文章编号：1007－4627(2008)03－0218－06

电磁场中带电粒子在非对易相空间的能级*

王亚辉，王剑华，黄文登
（陕西理工学院物理系，陕西 汉中 723001）

摘　要：非对易空间效应是出现在弦的尺度下的一种物理效应。首先扼要介绍了非对易相空间中的量子力学代数、Moyal-Weyl 乘法和广义 Bopp 变换，然后讨论了电磁场中带电粒子的 Hamiltonian 算符，最后给出了其在非对易相空间中的能级情况。

关 键 词：非对易相空间；Moyal-Weyl 乘法；带电粒子；电磁场；能级
中图分类号：O413.1　　**文献标识码**：A

1 引言

目前，国际上超弦/M 理论中非交换几何的自然出现，使得人们不仅能运用非交换几何的概念和定理来有效地分析对偶性、BPS 态以及 D-膜动力学等，而且更重要的是引起了人们对整个物理学理论基础的理解和认识的深刻变革，提出了一种新的物理时空——非对易时空。即在超微观领域(普朗克尺度)，时空坐标是非对易的，满足时空测不准原理，从而时空点的概念失去了意义，使得描述经典引力的黎曼微分几何不再适用，需要用一种新的时空几何——非对易几何来描述引力。近年来非对易几何在超弦/M 理论、杨-米尔斯(Yang-Mills)理论以及暴涨宇宙模型等领域中的应用，尤其是非对易平直空间上的杨-米尔斯理论(NCYM)以及非对易几何与 D-膜动力学之间的密切关系等问题已引起越来越多的重视。在弦的尺度下所出现的空间的非对易效应在物理学界引起了极大的关注[1—17]。研究非对易空间问题的理论和方法主要来自量子场论，然而，在量子力学的框架下研究一些可解模型的非对易空间效应也是非常有意义的工作。

本文首先介绍了 Moyal-Weyl 乘法在非对易相空间中如何通过一个广义 Bopp 变换($x\rightarrow\hat{x}$, $p\rightarrow\hat{p}$)把星乘转变成普通乘法的方法。在所给出的相空间变量的对易关系中包含了空间-空间和动量-动量两个方面的非对易性，并重新定义了产生和消灭算符。利用这些对易关系和产生、消灭算符，进一步讨论了带电粒子在电磁场中的能级情况。

2 Moyal-Weyl 乘法和广义 Bopp 变换

在量子力学中，如果采用自然单位制($\hbar=c=1$)，坐标和动量的对易关系为

$$
\begin{aligned}
&[x_i,\ p_j] = \mathrm{i}\delta_{ij}\ ,\\
&[x_i,\ x_j] = 0\ ,\\
&[p_i,\ p_j] = 0\ ,\\
&i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\ ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

将这种情况称为对易空间。但是，在弦的尺度下出现了空间的非对易效应。在非对易相空间中，用 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 来表示坐标和动量算符，它们的对易关系由下面的公式给出[3, 4]：

$$
\begin{aligned}
&[\hat{x}_i,\ \hat{p}_j] = \mathrm{i}\delta_{ij}\ ,\\
&[\hat{x}_i,\ \hat{x}_j] = \mathrm{i}\Theta_{ij}\ ,\\
&[\hat{p}_i,\ \hat{p}_j] = \mathrm{i}\bar{\Theta}_{ij}\ ,\\
&i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\ 。
\end{aligned} \tag{2}
$$

经过进一步的推导，可以得到非对易相空间中的坐标 $\hat{x}$ 和动量 $\hat{p}$ 用对易空间中的坐标 x 和动量 p 线性表示出来的基本形式[4]

* 收稿日期：2007－10－25；修改日期：2007－11－16
* 基金项目：国家自然科学基金资助项目(10447005)；陕西省自然科学基金资助项目(06JK326)；陕西理工学院科研项目(SLG0521)
作者简介：王亚辉(1978—)，男(汉族)，陕西宝鸡人，硕士研究生，讲师，从事量子场论研究；
E-mail：wangyahui8312469@163.com

$$\begin{cases}\hat{x}_i = \alpha x_i - \dfrac{1}{2\alpha}\Theta_{ij}p_j, \\ \hat{p}_i = \beta p_i + \dfrac{1}{2\beta}\bar{\Theta}_{ij}x_j,\end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{3}$$

其中$\{\Theta_{ij}\}$和$\{\bar{\Theta}_{ij}\}$是完全反对称矩阵，α 和 β 都是对称矩阵，$\Theta\bar{\Theta}=4\alpha\beta(\alpha\beta-1)I$，$I$ 为单位矩阵。在非对易空间中，定态 Schrödinger 方程常被写成

$$H(x, p) * \Psi = E\Psi, \tag{4}$$

这里 Moyal-Weyl 乘(星乘)被定义为[3]

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= e^{\frac{i}{2}\Theta_{ij}\partial_i^x\partial_j^x} f(x)g(x) \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\Theta_{ij}\partial_i f \partial_j g\,|_{x_i=x_j} + \cdots,\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $f(x)$和 $g(x)$是两个任意函数。在非对易相空间中，相应的 Moyal-Weyl 乘(星乘)被定义为

$$\begin{aligned}&(f * g)(x, p) \\ &= e^{\frac{i}{2\alpha^2}\Theta_{ij}\partial_i^x\partial_j^x + \frac{i}{2\alpha^2}\bar{\Theta}_{ij}\partial_i^p\partial_j^p} f(x, p)g(x, p) \\ &= f(x, p)g(x, p) + \frac{i}{2\alpha^2}\Theta_{ij}\partial_i^x f\partial_j^x g\,|_{x_i=x_j} + \\ &\quad \frac{i}{2\alpha^2}\bar{\Theta}_{ij}\partial_i^p f\partial_j^p g\,|_{p_i=p_j} + \cdots。\end{aligned} \tag{6}$$

通过一个广义的 Bopp 变换 $x\to\hat{x}$，$p\to\hat{p}$ 把星乘转变成了普通乘法。相应的方程可以写成：

$$\begin{aligned}\hat{H}(\hat{x}_i, \hat{p}_i)\Psi = \hat{H}(\alpha x_i - \frac{1}{2\alpha}\Theta_{ij}p_j, \alpha p_i + \\ \frac{1}{2\alpha}\bar{\Theta}_{ij}x_j)\Psi = E\Psi\ 。\end{aligned} \tag{7}$$

根据文献[4]的计算，(3)式可写成：

$$\begin{cases}\hat{x}_i = \alpha x_i - \dfrac{1}{2\alpha}\Theta_{ij}p_j \\ \hat{p}_i = \alpha p_i + \dfrac{1}{2\alpha}\mu^2\omega^2\Theta_{ij}x_j\end{cases},$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

当 $n=2$ 时，(8)式变成：

$$\begin{cases}\hat{x}_1 = \alpha x_1 - \dfrac{1}{2\alpha}\theta p_2,\ \hat{p}_1 = \alpha p_1 + \dfrac{1}{2\alpha}\mu^2\omega^2\theta x_2 \\ \hat{x}_2 = \alpha x_2 + \dfrac{1}{2\alpha}\theta p_1,\ \hat{p}_2 = \alpha p_2 - \dfrac{1}{2\alpha}\mu^2\omega^2\theta x_1\end{cases}, \tag{9}$$

其中 θ 是一个表征非对易能级的小量，文献[2]曾经指出：$\theta\leqslant(10^4\ \text{GeV})^{-2}$。

3　带电粒子在电磁场中 Hamiltonian 算符

下面讨论质量为 μ 和带电量为 q 的粒子在电场为 $\boldsymbol{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0)$、磁场为 $\boldsymbol{B}(0, 0, B)$的外场中的运动情况。当粒子在 xoy 平面运动时，其 Hamiltonian 算符为

$$\begin{aligned}H = \frac{1}{2\mu}[(p_1 + qBx_2)^2 + (p_2 - qBx_1)^2] - \\ q\varepsilon_1 x_1 - q\varepsilon_2 x_2,\end{aligned} \tag{10}$$

变形后得：

$$\begin{aligned}H = \frac{1}{2\mu}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2(x_1^2 + x_2^2) - \\ \omega_L l_z - q\varepsilon_1 x_1 - q\varepsilon_2 x_2,\end{aligned}$$

其中　$$\omega_L = \frac{qB}{\mu},\ l_z = p_2 x_1 - p_1 x_2。 \tag{11}$$

4　非对易相空间中带电粒子在电磁场中 Hamiltonian 算符

在非对易相空间中，做一个广义 Bopp 变换把 $H(x, p)\to\hat{H}(\hat{x}, \hat{p})$，星乘就转变成了普通的乘法。因此，在非对易相空间中带电粒子在电磁场中的 Hamiltonian 算符为

$$\begin{aligned}\hat{H} = \frac{1}{2\mu}[(\hat{p}_1 + qB\hat{x}_2)^2 + (\hat{p}_2 - qB\hat{x}_1)^2] - \\ q\varepsilon_1\hat{x}_1 - q\varepsilon_2\hat{x}_2。\end{aligned} \tag{12}$$

将(9)式代入(12)式得：

$$\begin{aligned}\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\Big\{&\Big[\Big(\alpha + \frac{qB}{2\alpha}\theta\Big)p_1 + \Big(qB\alpha + \frac{\bar{\theta}}{2\alpha}\Big)x_2\Big]^2 + \\ &\Big[\Big(\alpha + \frac{qB}{2\alpha}\theta\Big)p_2 - \Big(qB\alpha + \frac{\bar{\theta}}{2\alpha}\Big)x_1\Big]^2\Big\} - \\ &q\varepsilon_1\Big(\alpha x_1 - \frac{1}{2\alpha}\theta p_2\Big) - q\varepsilon_1\Big(\alpha x_2 + \frac{1}{2\alpha}\theta p_1\Big),\end{aligned} \tag{13}$$

化简得：

$$\begin{aligned}\hat{H} = \frac{1}{2\tilde{\mu}}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\tilde{\mu}\tilde{\omega}_L^2(x_1^2 + x_2^2) - \tilde{\omega}_L l_z - \\ q\varepsilon_1\Big(\alpha x_1 - \frac{1}{2\alpha}\theta p_2\Big) - q\varepsilon_1\Big(\alpha x_2 + \frac{1}{2\alpha}\theta p_1\Big),\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\tilde{\mu}=\frac{\mu}{[\alpha+(qB/2\alpha)\theta]^2},\qquad \tilde{\omega}_L=\frac{qB\alpha+(\bar{\theta}/2\alpha)}{\tilde{\mu}[\alpha+(qB/2\alpha)\theta]},\qquad \bar{\theta}=\frac{4\alpha^2(1-\alpha^2)}{\theta},\qquad l_z=p_2x_1-p_1x_2。$$

利用配方法改写上式，带电粒子在电磁场中的 Hamiltonian 算符在非对易相空间变成为

$$\hat{H}=\frac{1}{2\tilde{\mu}}\left[\left(p_1-\tilde{\mu}\,q\,\varepsilon_2\theta\frac{1}{2\alpha}\right)^2+\left(p_2+\tilde{\mu}\,q\,\varepsilon_1\theta\frac{1}{2\alpha}\right)^2\right]-\tilde{\omega}_L l_z+\frac{1}{2}\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L{}^2\left[\left(x_1-\frac{q\,\varepsilon_1\alpha}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2}\right)^2+\left(x_2-\frac{q\,\varepsilon_2\alpha}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2}\right)^2\right]-\frac{1}{2\tilde{\mu}}\left(\tilde{\mu}\,q\theta\frac{1}{2\alpha}\right)^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)-\frac{q^2\alpha^2}{2\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\,,\tag{15}$$

$$令\begin{cases}x_1'=x_1-\dfrac{q\,\varepsilon_1\alpha}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2}\\ x_2'=x_2-\dfrac{q\,\varepsilon_2\alpha}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2}\end{cases},\qquad \begin{cases}p_1'=p_1-\dfrac{1}{2\alpha}\tilde{\mu}\,q\,\varepsilon_2\theta\\ p_2'=p_2+\dfrac{1}{2\alpha}\tilde{\mu}\,q\,\varepsilon_1\theta\end{cases}。\tag{16}$$

因为 θ 是一个小量，因此含有 θ^2 的项可以忽略，(15)式可改写为

$$\hat{H}=\frac{1}{2\tilde{\mu}}(p_1'^2+p_2'^2)+\frac{1}{2}\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2(x_1'^2+x_2'^2)-\frac{q^2\alpha^2}{2\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2}\varepsilon^2-\tilde{\omega}_L l_z\ 。\tag{17}$$

5　非对易相空间中带电粒子在电磁场的能级

$$\hat{H}=\frac{1}{2\tilde{\mu}}(p_1'^2+p_2'^2)+\frac{1}{2}\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2(x_1'^2+x_2'^2)-\frac{q^2\alpha^2}{2\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2}\varepsilon^2+\frac{q^2\theta}{2\tilde{\omega}_L}\varepsilon^2-\tilde{\omega}_L(p_2'x_1'-p_1'x_2')+\frac{1}{2}\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L q\theta(\varepsilon_1x_1'-\varepsilon_2x_2')-\frac{q\,\alpha}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}(\varepsilon_2p_2'-\varepsilon_1p_1')\ 。\tag{18}$$

其中

$$\tilde{\mu}=\frac{\mu}{[\alpha+(qB/2\alpha)\theta]^2}\,,\quad \tilde{\omega}_L=\frac{qB\alpha+(\bar{\theta}/2\alpha)}{\tilde{\mu}[\alpha+(qB/2\alpha)\theta]}\,,\quad \bar{\theta}=\frac{4\alpha^2(1-\alpha^2)}{\theta}\,,$$

由此可得：

$$\hat{H}=\frac{1}{2\tilde{\mu}}(p_1'^2+p_2'^2)+\frac{1}{2}\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2(x_1'^2+x_2'^2)-\frac{q^2\varepsilon^2}{2\tilde{\omega}_L}\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}-\theta\right)-\tilde{\omega}_L l_z'+\frac{q^2B\alpha\theta^2+q\mu\omega\theta^2}{2\theta\,\alpha^2+qB\,\theta^2}(\varepsilon_1x_1'-\varepsilon_2x_2')-\frac{q\,\theta\alpha^2+\frac{1}{2}q^2B\,\theta^2}{qB\alpha\theta+2\alpha(1-\alpha^2)}(\varepsilon_1p_2'-\varepsilon_2p_1')\ ,\tag{19}$$

其中，$l_z'=p_2'x_1'-p_1'x_2'$。因为 θ 是一个小量，因此含有 θ^2 的项可以忽略，此时(19)式可化简为

$$\hat{H}=\frac{1}{2\tilde{\mu}}(p_1'^2+p_2'^2)+\frac{1}{2}\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2(x_1'^2+x_2'^2)-\frac{q^2\varepsilon^2}{2\tilde{\omega}_L}\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}-\theta\right)-\tilde{\omega}_L l_z'+\frac{q\,\theta\alpha}{qB\theta+2(1-\alpha^2)}(\varepsilon_2p_1'-\varepsilon_1p_2')\ ,\tag{20}$$

$$H^0=\frac{1}{2\tilde{\mu}}(p_1'^2+p_2'^2)+\frac{1}{2}\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L^2(x_1'^2+x_2'^2)-\frac{q^2\varepsilon^2}{2\tilde{\omega}_L}\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}-\theta\right)-\tilde{\omega}_L(p_2'x_1'-p_1'x_2'),\tag{21}$$

$$H'=\frac{q\,\theta\alpha}{qB\theta+2(1-\alpha^2)}(\varepsilon_2p_1'-\varepsilon_1p_2')\ 。\tag{22}$$

把(21)式中变量 $x_i^{'}$ 和 $p_i^{'}$ 按下面的方式变换成 X_a 和 P_b(这里和后面的 a，b=1，2)

$$\begin{cases} X_a = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}{2}}x_1^{'} - \sqrt{\frac{1}{2\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}}p_2^{'}, \quad X_b = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}{2}}x_1^{'} + \sqrt{\frac{1}{2\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}}p_2^{'}; \\ P_a = \sqrt{\frac{1}{2\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}}\,p_1^{'} + \sqrt{\frac{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}{2}}x_2^{'}, \quad P_b = \sqrt{\frac{1}{2\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}}p_1^{'} - \sqrt{\frac{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}{2}}x_2^{'} 。\end{cases} \tag{23}$$

上面的 X_a 和 P_b 满足如下的关系：

$$X_a = X_a^{+};\quad P_a = P_a^{+};\quad [X_a,\ X_b] = [P_a,\ P_b] = 0;\quad [X_a,\ P_b] = \mathrm{i}\delta_{ab} 。\tag{24}$$

再定义消灭-产生算符 A_a，A_a^{+}：

$$A_a = \sqrt{\frac{1}{2}}X_a + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}}P_a, \qquad A_a^{+} = \sqrt{\frac{1}{2}}X_a - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}}P_a \quad a = 1,\ 2 \tag{25}$$

这里的 A_a 和 A_a^{+} 满足如下的关系：

$$[A_a,\ A_b] = [A_a^{+},\ A_b^{+}] = 0;\quad [A_a,\ A_b^{+}] = \delta_{ab} \tag{26}$$

粒子数算符 $N_a = A_a^{+}A_a$ 的本征值 n_a=0，1，2，3，…，态矢量为|n〉，再把 Hamiltonian 算符写成频率 $\tilde{\omega}_L$ 的形式：

$$H^0 = \tilde{\omega}_L(A_a^{+}A_a + A_b^{+}A_b + 1) - \tilde{\omega}_L(A_b^{+}A_b - A_a^{+}A_a) - \frac{q^2\varepsilon^2}{2\tilde{\omega}_L}\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L} - \theta\right), \tag{27}$$

H^0 的本征值是

$$E^0 = \tilde{\omega}_L(N+1) - m\,\tilde{\omega}_L - \frac{q^2\varepsilon^2}{2\tilde{\omega}_L}\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L} - \theta\right), \quad N = 0,1,2,3,\cdots, \quad m = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \tag{28}$$

将产生、消灭算符代入(22)式得：

$$\begin{aligned} H^{'} &= \frac{q\,\theta\alpha}{qB\theta + 2(1-\alpha^2)}(\varepsilon_2 p_1^{'} - \varepsilon_1 p_2^{'}) \\ &= \frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_2\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}\,i(A_b^{+} - A_a + A_a^{+} - A_b)}{2[qB\theta + 2(1-\alpha^2)]} - \frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_1\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}(A_b^{+} - A_a - A_a^{+} + A_b)}{2[qB\theta + 2(1-\alpha^2)]} 。\end{aligned} \tag{29}$$

根据微扰理论的方法，在 H^0 本征态$|n_a n_b\rangle$的表象中计算 H'的矩阵元

$$\begin{aligned} H^{'}_{n_a^{'}n_b^{'},\,n_a n_b} &= \langle n_a^{'}n_b^{'}\left|\frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_2\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}\,i(A_b^{+} - A_a + A_a^{+} - A_b)}{2[qB\theta + 2(1-\alpha^2)]} - \frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_1\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}(A_b^{+} - A_a - A_a^{+} + A_b)}{2[qB\theta + 2(1-\alpha^2)]}\right|n_a n_b\rangle \\ &= \langle n_a^{'}n_b^{'}\left|\frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_2\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}\,i(A_b^{+} - A_a - A_a^{+} + A_b)}{2[qB\theta + 2(1-\alpha^2)]}\right|n_a n_b\rangle - \\ &\quad \langle n_a^{'}n_b^{'}\left|\frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_1\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}(A_b^{+} - A_a - A_a^{+} + A_b)}{2[qB\theta + 2(1-\alpha^2)]}\right|n_a n_b\rangle \\ &= \frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_2\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}\,i}{2[qB\theta + 2(1-\alpha^2)]}\big(\sqrt{n_a+1}\,\delta_{n_a^{'},\,n_a+1}\delta_{n_b^{'},\,n_b} + \sqrt{n_b+1}\,\delta_{n_b^{'},\,n_b+1}\delta_{n_a^{'},\,n_a} - \\ &\quad \sqrt{n_a}\,\delta_{n_a^{'},\,n_a-1}\delta_{n_b^{'},\,n_b} - \sqrt{n_b}\,\delta_{n_b^{'},\,n_b-1}\delta_{n_a^{'},\,n_a}\big) - \frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_1\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}}{2[qB\theta + 2(1-\alpha^2)]}\big(-\sqrt{n_a+1}\,\delta_{n_a^{'},\,n_a+1}\delta_{n_b^{'},\,n_b} + \\ &\quad \sqrt{n_b+1}\,\delta_{n_b^{'},\,n_b+1}\delta_{n_a^{'},\,n_a}\big) - \sqrt{n_a}\,\delta_{n_a^{'},\,n_a-1}\delta_{n_b^{'},\,n_b} + \sqrt{n_b}\,\delta_{n_b^{'},\,n_b-1}\delta_{n_a^{'},\,n_a}\big), \end{aligned} \tag{30}$$

所以一级修正和二级修正分别为

$$E^{'(1)}=H'_{n_an_b,\,n_an_b}=0\ ,\tag{31}$$

$$E^{'(2)}=\sum_{n'}\frac{|\,H'_{n'_an'_b,\,n_an_b}\,|^2}{E_n^{(0)}-E_{n'}^{(0)}}\ ,\tag{32}$$

$$|\,H'_{n'_an'_b,\,n_an_b}\,|^2=2\left[\frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_2\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}}{qB\theta+2(1-\alpha^2)}\right]^2-2\left[\frac{q\,\theta\alpha\varepsilon_1\ \sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}}{qB\theta+2(1-\alpha^2)}\right]^2(n_b-n_a)\ 。\tag{33}$$

(33)式中含 θ^2，因为 θ 是一个小量，因此含有 θ^2 的项可以忽略。所以

$$E^{'(2)}=\sum_{n'}\frac{|\,H'_{n'_an'_b,\,n_an_b}\,|^2}{E_n^{(0)}-E_{n'}^{(0)}}\approx 0\ ,\tag{34}$$

$\hat{H}$ 的本征值 E 可表示为

$$\begin{aligned}E&=E^0+E^{'(1)}+E^{'(2)}+\cdots\\&\approx E^0=\tilde{\omega}_L(n_a+n_b+1)-\\&\quad(n_b+n_a)\tilde{\omega}_L-\frac{q^2\varepsilon^2}{2\tilde{\omega}_L}\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}-\theta\right)\\&=\tilde{\omega}_L(N+1)-m\,\tilde{\omega}_L-\\&\quad\frac{q^2\varepsilon^2}{2\tilde{\omega}_L}\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}-\theta\right)\ ,\end{aligned}\tag{35}$$

其中，$N=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$。(35)式表示的是非对易相空间中带电粒子在电磁场中的能级。零点能量绝对值不是 $\tilde{\omega}_L$，而是 $\tilde{\omega}_L-\left(\frac{q^2\varepsilon^2}{2\tilde{\omega}_L}\right)\left[\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\mu}\,\tilde{\omega}_L}\right)-\theta\right]$。零点能依赖参数 α。当 α 趋近于 1 时，$\bar{\theta}$趋近于 0，结果就从非对易相空间回到了非对易空间。进而可以从非对易空间回到对易空间。

6 讨论

在本文中我们采用了一个广义 Bopp 变换，通过 $H(x,\ p)\rightarrow\hat{H}(\hat{x},\ \hat{p})$来实现在非对易空间中的 Moyal-Weyl 乘法（星乘）的方法，给出了 Schrödinger 方程在非对易相空间的基本形式。根据空间-空间和动量-动量两个方面的非对易性，进一步讨论了非对易相空间中带电粒子在外加电磁场的能级情况。非对易相空间参数 $\bar{\theta}$ 与 α 的关系由 $\bar{\theta}=4\alpha^2(1-\alpha^2)/\theta$ 给出，文献[2]指出 $\theta\leqslant(10^4\ \mathrm{GeV})^{-2}$。所得到的结果在 α 趋近于 1(等价于 $\bar{\theta}$ 趋近于零)的极限情况下，回到非对易空间的结果。

空间的非对易效应是超弦场论的重要结果。目前，这方面的研究在理论物理学界引起了广泛的关注，成了热门的研究课题之一。然而，尽管人们对非对易空间量子力学问题的研究已取得了一些成果，但是还有很多的工作需要我们去做，非对易空间和非对易相空间问题在物理学各个层面的理论和实验探讨都是非常必要和有意义的。

参考文献(References)：

[1] Seiberg N，Witten E. arXiv：hep-th/9908142.

[2] Chaichian M，Sheikh Jabbari M M，Tureanu A. Phys Rev Lett，2001，**86**：2 716.

[3] Li Kang，Wang Jianhua，Chen Chiyi. Modern Physics Letter，2005，**A20**(28)：2 165.

[4] Wang Jianhua，Li Kang，Liu Peng. High Energy Physics and Nuclear Physcis，2006，**30**(5)：387(in Chinese).
(王剑华，李 康，刘 鹏，高能物理与核物理，2006，**30**(5)：387.)

[5] Wang Jianhua，Li Kang. High Energy Physics and Nuclear Physcis，2006，**30**(11)：1 053(in Chinese).
(王剑华，李 康. 高能物理与核物理，2006，**30**(11)：1 053.)

[6] Li Kang，Dulat S. Eur Phys J，2006，**C46**：825.

[7] Wang Jianhua，Li Kang. J Phys，Math Theor，2007，**A40**：2 197.

[8] Li Kang，Wang Jianhua. arXiv：hep-th/0608100.

[9] Zhang Jianzu. Phys Lett，2004，**B584**：204.

[10] Douglas M R，Hull C M. arXiv：hep-th/9711165.

[11] Ardalan F，Arfaei H，Sheikh-Jabbari M M. arXiv：hep-th/9810072.

[12] Connes A， Douglas M R， Schwarz A. arXiv：hep-th/9711162.

[13] Chu S C，Ho P M. Nucl Phys，2000，**B568**：447.

[14] Gamboa J，Loewe M，Rojas J C. Phys Rev，2001，**D64**：067 901.

[15] Muthukumar B，Mitra P. Phys Rev，2002，**D66**：027 701.

[16] Nair V P，Polychronakos A P. Phys Lett，2001，**B505**：267.

[17] Kochan D，Demetrian M. arXiv：hep-th/0102050.

Energy of Charged Particle in Electromagnetic Field in Noncommutative Phase Space*

WANG Ya-hui[1)], WANG Jian-hua, HUANG Wen-deng

(*Department of Physics*, *Shanxi University of Technology*, *Hanzhong* 723001, *Shanxi*, *China*)

Abstract: The noncommutative space effect is a physic effect in string scale. In this paper the quantum mechanical algebra, the Moyal-Weyl multiplication and the Bopp transition are introduced, and the Hamiltonian operator of the charged particle in electromagnetic field is also discussed. Furthermore, the energy of the particle in noncommutative phase space is presented.

Key words: NCS; NCQM; charged particle; electromagnetic field; energy

* **Received date**: 25 Oct. 2007; **Revised date**: 16 Nov. 2007

* **Foundation item**: National Natural Science Foundation of China (10447005); Natural Science Foundation of Education Bureau of Shanxi Province(06JK326); Foundation of Shanxi University of Technology (SLG0521)

1) E-mail: wangyahui8312469@163.com