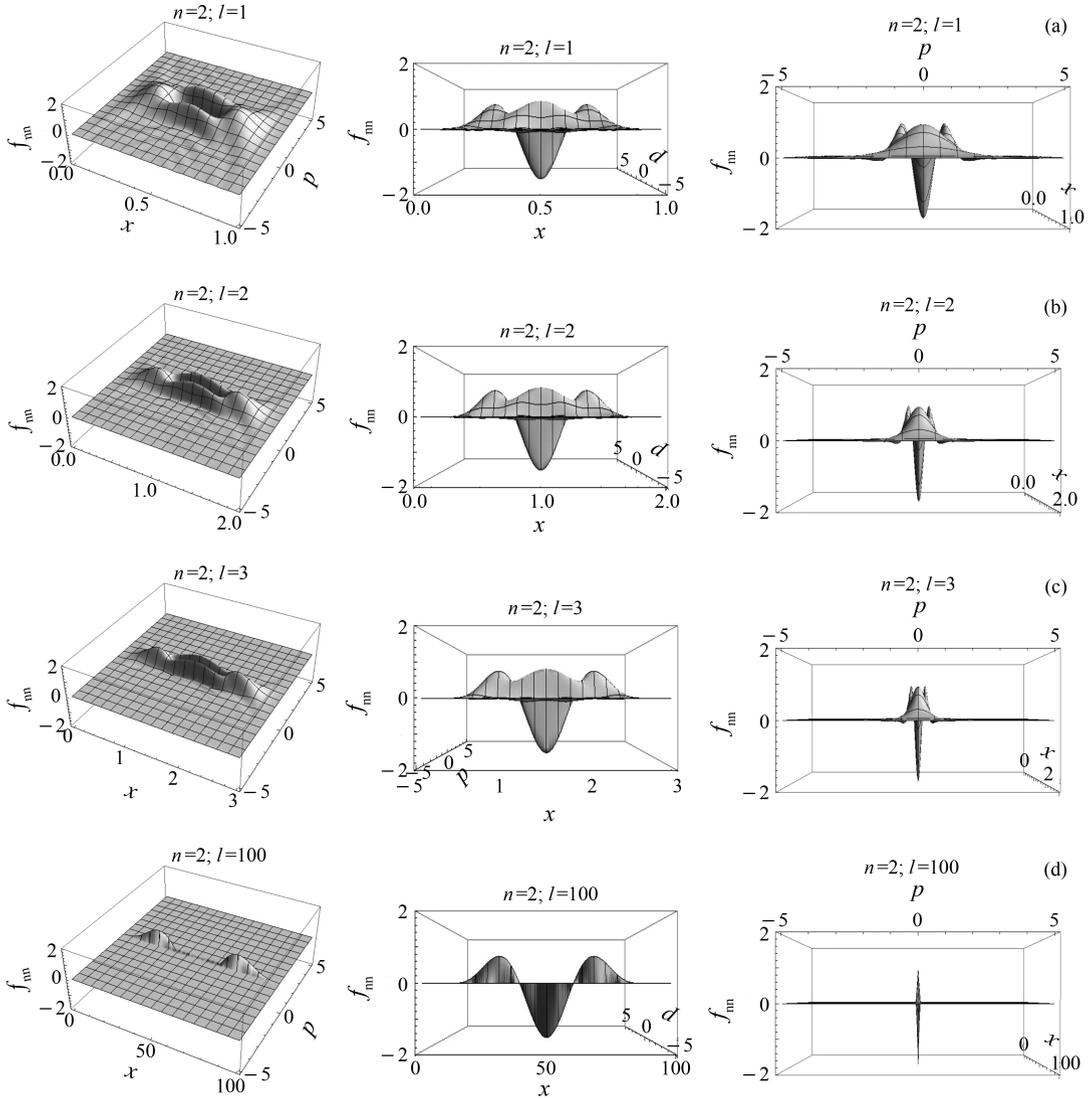


图 2 $n=2$ 时的一维无限深势阱的 Wigner 函数的三维图像

(a), (b), (c), (d) 分别代表 $l=1, 2, 3, 100$ 时的 4 种情况; 第 1 列代表 Wigner 函数的三维图像; 第 2 列代表与第 1 列相应的沿 p 轴方向的侧视图; 第 3 列代表与第 1 列相应的沿 x 轴方向的侧视图。

4.2 一维无限深势阱的能量微扰修正

如果将一维无限深势阱放入一常电场中, 其能级结构必定发生改变, 下面将用相空间微扰理论来研究其能级的变化。考虑微扰哈密顿量 $H_1 = x$, 则由式(12)可以得到能量的一级微扰修正:

$$E_n^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_0^{l/2} dx \frac{2}{hl} \left\{ \frac{\sin [x(2p/\hbar - 2n\pi/l)]}{2p/\hbar - 2n\pi/l} + \frac{\sin [x(2p/\hbar + 2n\pi/l)]}{2p/\hbar + 2n\pi/l} - \frac{\sin(2xp/\hbar)}{p/\hbar} \cos(2xn\pi/l) \right\} x +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{l/2}^l dx \frac{2}{hl} \left\{ \frac{\sin [(l-x)(2p/\hbar - 2n\pi/l)]}{2p/\hbar - 2n\pi/l} + \frac{\sin [(l-x)(2p/\hbar + 2n\pi/l)]}{2p/\hbar + 2n\pi/l} - \frac{\sin [2(l-x)p/\hbar]}{p/\hbar} \cos [2(l-x)n\pi/l] \right\} x = \frac{l}{2}, \quad (22)$$

上式表明, 所有能级都整体上移了 $l/2$ 。而应用实空间的微扰理论可以得到:

$$E_n^1 = \int_0^l (\sqrt{2/l} \sin \frac{n\pi}{l} x)^2 x dx = l/2, \quad (23)$$

可见应用微扰理论在两种空间得到的能级的一级微扰相同。

4.3 相空间一维线性谐振子的能量微扰修正

一维线性谐振子的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2). \quad (24)$$

为了简化起见, 令 $m=1$ 和 $\omega=1$, 如果令 $\hbar=1$, 那么关于其本征方程的能量本征值

$$E_n = n + \frac{1}{2} \quad (25)$$

而一维谐振子的 Wigner 函数为^[3]

$$f_{mn}(x, p) = \frac{(-1)^m}{\pi} \sqrt{\frac{m!}{n!}} z^{\frac{n-m}{2}} e^{-z/2} e^{i(n-m)\theta} L_m^{\frac{n-m}{2}}(z), \quad (26)$$

其中 $\theta = \arctan(p/x)$, $z = 2(x^2 + p^2)$ 。所以在相空间中一维线性谐振子的哈密顿量可以被表示为

$$H = \frac{1}{2}(x - ip) \star (x + ip) + \frac{1}{2}, \quad (27)$$

这里定义

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip), \quad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip),$$

所以 $a \star a^\dagger - a^\dagger \star a = 1$ 。 (28)

利用(3)式, 经简单计算后得

$$a \star f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip) \exp[-(x^2 + p^2)] = 0. \quad (29)$$

这样便在相空间中提供了一个真空态, 而 a 和 a^\dagger 则类似于实空间的湮灭算符和产生算符, 仿照实空间的证明方法, 可以得到下述关系:

$$\begin{cases} a \star f_m = \sqrt{n} f_{m, n-1}, \\ a^\dagger \star f_m = \sqrt{n+1} f_{m, n+1}, \\ f_{mn} \star a = \sqrt{m+1} f_{m+1, n}, \\ f_{mn} \star a^\dagger = \sqrt{m} f_{m-1, n}. \end{cases} \quad (30)$$

假设谐振子体系处于微扰 $H_1 = \lambda x^2/2$ 时, 其中 $|\lambda| \ll 1$

此时 $H_1 = \frac{\lambda}{4}(a + a^\dagger) \star (a + a^\dagger)$ 。 (31)

由(12)式可知一维线性谐振子能量的一级修正

$$\begin{aligned} E_n^1 &= \iint dx dp \frac{\lambda}{4} (a + a^\dagger) \star (a + a^\dagger) \star f_n^0 \\ &= \frac{\lambda}{4} \iint dx dp (a + a^\dagger) \star (\sqrt{n} f_{n-1}^0 + \sqrt{n+1} f_{n+1}^0) \\ &= \frac{\lambda}{4} \iint dx dp (\sqrt{n(n-1)} f_{n-2}^0 + \\ &\quad \sqrt{(n+1)(n+1)} f_{nn}^0 + \sqrt{nn} f_{nn}^0 + \\ &\quad \sqrt{(n+2)(n+1)} f_{n+2}^0) \\ &= \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

由(13)式一维线性谐振子 Wigner 函数的一级修正

$$\begin{aligned} f_n^1 &= \sum_{m \neq n} \frac{1}{E_n^0 - E_m^0} \left[f_{nm}^0 \left(\iint dx dp H_1 \star f_{nm}^0 \right) + \right. \\ &\quad \left. f_{mn}^0 \left(\iint dx dp H_1 \star f_{nm}^0 \right) \right] \\ &= \frac{\lambda}{8} \left[\sqrt{n(n-1)} (f_{n, n-2}^0 + f_{n-2, n}^0) - \right. \\ &\quad \left. \sqrt{(n+1)(n+2)} (f_{n, n+2}^0 + f_{n+2, n}^0) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

而由(14)式可知一维线性谐振子能级的二级修正

$$\begin{aligned} E_n^2 &= \sum_{l \neq n} \frac{\iint dx dp H_1 f_{ln}^0 \cdot \iint dx dp H_1 f_{nl}^0}{E_n^0 - E_l^0} \\ &= \left(\frac{\lambda}{4} \right)^2 \sum_{l \neq n} \frac{1}{E_n^0 - E_l^0} \iint dx dp (a + a^\dagger) \star \\ &\quad (a + a^\dagger) \star f_{ln}^0 \cdot \iint dx dp (a + a^\dagger) \\ &\quad \star (a + a^\dagger) \star f_{nl}^0 = -\frac{\lambda^2}{8} \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

然而实际上加此微扰的谐振子仍可以精确求解,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \frac{1}{2}\lambda x^2 \\ &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(1 + \lambda)x^2. \end{aligned} \quad (35)$$

上式与(24)式的主要差别在 $\omega' = \sqrt{1 + \lambda}\omega$, 所以能量本征值

$$\begin{aligned} E_n &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega' = \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \lambda} \hbar \omega \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \lambda}, \end{aligned} \quad (36)$$

因为 $|\lambda| \ll 1$, 将 $\sqrt{1 + \lambda}$ 作二项式展开, 得:

$$\begin{aligned}
 E_n &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \lambda} \\
 &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{8} + \dots \right), \quad (37)
 \end{aligned}$$

可见, (32)和(34)式得到的结果和相空间微扰论得到的结果一致。

5 结论

本文主要介绍了 Wigner 函数的性质以及相空间微扰理论; 根据 Wigner 函数的定义, 推导出了一维无限深势阱所对应的 Wigner 函数; 发现了一种存在于纯态 Wigner 函数中可以用不确定性关系解释的压缩效应; 利用相空间微扰理论计算了一维无限深势阱和一维谐振子在微扰的作用下, 相应 Wigner 函数和能级的修正, 其结果和 Hilbert 空间

所得结果一致。

参考文献 (References):

- [1] Hillery M, Conell R O, Scully M, *et al.* Phys Repts, 1984, **106**: 121; Lee H W. Bid, 1995, **259**: 147; Balasz N, Jennings B. Phys Repts, 1984, **104**: 347; Curtright T, Fairlie D, Zachos C, Phys Lett, 1995, **B405**: 37.
- [2] Moyal J, Proc Camb Phil Soc, 1949, **45**: 99.
- [3] Curtright T, Uematsu T, Zachos C. arXiv: hep-th/0011137, 2001.
- [4] Muga J G, Saga R, Brouard S. Solid State Communications, 1995, **94**(10): 877.
- [5] Usenko C V. arXiv: quant-ph/0406238, 2004.
- [6] Kenfack A, Zyczkowski K. arXiv: quant-ph/0406015, 2004.
- [7] Kandemir B S. Phys Lett, 1998, **A245**: 209.

Qualities of Wigner Function and Its Applications to One-dimensional Infinite Potential Well and One-dimensional Harmonic Oscillator^{*}

XU Hao¹⁾, SHI Tian-jun

(Department of Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: In this article, the qualities of Wigner function and the corresponding stationary perturbation theory are introduced and applied to one-dimensional infinite potential well and one-dimensional harmonic oscillator, and then the particular Wigner function of one-dimensional infinite potential well is specified and a special constriction effect in its pure state Wigner function is discovered, to which, simultaneously, a detailed and reasonable explanation is elaborated from the perspective of uncertainty principle. Ultimately, the amendment of Wigner function and energy of one-dimensional infinite potential well and one-dimensional harmonic oscillator under perturbation are calculated according to stationary phase space perturbation theory.

Key words: one-dimensional infinite potential well; phase space; Wigner function; perturbation; one-dimensional harmonic oscillator