

文章编号: 1007-4627(2009)02-0194-04

对偶超导模型 $n=90-110$ 的近似解析解*

席国柱, 贾多杰[#], 吉永林, 刘 锋

(西北师范大学物理与电子工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 研究了对偶超导模型的大 n 涡旋。基于变分原理得出了 Abelian-Higgs 模型在 $n=90-110$ 的近似涡旋解析解, 并计算了涡旋张力对 n 的依赖性。发现, 每根涡旋的张力大致随 n 线性增长。期望该解对理解 Abelian-Higgs 模型中的大量子数涡旋的墙行为具有一定价值。

关键词: 对偶超导模型; 涡旋; 大 n

中图分类号: O413.3

文献标识码: A

1 引言

近年来, 通过类比第二类超导体来解释量子色动力学(QCD)中的禁闭问题又成为量子场论中受关注的课题之一^[1, 2]。在对偶超导图像中, 人们认为, 由于磁单极子凝聚体中的对偶迈森纳效应, 色荷和夸克被禁闭在强子中^[3, 4]。基于奇异规范固定, 't Hooft 提出了对偶超导图像一个实现途径: Abelian 投射^[5], 通过从 $SU(2)$ 到 $U(1)$ 的对称破缺将规范场 Abel 化, 而规范固定的奇异性则导致磁单极。近来人们又提出可以从纯 $SU(2)$ 规范场出发来构造有效 Ginzburg-Landau 模型的思想^[6], 从而提供了一种对偶超导框架下研究 QCD 禁闭相的一种新途径。由于色荷和夸克禁闭与超导理论的重要联系, 研究 Ginzburg-Landau 方程及其简并基态是 QCD 唯像学研究的一个十分重要的课题^[7-10]。文献[7]给出了 $n=1$ 近似解析解, 文献[8-10]研究了 n 较大时的 n 重涡旋解, 猜想并数值地证明了 n 重涡旋解在大 n 极限下将变成墙涡旋, 由于算法限制, 最大的 $n=100$ 。这为口袋状孤子的形成提供了一个场论机制。为方便地研究墙涡旋, 利用能量变分法研究了 Abelian-Higgs 模型在大 n 条件下的近似涡旋解析解, 给出了解参数对 n 的具体依赖性。

2 对偶 Ginzburg-Landau 方程

对偶 Abelian-Higgs 模型的拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi), \quad (1)$$

其中, $D_\mu\phi = (\partial_\mu + igA_\mu)\phi$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ 为对偶规范场, ϕ 为 Higgs 场。此拉格朗日密度也可由规范场分解的思想得出^[11-13]。其中势 $V(\phi)$ 取墨西哥帽形:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \phi_0^2)^2, \quad (2)$$

这样, 可以得到对偶 Abelian-Higgs 模型的运动方程为

$$(\nabla^2 - 2g^2\phi^*\phi)\mathbf{A} = -ig\phi^*\vec{\nabla}\phi, \quad (3a)$$

$$(\nabla - ig\mathbf{A})^2\phi = \frac{\lambda}{2}\phi(\phi^*\phi - \phi_0^2), \quad (3b)$$

其中 $\phi^*\vec{\nabla}\phi = \phi^*(\nabla\phi) - (\nabla\phi^*)\phi$ 。

为了找到柱对称的涡旋解, 取柱坐标系 (r, θ, z) , $r^2 = x^2 + y^2$; 我们取库仑规范 $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, 在静态条件 ($A^0 = 0$) 下, 设

$$\mathbf{A}(r, \theta) = e_\theta A(r), \quad \phi(r, \theta) = \phi_0 \rho(r) e^{in\theta}, \quad (4)$$

其中

$$A(r) = \frac{n}{gr} f(r). \quad (5)$$

将(4)和(5)式代入(3)式, 同时取 $x=r/R$ 对其变量进行无量纲化, R 为涡旋的核半径, 得到方程

* 收稿日期: 2008-09-09; 修改日期: 2008-11-13

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10547009); 西北师范大学知识与科技创新工程资助项目(NWNU-KJXCXC-03-41)

作者简介: 席国柱(1981-), 男(汉族), 甘肃庆阳人, 硕士研究生, 从事量子场论及其应用研究; E-mail: xigzh2006@126.com

通讯联系人: 贾多杰, E-mail: jiadj@nwnu.edu.cn

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{df(x)}{dx} + \\ & 2g^2[1 - f(x)]\phi_0^2 \rho^2(x) = 0, \\ & \frac{d^2 \rho(x)}{dx^2} + \frac{d\rho(x)}{x dx} - \frac{n^2[1 - f(x)]^2}{x^2} \rho(x) - \\ & \frac{\lambda}{2} \rho(x)[\phi_0^2 \rho^2(x) - \phi_0^2] = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

其边界条件及磁通量子化条件为^[14]

$$\begin{aligned} f(x \rightarrow 0) & \rightarrow 0, & \rho(x \rightarrow 0) & = 0, \\ f(x \rightarrow \infty) & \rightarrow 1, & \rho(x \rightarrow \infty) & = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

由(1)式可以得到静态能量为

$$\begin{aligned} E = \int dz \int R d\theta dx & \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{n}{R^2 g} \right)^2 \frac{1}{x} f'^2(x) + \right. \\ & \left. \left(\frac{n\phi_0}{R} \right)^2 \frac{1}{x} [1 - f(x)]^2 \rho^2(x) + \right. \\ & \left. \left[\frac{\phi_0}{R^2} \rho'(x) \right]^2 x + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 [\rho^2(x) - 1]^2 x \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

则涡旋张力，即单位长度的能量为 $\sigma = \int_0^\infty \epsilon(x) dx$ ，其中

$$\begin{aligned} \epsilon(x) = 2\pi R x & \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{n}{R^2 g x} \right)^2 f'^2(x) + \right. \\ & \left. \left(\frac{n\phi_0}{R x} \right)^2 [1 - f(x)]^2 \rho^2(x) + \right. \\ & \left. \left[\frac{\phi_0}{R^2} \rho'(x) \right]^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 [\rho^2(x) - 1]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中， $f(x)$ 和 $\rho(x)$ 是未知的无量纲函数，需要由方程(6)解得。

3 方程的求解

我们考虑大量子数时的对偶 Abelian-Higgs 模型的近似涡旋解。由文献[8—10]的解析和数值论证可知，对偶 Abelian-Higgs 模型的 n 重涡旋解在大 n 极限下， $f(x)$ 和 $\rho(x)$ 趋于渐进形式 $1 - x^2$ 和阶跃函数 $\theta(x)$ 。因此，我们提出，方程(6)，也即变分问题(9)的解($f(x)$ 和 $\rho(x)$)，在 $n=100$ 左右将取如下尝试解的形式：

$$\begin{aligned} f(x) & = 1 - \frac{e^{-x^2} \operatorname{sech}\left(\frac{a_2(n)}{9} x^{a_1(n)}\right)}{1 + e^{a_2(n)(x-0.9)}}, \\ \rho(x) & = \left[1 - \frac{1}{1 + e^{a_3(n)(x-0.8)}} \right] \times \end{aligned}$$

$$\tanh^2 \left\{ \left(\frac{a_3(n)}{11} x + 0.042 \right)^{a_4(n)} \right\}, \quad (10)$$

其中 $a_1(n)$ ， $a_2(n)$ ， $a_3(n)$ 和 $a_4(n)$ 是依赖于 n 的参数，且都为正数($a_i(n) > 0, i=1, 2, 3, 4$)。我们得到当 $n=100$ ， $a_1=4.04556$ ， $a_2=9$ ， $a_3=11$ 和 $a_4=9.7177$ 时，解析解(10)式与文献[9]中数值解符合得相当好，如图 1 所示。

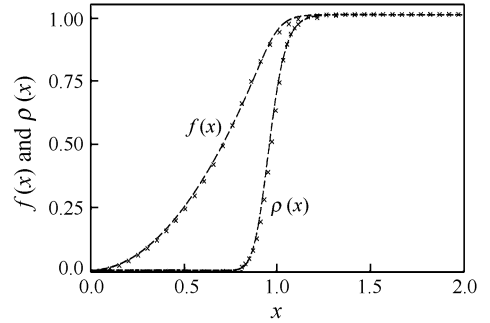


图 1 $n=100$ ，--为数值解^[9]，×为近似解析解

将(10)式代入(9)式，可以得到涡旋张力 $\sigma(n)$ 的积分形式，它难以由符号积分得到解析形式。为此采用数值变分方法。用 MATLAB 代码，对 $\sigma(n)$ 在 $n=90-110$ 进行数值变分，得到 $a_i (i=1-4)$ 和 σ 对 n 的依赖关系。其中， $g=2.0$ ， $\lambda=3g^2$ ， $\phi_0=0.65$ GeV， $R=2.68$ fm。结果如图 2—图 6 所示。

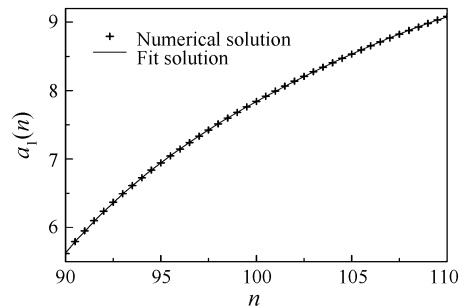


图 2 $a_1(n)$ 在 $n=90-110$ 时的变化

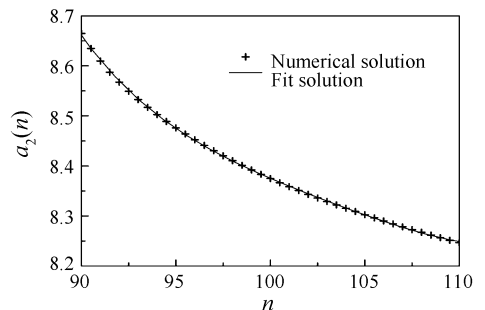


图 3 $a_2(n)$ 在 $n=90-110$ 时的变化

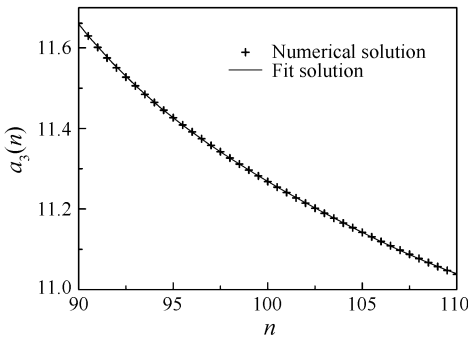


图 4 $a_3(n)$ 在 $n=90-110$ 时的变化

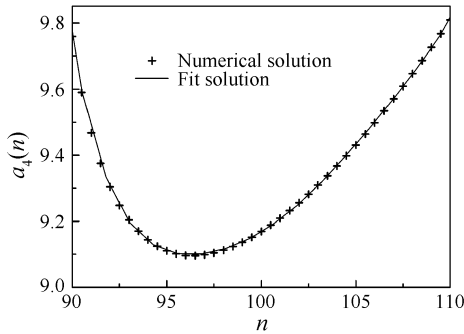


图 5 $a_4(n)$ 在 $n=90-110$ 时的变化

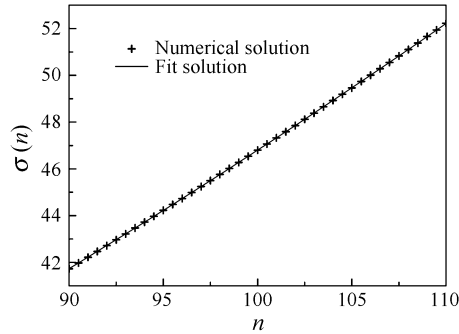


图 6 $\sigma(n)$ 在 $n=90-110$ 时的变化

将以上结果做数值拟合, 得到 $a_1(n)$, $a_2(n)$, $a_3(n)$, $a_4(n)$ 和 $\sigma(n)$ 关于 n 的以下函数形式:

$$a_1(n) = A_1 + B_{11}n + B_{12}n^2 + B_{13}n^3 + B_{14}n^4, \quad 90 \leq n \leq 110 \quad (11)$$

$$a_2(n) = A_2 + B_{21}n + B_{22}n^2 + B_{23}n^3 + B_{24}n^4, \quad 90 \leq n \leq 110 \quad (12)$$

$$a_3(n) = A_3 + B_{31}n + B_{32}n^2 + B_{33}n^3 + B_{34}n^4, \quad 90 \leq n \leq 110 \quad (13)$$

$$a_4(n) = A_4 + B_{41}n + B_{42}n^2 + B_{43}n^3 + B_{44}n^4 + B_{45}n^5 + B_{46}n^6, \quad 90 \leq n \leq 110 \quad (14)$$

$$\sigma(n) = C + D_1n + D_2n^2,$$

$$90 \leq n \leq 110 \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= -1367.33132, & B_{11} &= 51.99046, \\ B_{12} &= -0.74294, & B_{13} &= 0.00475, \\ B_{14} &= -1.14144 \times 10^{-5}; & A_2 &= 397.74016, \\ B_{21} &= -14.99338, & B_{22} &= 0.21712, \\ B_{23} &= -0.0014, & B_{24} &= 3.38974 \times 10^{-6}; \\ A_3 &= 287.46207, & B_{31} &= -10.51368, \\ B_{32} &= 0.15109, & B_{33} &= -9.69686 \times 10^{-4}, \\ B_{34} &= 2.33974 \times 10^{-6}; & A_4 &= 306393.76554, \\ B_{41} &= -18106.29797, & B_{42} &= 445.68387, \\ B_{43} &= -5.84859, & B_{44} &= 0.04315, \\ B_{45} &= -1.69734 \times 10^{-4}, & B_{46} &= 2.78037 \times 10^{-7}; \\ C &= 11.89299, & D_1 &= 0.17391, \\ D_2 &= 0.00175. \end{aligned}$$

图 2—图 5 给出了 $a_i(n)$ ($i=1-4$) 对 n 的依赖关系, 其中 $n=90-110$; 图 6 给出了涡旋张力 σ 对 n 的依赖关系, 它大致呈简单的线性关系, 因为二次项系数 D_2 比线性项系数小 2 个数量级: $D_2/D_1 \approx 0.01$. 将(11)–(14)式带入(10)式, 即可得到近似解($f(x)$ 和 $\rho(x)$)的具体形式, 这里略去. 同时我们还可以通过(9)式给出涡旋张力对 n 的依赖性. 要说明的是, 之所以取 $90 \leq n \leq 110$, 是因为在该范围内, 方程(6)式左边数值的相对值在 0.1% 以下.

4 结论

本文用变分法研究了对偶 Abelian-Higgs 模型的大量子数涡旋解析解, 并给出了涡旋量子数在 $n=90-110$ 范围时的近似涡旋解析解; 我们的计算表明, 在 $n=90-110$ 范围内, n 重涡旋解趋于墙涡旋的 Bolognesi 猜想成立. 同时还给出了对涡旋张力 σ 对 n 的具体依赖性. 该依赖性大致呈简单的线性增长关系, 因而每个涡旋所具有的涡旋张力近似为常数. 这与对偶超导图像原始猜想相一致^[3, 4].

参考文献 (References):

[1] Antonov D, Giacomo A D. Journal of High Energy Physics, 2005, 0503: 017.
 [2] Chernodub M N. Phys Rev, 2004, D69: 094504.
 [3] 't Hooft G. In High Energy Physics. EPS International Con-

- ference, In: ed. Zichichi A, Palermo. Italy, 1975.
- [4] Mandelstam S. Phys Rep, 1976, 23C : 245.
- [5] 't Hooft G. Nucl Phys, 1981, B190(3): 455—458.
- [6] Dzhunushaliev V, Singleton D. Mod Phys Lett, 2003, A18: 955.
- [7] Ai Dezhen, Jia Duo-jie, Li Yanwei, *et al.* Journal of Northwest Normal University(Natural Science), 2008, 43(2): 24 (in Chinese).
(艾德臻, 贾多杰, 李彦炜等. 西北师范大学学报(自然科学版), 2008, 43(2): 24.)
- [8] Bolognesi S. Nucl Phys, 2005, B730: 127.
- [9] Bolognesi S. Nucl Phys, 2005, B730: 150.
- [10] Bolognesi S, Gudnason S B. Nucl Phys, 2006, B741: 1.
- [11] Jia Duo-jie. HEP & NP, 2006, 30(3): 196(in Chinese).
(贾多杰. 高能物理与核物理, 2006, 30(3): 196.)
- [12] Ichie H, Suganuma H. Phys Rev, 1999, D60: 77501.
- [13] Jia Duo-jie, Ai Dezhen. Chin Phys, 2007, C31(5): 64.
- [14] Huang Kesun. Quarks Leptons and Gauge Fields. Beijing: Beijing Normal University Publishing House, 1982, 71—80 (in Chinese).
(黄克孙. 夸克、轻子与规范场. 北京: 北京师范大学出版社, 1982, 71—80.)

Approximate Analytical Solution of Vortices with Quantum $n=90-110$ in Dual Superconductor Model^{*}

XI Guo-zhu, JIA Duo-jie[#], JI Yong-lin, LIU Feng

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The large- n vortices in the dual superconductor model was investigated. An approximate analytical solution was obtained for n -fold quantized vortices with $n=90-110$ by variationally solving the Abelian-Higgs model, and the vortex tension was calculated as a function of n . It was found that the vortex tension rises linearly as n grows. It is hoped that our solution shines light on the understanding of the wall behavior of the large n vortices in Abelian-Higgs model.

Key words: dual superconductor model; vortex; large n

* Received date: 9 Sep. 2008; Revised date: 13 Nov. 2008

* Foundation item: National Natural Science Foundation of China(10547009); Knowledge and S & T Innovation Engineering Project of Northwest Normal University(NWNU- KJ CXGC-03-41)

Corresponding author: Jia Duo-jie, E-mail: jiadj@nwnu.edu.cn