

文章编号: 1007-4627(2011)01-0130-05

# 时空中子倍增公式解法研究\*

郝建立, 陈文振, 王少明

(海军工程大学核能科学与工程系, 湖北 武汉 430033)

**摘要:** 通过将空间概念引入中子倍增公式, 建立了时空中子倍增公式, 针对时空中子倍增公式计算时间效率过低的缺点, 对时空倍增公式的计算方法进行了研究, 新解法在保证精确性的基础上, 又提高了计算效率。新的计算方法可以应用于研究反应堆反应性发生动态变化的情况, 例如反应堆启堆或停堆以及变功率运行的过程, 对具有很强机动性要求的小型反应堆的安全分析有一定的理论意义和实用价值。

**关键词:** 中子倍增; 中子密度; 增殖系数

**中图分类号:** TL329 **文献标识码:** A

## 1 引言

在给定初始中子密度以及增殖因子随时间变化后, 中子倍增公式可以严格地描述中子密度随时间的变化, 为反应堆内中子密度测量以及数值计算提供评价误差的标准<sup>[1]</sup>。但是其没有考虑空间变量。文献[2]在描述中子按代增殖的时间离散的过程中, 考虑到中子输运过程的空间连续性, 通过把空间概念引入中子倍增公式, 建立了时空中子倍增公式。但是和时空中子动力学方程一样, 时空中子倍增公式在计算时同样存在着时空耦合的问题<sup>[3]</sup>。和时空中子动力学方程不同的是, 时空中子倍增公式是通过上一代的中子密度的分布和缓发先驱核浓度的分布以及中子增殖系数空间分布变化来确定下一代中子密度以及缓发中子先驱核浓度分布的。在每代的计算中, 都要求解整个反应堆区域中的中子密度的散度分布, 并且由于瞬发中子代时间很短, 导致其时间效率很低。为了在保证精确性的基础上提高时空中子倍增公式的计算效率, 需要对时空中子倍增公式的解法进行研究。

## 2 时空中子倍增公式简介

在中子按代增殖的时间离散过程中, 考虑到中子输运过程的空间连续性, 通过把空间概念引入中子倍增公式, 建立了时空中子倍增公式, 该公式刻画出中子增殖的物理过程。由中子倍增理论可知两代之间的时间内中子密度的变化主要是由于中子扩散引起的, 并且由于中子一代时间很短, 故假设中子扩散速率在一代时间内是不变的。设一代时间内从  $dV$  内泄漏出的中子数  $Dlv \nabla^2 n_{m-1}(\mathbf{r})$ , 在反应堆内某一点附近区域  $dV$  内第  $m$  代这一代时间  $l$  内增殖因数为  $k_m$ , 第  $m-1$  代中子密度为  $n_{m-1}(\mathbf{r})$ , 第  $m-1$  代第  $j$  组缓发中子先驱核浓度为  $c_{j(m-1)}(\mathbf{r})$ 。由于泄漏出去的中子不再对  $dV$  内中子的增殖作贡献, 且由于  $dV$  区域邻域内中子倍增过程跟  $dV$  内中子倍增过程在时间上是同步的, 泄漏来的中子也在  $dV$  内一代末时发生增殖, 故泄漏来的中子应对  $dV$  内下一代中子的增殖作贡献, 于是  $m-1$  代的中子对  $dV$  内  $m$  代中子的增殖的贡献为  $(n_{m-1}(\mathbf{r}) + Dlv \nabla^2 n_{m-1}(\mathbf{r}))k_m$ , 得时空中子倍增公式<sup>[2]</sup>:

$$\begin{cases} n_m(\mathbf{r}) = [n_{m-1}(\mathbf{r}) + Dlv \nabla^2 n_{m-1}(\mathbf{r})]k_m(1 - \beta) + S_m + \sum_{j=1}^S c_{j(m-1)}(\mathbf{r})(1 - e^{-\lambda_j l}), \\ c_{jm}(\mathbf{r}) = (n_{m-1}(\mathbf{r}) + Dlv \nabla^2 n_{m-1}(\mathbf{r}))k_m\beta_j + c_{j(m-1)}(\mathbf{r})e^{-\lambda_j l}, \end{cases} \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2010-05-05; 修改日期: 2010-06-09

\* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10575131)

作者简介: 郝建立(1987—), 男(汉族), 河南周口人, 博士研究生, 从事反应堆安全分析研究; E-mail: hao\_jian\_li@126.com

式中,  $S_m$  为中子源在一代时间内对 neutron 密度的贡献,  $\beta$  为缓发中子总份额,  $\lambda_j$  为第  $j$  组缓发中子先驱核的衰变常数,  $\beta_j$  为第  $j$  组缓发中子份额。

### 3 时空中子倍增公式解法研究

对时空中子倍增公式来说, 如果能找到每代之间中子密度散度分布的共性问题, 可以极大地减少

运算量, 因此本文以均匀堆为研究对象, 尝试寻找其共性。

假设均匀反应堆开始处于一定功率稳定运行状态, 因此堆内中子密度及先驱核浓度不发生变化, 由于反应堆为均匀反应堆, 故不考虑增殖因子的空间分布问题。由公式(1)得此时中子密度及缓发中子先驱核浓度应满足:

$$\begin{cases} n_0(\mathbf{r}) = [n_0(\mathbf{r}) + Dlv \nabla^2 n_0(\mathbf{r})] k_0 (1 - \beta) + S_0 + \sum_{j=1}^S c_{j0}(\mathbf{r}) (1 - e^{-\lambda_j t}), \\ c_{j0}(\mathbf{r}) = [n_0(\mathbf{r}) + Dlv \nabla^2 n_{m-1}(\mathbf{r})] k_0 \beta_j + c_{j0}(\mathbf{r}) e^{-\lambda_j t}, \end{cases} \quad (2a)$$

$$c_{j0}(\mathbf{r}) = [n_0(\mathbf{r}) + Dlv \nabla^2 n_{m-1}(\mathbf{r})] k_0 \beta_j + c_{j0}(\mathbf{r}) e^{-\lambda_j t}, \quad (2b)$$

将公式(2b)经过整理后代入(2a)式得堆内初始中子密度满足的方程为

$$\nabla^2 n_0(\mathbf{r}) + \frac{1 - 1/k_0}{Dlv} n_0(\mathbf{r}) + \frac{S_0}{k_0 Dlv} = 0. \quad (3)$$

将公式(3)代入(2b)式得缓发中子先驱核浓度的表达式为

$$c_{j0}(\mathbf{r}) = \frac{[n_0(\mathbf{r}) - S] \beta_j}{1 - e^{-\lambda_j t}} = C_{j0} n_0(\mathbf{r}) + Q_{j0}, \quad (4)$$

式中  $C_{j0} = \frac{\beta_j}{(1 - e^{-\lambda_j t})}$ ,  $Q_{j0} = \frac{-\beta_j S_0}{C_1 - e^{-\lambda_j t}} = \frac{-\beta_j S_0}{\lambda_j t}$ , 应指出  $\lambda_j t$  是一小量, 故可对  $Q_{j0}$  简化。

初始中子密度的分布可以由公式(3)结合具体反应堆的边界条件求出。反应堆在稳定运行状态时, 事故发生的几率很低, 而事故一般发生在反应性或增殖因子发生变化的过程中, 因此研究反应性发生动态变化的过程中中子密度、反应堆功率等参数的变化具有十分重要的意义。假设稳定运行的反应堆在  $t = t_0$  时由于掉棒等事故而引起反应性发生动态变化。将公式(3)代入公式(1)得反应堆第一代时中子密度及缓发中子先驱核浓度的分布:

$$\begin{cases} n_1(\mathbf{r}) = n_0(\mathbf{r}) \left[ \frac{k_1(1-\beta)}{k_0} + \beta \right] + S_1 + \left[ \frac{-k_1(1-\beta)}{k_0} - \beta \right] S_0 = N_1 n_0(\mathbf{r}) + P_1, \\ c_{j1}(\mathbf{r}) = n_0(\mathbf{r}) \left( e^{-\lambda_j t} C_{j0} + \frac{k_1 \beta_j}{k_0} \right) + e^{-\lambda_j t} Q_{j0} - \frac{k_1 \beta_j}{k_0 S_0} = C_{j1} n_0(\mathbf{r}) + Q_{j1}, \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$N_1 = \frac{k_1(1-\beta)}{k_0} + \beta, \quad C_{j1} = C_{j0} e^{-\lambda_j t} + \frac{k_1 \beta_j}{k_0},$$

$$P_1 = -k_1(1-\beta) \frac{S_0}{k_0} - \beta S_0 + S_1, \quad Q_{j1} = Q_{j0} e^{-\lambda_j t} - \frac{k_1 \beta_j}{k_0 S_0}.$$

将公式(5)代入公式(1)得反应堆第二代中子密度及缓发中子先驱核浓度的分布:

$$\begin{cases} n_2(\mathbf{r}) = \left[ \frac{N_1 k_2(1-\beta)}{k_0} + \sum_{j=1}^S C_{j1} (1 - e^{-\lambda_j t}) \right] n_0(\mathbf{r}) + \left[ -N_1 k_2(1-\beta) \frac{S_0}{k_0} + P_1 k_2(1-\beta) + S_2 + \sum_{j=1}^S Q_{j1} (1 - e^{-\lambda_j t}) \right] = N_2 n_0(\mathbf{r}) + P_2 S, \\ c_{j2}(\mathbf{r}) = \left[ C_{j1} e^{-\lambda_j t} + \frac{N_1 k_2 \beta_j}{k_0} \right] n_0(\mathbf{r}) + \left[ Q_{j1} e^{-\lambda_j t} - \frac{N_1 k_2 \beta_j S_0}{k_0} + P_1 k_2 \beta_j \right] = C_{j2} n_0(\mathbf{r}) + Q_{j2}, \end{cases} \quad (6)$$

式中

$$N_2 = \frac{N_1 k_2(1-\beta)}{k_0} + \sum_{j=1}^S C_{j1} (1 - e^{-\lambda_j t}),$$

$$C_{j2} = C_{j1} e^{-\lambda_j t} + \frac{N_1 k_2 \beta_j}{k_0},$$

$$P_2 = \left( P_1 - \frac{N_1 S_0}{k_0} \right) k_2 (1 - \beta) + S_2 + \sum_{j=1}^S Q_{j1} \lambda_j t,$$

$$Q_{j2} = Q_{j1} e^{-\lambda_j t} - \frac{N_1 k_2 \beta_j S_0}{k_0} + P_1 k_2 \beta_j.$$

采用数学归纳法, 假设第  $m$  代中子密度及缓发中子先驱核浓度跟第  $m - 1$  代的关系为

$$\left\{ \begin{array}{l} n_m(\mathbf{r}) = N_m n_0(\mathbf{r}) + P_m = \left[ \frac{N_{m-1} k_m (1 - \beta)}{k_0} + \sum_{j=1}^S C_{j(m-1)} (1 - e^{-\lambda_j t}) \right] n_0(\mathbf{r}) + \\ \quad \left[ - \left( \frac{N_{m-1} S_0}{k_0} - P_{m-1} \right) k_m (1 - \beta) + S_m + \sum_{j=1}^S Q_{j(m-1)} (1 - e^{-\lambda_j t}) \right], \\ c_{jm}(\mathbf{r}) = C_{jm} n_0(\mathbf{r}) + Q_{jm} = \left[ C_{j(m-1)} e^{-\lambda_j t} + \frac{N_{m-1} k_m \beta_j}{k_0} \right] n_0(\mathbf{r}) + \\ \quad \left[ Q_{j(m-1)} e^{-\lambda_j t} - \frac{N_{m-1} S_0 k_m \beta_j}{k_0} + P_{m-1} k_m \beta_j \right] \end{array} \right., \quad (7)$$

式中

$$C_{jm} = C_{j(m-1)} e^{-\lambda_j t} + \frac{N_{m-1} k_m \beta_j}{k_0},$$

$$N_m = \frac{N_{m-1} k_m (1 - \beta)}{k_0} + \sum_{j=1}^S C_{j(m-1)} (1 - e^{-\lambda_j t}),$$

$$P_m = \left( P_{m-1} - \frac{N_{m-1} S_0}{k_0} \right) k_m (1 - \beta) + S_m + \sum_{j=1}^S Q_{j(m-1)} (1 - e^{-\lambda_j t}),$$

$$Q_{jm} = Q_{j(m-1)} e^{-\lambda_j t} - \frac{N_{m-1} k_m \beta_j S_0}{k_0} + P_{m-1} k_m \beta_j.$$

将第  $m$  代中子密度及缓发中子先驱核浓度代入公式(1)中得:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{m+1}(\mathbf{r}) = \left[ \frac{N_m k_{m+1} (1 - \beta)}{k_0} + \sum_{j=1}^S C_{jm} (1 - e^{-\lambda_j t}) \right] n_0(\mathbf{r}) + \left[ \left( P_m - \frac{N_m S_0}{k_0} \right) k_{m+1} (1 - \beta) + \right. \\ \quad \left. S_{m+1} + \sum_{j=1}^S Q_{jm} (1 - e^{-\lambda_j t}) \right] = N_{m+1} n_0(\mathbf{r}) + P_{m+1}, \\ c_{j(m+1)}(\mathbf{r}) = \left[ C_{jm} e^{-\lambda_j t} + \frac{N_m k_{m+1} \beta_j}{k_0} \right] n_0(\mathbf{r}) + \left[ Q_{jm} e^{-\lambda_j t} - \frac{N_m k_{m+1} S_0 \beta_j}{k_0} + P_m k_{m+1} \beta_j \right] \\ \quad = C_{j(m+1)} n_0(\mathbf{r}) + Q_{j(m+1)}, \end{array} \right. \quad (8)$$

式中

$$C_{j(m+1)} = C_{jm} e^{-\lambda_j t} + \frac{N_m k_{m+1} \beta_j}{k_0},$$

$$N_{m+1} = N_m k_{m+1} \frac{(1 - \beta)}{k_0} + \sum_{j=1}^S C_{jm} (1 - e^{-\lambda_j t}),$$

$$P_{m+1} = \left( P_m - \frac{N_m S_0}{k_0} \right) k_{m+1} (1 - \beta) +$$

$$S_{m+1} + \sum_{j=1}^S Q_{jm} (1 - e^{-\lambda_j t}),$$

$$Q_{j(m+1)} = Q_{jm} e^{-\lambda_j t} - \frac{N_m k_{m+1} S_0 \beta_j}{k_0} + P_m k_{m+1} \beta_j.$$

第  $m + 1$  代中子密度及缓发中子先驱核浓度与第  $m$  代的关系和假设的关系相同, 又因为第 2 代中子密度及缓发中子先驱核浓度与第 1 代的关系也满足假设的关系式, 根据数学归纳法得, 公式(7)的假设是正确的。所以公式(7)为在稳定运行的反应堆中反应性变化后反应堆中子密度代与代之间的关系式。公式(7)在计算反应堆中子密度按代增殖时

只需计算中子密度等一些幅函数按代增殖变化, 计算效率明显比通过公式(1)计算的要高, 并且公式(7)也可以精确地描述稳定运行状态的均匀反应堆反应性发生变化时中子密度(功率)的变化。公式(7)与时空中子动力学方程的近似解析解不同, 公式(7)在处理时空耦合的问题时不是简单地进行时空分离的假设, 而是由反应堆的均匀假设以及其所处的运行状态所决定的。

公式(7)中的增殖因子可以受反应堆内温度负反馈的影响而变化, 可以用来研究反应堆启堆和变功率运行过程仿真研究, 这对小型反应堆的机动性有很重要的理论意义和实用价值。

## 4 时空中子倍增公式解法的应用

为了检验本文所推导公式的正确性, 对反应堆冷启动过程进行模拟计算。反应堆冷启动初始时刻中子密度和缓发中子先驱核浓度可以近似为 0, 假设中子源分布均匀, 给定参数  $\lambda_j$  和  $\beta_j$  同文献[5]中的数据。  $l=10^{-4}$  s, 取中子源每代放出中子密度为  $S=10^4$  ( $\text{m}^{-3}$ ), 公式(7)可以简化为

$$\begin{cases} n_m(\mathbf{r}) = P_m = P_{m-1} k_m (1 - \beta) + S + \\ \sum_{j=1}^S Q_{j(m-1)} (1 - e^{-\lambda_j t}), \\ c_{jm}(\mathbf{r}) = Q_{jm} = Q_{j(m-1)} e^{-\lambda_j t} + P_{m-1} k_m \beta_j. \end{cases} \quad (9)$$

采用步进提棒, 计算结果如图 1 中实线, 该结果和文献[5]的一致。虚线为点堆方程通过数值解法得到的结果。由图可以看出, 采用公式(9)所得到的结果和点堆数值解法所得到的结果比较符合, 特别是在第三次提棒阶段几乎吻合, 但是在第一次和第四次提棒时相差较大, 第一次提棒时差别较大的原因是, 第一次提棒时反应堆距离平衡态很远, 利用点堆方程计算有较大的误差; 点堆方程是基于反应堆内达到平衡态推导而来, 实际上, 反应堆内中子密度并未达到平衡值, 并且越靠近缓发临界, 中子密度实际值和平衡值差别越大<sup>[6]</sup>, 所以在第四阶段提棒过程中两者差别较大。通过公式(7)研究反应堆冷启动问题具有较高的计算效率和较高的精度, 但是在应用于实际反应堆冷启动时还应考虑到温度反馈等因素的影响。该解法在精确地描述均匀反应堆反应性发生变化时中子密度(功率)变化的基础上, 提高了计算的时间效率, 其结果可以为反应

堆安全分析提供理论依据。

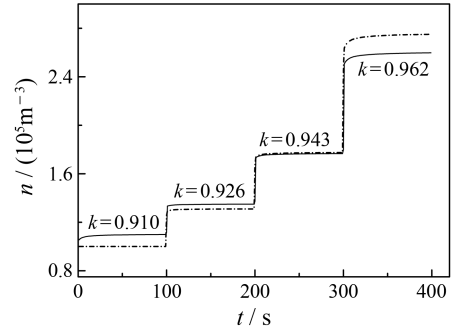


图 1 中子密度随时间的变化

## 5 结论

本文主要对时空中子倍增公式的应用方法进行了研究。首先计算了稳定运行的反应堆的初始中子密度以及缓发中子先驱核浓度, 然后推导出了时空中子倍增公式具体应用的形式。具体应用于反应堆冷启动问题时, 结果与文献[5]比较符合, 并与点堆方程数值解法进行对比, 分析了异同及其原因。本文得到的时空中子倍增公式的解法在保证精确性的基础上大大提高了计算效率, 其可以应用于稳定运行的反应堆反应性发生动态变化的情况, 也可以用来研究反应堆启堆或停堆以及变功率运行过程。这对具有很强机动性要求的小型反应堆的堆物理分析有很重要的理论意义和实用价值。在进一步的研究工作中, 可以通过将实际反应堆分块, 对块内参数进行均匀化处理, 在块内使用本文的解法, 综合考虑块间的泄漏等效效应后, 时空中子倍增公式可以严格地描述堆内中子密度(中子通量)的变化也即反应堆功率的变化。

## 参考文献 (References):

- [1] Wang Ziyi. Journal of Navel University of Engineering, 2008, 5: 1(in Chinese).  
(王子义. 海军工程大学学报, 2008, 5: 1.)
- [2] Hao Jianli, Wang Shaoming, Wang Ziyi. Atomic Energy Science and Technology, 2010, 44(3): 262(in Chinese).  
(郝建立, 王少明, 王子义, 等. 原子能科学技术, 2010, 44(3): 262.)
- [3] Xie Zhongsheng, Zhang Shaohong. Nuclear Reactor Theory and Method in Physics. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2000, 87-120(in Chinese).

(谢仲生, 张少泓. 核反应堆内物理理论与计算方法. 西安: 西安交通大学出版社, 2000, 87—120.)

- [4] Cai Zhangsheng, Yu Lei, Gui Xuewen. Journal of Navel University of Engineering, 2006, **18**(3): 28(in Chinese).  
(蔡章生, 桂学文, 于雷. 海军工程大学学报, 2006, **18**(3): 28.)
- [5] Cai Zhangsheng, Yu Lei, Gui Xuewen. Journal of Navel Uni-

versity of Engineering, 2004, **16**(3): 24(in Chinese).

(蔡章生, 于雷, 桂学文. 海军工程大学学报, 2004, **16**(3): 24.)

- [6] Li Haofeng, Chen Wenzhen, Zhu Qian, *et al.* Nuclear Power Engineering, 2008, **29**(6): 10 (in Chinese).  
(黎浩峰, 陈文振, 朱倩, 等. 核动力工程, 2008, **29**(6): 10.)

## Study on Solution of Space-time Neutron Multiplication Formula<sup>\*</sup>

HAO Jian-li<sup>1)</sup>, CHEN Wen-zhen, WANG Shao-ming

(Department of Nuclear Energy Science and Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

**Abstract:** The space-time neutron multiplication formula was established by introducing the concept of space-time to the neutron multiplication formula. Because of the rather long computing time by using the formula, the solution of space-time neutron multiplication formula is optimized which is efficient and accurate. The new method can be used to study the reactor with dynamic change in reactivity. It can be also used for studying the process of startup, outage and power-drawn operation, which is of great importance to the safety analysis of the mini nuclear reactor.

**Key words:** neutron multiplication; neutron density; multiplication factor

\* Received date: 5 May 2010; Revised date: 9 Jun. 2010

\* Foundation item: National Natural Science Foundation of China (10575131)

1) E-mail: hao\_jian\_li@126.com