

文章编号: 1007-4627(2008)02-0112-05

# 稀土区对关联经验参数公式的研究\*

郭锋亮, 郭建友, 王士虎

(安徽大学物理与材料科学学院, 安徽 合肥 230039)

**摘要:** 在相对论平均场理论框架下, 采用不同对关联的参数公式对 Ce, Gd 和 Yb 稀土区同位素链进行了计算和研究。理论计算表明: 尽管采用能隙经验参数公式和对力强度经验参数公式在能否表现出原子核的壳结构上有所区别, 但具体计算的其它物理量(如结合能、双中子分离能等)趋向一致, 都能很好地反映原子核的基态性质。

**关键词:** 相对论平均场理论; BCS 方法; 能隙; 对力强度

**中图分类号:** O412; O571.21      **文献标识码:** A

## 1 引言

相对论平均场(RMF)理论<sup>[1]</sup>是在核力介子交换理论基础上发展起来的一种唯象的有效理论。它为研究核基态性质提供了强有力的工具。无论是稳定核<sup>[2, 3]</sup>还是远离稳定线原子核的许多性质<sup>[4, 5]</sup>都能用 RMF 理论进行比较好的描述。由于核子-核子之间的对关联在原子核中也扮演着重要角色, 因此考虑对关联的 RMF 理论在描述核的性质方面已显得重要, 人们便将 BCS 方法引入 RMF 理论(RMF+BCS 模型)。考虑了对关联的 RMF 理论在研究原子核的许多性质方面获得了与实验更符合的结果<sup>[6, 7]</sup>。BCS 方法破坏了粒子数守恒, 只能近似处理堵塞效应等。为了避免由于粒子数不守恒带来的问题, 文献[8]采用了粒子数守恒方法和 RMF 结合处理对关联。但由于这种方法还没有得到广泛的使用, BCS 方法处理对关联依然有很重要的意义。

在 BCS 近似处理对关联中, 有两类不同的计算方法, 一类是固定能隙的计算方法, 另一类是固定平均对力强度的计算方法。下面首先介绍这些不同的计算方法, 然后在 RMF 理论框架下比较不同计算方法的计算结果。

固定的计算方法是采用能隙参数公式计算的, 对力强度不加设定。国内一些人采用这种能隙参数公式<sup>[9]</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta_n = \Delta_p &= \frac{12}{\sqrt{A}}, & \text{偶偶核} \\ \Delta_n = \Delta_p &= \frac{6}{\sqrt{A}}, & \text{奇 } A \text{ 核} \end{aligned} \quad (1)$$

$\Delta_n$  代表中子的能隙,  $\Delta_p$  代表质子的能隙。Vogel 等<sup>[10]</sup>在考虑了同位旋对称性后, 给出了一种能隙参数公式:

$$\begin{aligned} \Delta_n = \Delta_p &= \frac{7.2 - 4.4[(N-Z)/A]^2}{\sqrt[3]{A}}, \\ Z \in (50, 82), N \in (82, 126). \end{aligned} \quad (2)$$

还有一种形式的公式<sup>[21]</sup>:

$$\Delta_n = \Delta_p = \alpha + \beta A^{-1/3}, \quad (3)$$

其中  $\alpha=0.3$ ,  $\beta=3.1$ 。与第一个经验公式稍微类似的是 Möller 等<sup>[11]</sup>提出的公式:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{4.8}{N^{1/3}}, \Delta_p = \frac{4.8}{Z^{1/3}}, \\ \Delta_n = \Delta_p &= \frac{1.12}{\sqrt{A}}. \end{aligned} \quad (4)$$

公式(4)上下两行是两个不同公式(在下面计算中只采用了上面的公式, 因为下面的公式和公式(1)只有系数的不同), 都并没有在奇 A 核处减半, 这是因为原子核的奇偶差还有一定的争议。在实验值拟

\* 收稿日期: 2007-06-27; 修改日期: 2008-03-03

\* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10475001, 10675001); 教育部新世纪优秀人才支持计划基金资助项目(NCET-05-0558); 安徽省高等学校拔尖人才基金资助项目; 安徽省教育厅基金资助项目(2006KJ259B)

作者简介: 郭锋亮(1981-), 男(汉族), 河南濮阳人, 在读硕士研究生, 从事核理论研究; E-mail: guofengliang999@126.com

合的公式中，对三参数公式<sup>[12]</sup>、四参数公式<sup>[13]</sup>、五参数公式<sup>[14]</sup>奇偶差的考虑上都是不同的。由于三参数公式、四参数公式、五参数公式都必须采用实验值拟合，使用范围受到限制，这里不再对此进行研究，仅仅研究经验参数公式。

固定平均对力强度是采用对力强度参数公式计算出的对力强度，具体计算中应先对能隙设定一个值。常见的对力强度参数公式有 Dudek 等<sup>[15]</sup>提出

$$\begin{cases} G_n = \frac{1}{A}[18.95 - 0.078(N - Z)] \\ G_p = \frac{1}{A}[17.90 + 0.176(N - Z)] \end{cases}, Z < 88$$

$$\begin{cases} G_n = \frac{1}{A}[19.30 - 0.084(N - Z)] \\ G_p = \frac{1}{A}[13.30 + 0.217(N - Z)] \end{cases}, Z \geq 88$$
(5)

的  $G_n$  代表中子的对力强度， $G_p$  代表质子的对力强度。以及还有 Li Junqing 等<sup>[16]</sup>考虑的同位旋效应得到的公式：

$$G_n = \frac{21}{A} \left( 1 - \frac{N - Z}{2A} \right),$$

$$G_p = \frac{27}{A} \left( 1 + \frac{N - Z}{2A} \right). \quad (6)$$

采用某种参数公式，就决定了采用了相应类型的计算方法，在以后讨论取某个参数时，就默认采用了相应的计算方法。在实际计算中，采用不同的参数公式可能会给计算结果带来很明显的影 响。计算什么样的物理量是采用哪类、哪个对关联参数公式比较好；计算什么类型的核素是哪类、哪个对关联参数公式比较好，它们的规律是值得研究的问题。

## 2 理论框架

RMF 理论是一个相当成功的理论<sup>[1, 17, 18]</sup>，下面给出简要介绍。首先给出 RMF 理论的拉格朗日密度<sup>[16, 19-22]</sup>：

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2}\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - U(\sigma) -$$

$$\frac{1}{4}\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu - \frac{1}{4}P^{\mu\nu}P_{\mu\nu} +$$

$$\frac{1}{2}\mu_\rho^2 \rho^\mu \rho_\mu - \frac{1}{4}\Phi^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} - \gamma_0 \bar{\psi} \sigma \psi -$$

$$\gamma_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \omega_\mu - \gamma_\rho \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rho_\mu \tau -$$

$$\bar{\epsilon} \psi \gamma^\mu \frac{1 - \tau_3}{2} \psi A_\mu, \quad (7)$$

其中  $\psi$  为核子的狄拉克旋量，对应的质量为  $m$ ； $\sigma$  和  $\omega$  分别是同位旋标量-标量介子和同位旋标量-矢量介子场，它们提供了中长程吸引作用和短程排斥作用； $\rho$  是矢量-矢量介子场，描述了质子与中子区别；光子场  $A$  提供了原子核中的电磁属性；式中

$$U(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{g_2}{3}\sigma^3 + \frac{g_3}{4}\sigma^4$$

代表非线性自洽耦合的标量介子势。其中介子的相关张量如下：

$$\begin{cases} \omega^{\mu\nu} = \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu, \\ A^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \\ \rho^{\mu\nu} = \partial^\mu \rho^\nu - \partial^\nu \rho^\mu - 2g_\rho \rho^\mu \rho^\nu. \end{cases} \quad (8)$$

利用变分原理，可以由 Euler-Lagrange 方程得到核子的场方程。由于我们只涉及到原子核的基态性质，所以可以设介子场和光子场是静态的经典场，核子在经典场中做独立运动。

对于 BCS 方法：系统哈密顿量包括单粒子部分和对力部分，对于变形核，不考虑简并，哈密顿量可表示为

$$H_{\text{pair}} = -G \sum_{\mu, \nu > 0}^{\mu \neq \nu} a_\mu^\dagger a_\mu^\dagger a_\nu a_\nu, \quad (9)$$

其中  $\bar{\nu}$  是单粒子态  $\nu$  的时间反演态。则系统的哈密顿量为

$$H = H_{\text{sp}} + H_{\text{pair}}$$

$$= \sum_\mu \xi_\mu (a_\mu^\dagger a_\mu + a_\mu^\dagger a_{\bar{\mu}}) - G \sum_{\mu, \nu} a_\mu^\dagger a_\mu^\dagger a_\nu a_\nu,$$

$$= \sum_\mu \xi_\mu n_\mu - G \sum_{\mu, \nu} S_\mu^+ S_\nu^+. \quad (10)$$

对于 BCS，首先设其基态试探波函数为

$$|0\rangle = \prod_\nu (u_\nu + v_\nu S_\nu^+) |0\rangle, \quad (11)$$

$u_\nu$  与  $v_\nu$  作为变分参数，满足  $u_\nu^2 + v_\nu^2 = 1$ ，这个条件称为“归一化条件”。不妨要求粒子数的平均值  $\bar{n}$  和体系的实际粒子数  $n_0$  相同，即  $\bar{n} = n_0$ 。这样就变成了一个条件极值的问题：

$$\delta \bar{H} - \lambda \delta \bar{n} = 0, \quad (12)$$

令

$$\Delta = G \left( \sum_{\nu} u_{\nu} v_{\nu} \right), \quad (13)$$

这里把  $\Delta$  称为能隙。能隙在一般情况下是指第一激发态和基态的能量差。这里的能隙不是这种含义，是通过拟合数据确定一个平均对力强度  $G$  而得到的，这里能隙也是一个十分重要的概念。在 BCS 理论中，独立准粒子体系的能量算符可表示为

$$\hat{H} = \sum_i E_i (\alpha_i^+ \alpha_i + \alpha_i^+ \alpha_i), \quad (14)$$

其中  $E_i = \sqrt{(\epsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2}$ ，代表一个准粒子的能量。因为 BCS 理论下的基态就是准粒子的能量。因为 BCS 理论下的基态就是准粒子系统的真空态，在这种近似下，体系的激发态就可看作是各种形式的准粒子激发。费米面附近， $\epsilon_i - \lambda \approx 0$ ，所以  $E_i \approx \Delta$ 。能隙代表着在费米面附近产生的一个准粒子的激发能。对于我们计算的偶偶核，只存在二准粒子、四准粒子、六准粒子、……激发，还可求出：

$$\begin{aligned} u_{\mu}^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\xi_{\mu} - \lambda}{E_{\mu}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\xi_{\mu} - \lambda}{\sqrt{(\xi_{\mu} - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right], \\ v_{\mu}^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\xi_{\mu} - \lambda}{E_{\mu}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\xi_{\mu} - \lambda}{\sqrt{(\xi_{\mu} - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

根据公式(13)和(15)推出等式如下：

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} \frac{1}{\sqrt{(\xi_{\mu} - \lambda)^2 + \Delta^2}} = \frac{1}{G}. \quad (16)$$

根据前面的条件  $\bar{n} = n_0$ ，可以求出：

$$\sum_{\mu} \left[ 1 - \frac{(\xi_{\mu} - \lambda)}{\sqrt{(\xi_{\mu} - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right] = n_0. \quad (17)$$

如果给出其中一个参数，对力强度或能隙，可联立(16)和(17)两个方程组可以求出另一个。也就是上面介绍的 BCS 近似中出现两种计算方法的原因。再把这些值带入系统哈密顿量或对力哈密顿量就得到所需要的值。

### 3 计算结果和讨论

在 RMF 理论框架下，我们采用较好符合稀土区元素性质的 NL3 参数<sup>[23]</sup>，用 BCS 方法和不同的

对关联参数计算了 Ce, Gd 和 Yb 3 个同位素链。

我们把对力强度参数也等效为能隙，以 Gd 同位素链为例，把公式(1)–(6)的能隙参数进行比较(见图 1)。<sup>146</sup>Gd 是中子幻数核，从图 1 可以看出，对力强度参数公式等效能隙在幻数 146 处迅速减小为零，也就是说在幻数处不存在对关联，呈现了明显的壳结构；能隙参数公式计算出的同位素链的能隙曲线类似直线形状，并不能很好地反映这一点。Ce, Gd 和 Yb 3 个元素的元素序数分别为 58, 64 和 70，当它们的质量数分别为 140, 146 和 152 时是中子幻数核。我们计算的这 3 个核同位素链的中子对能曲线见图 2，当这 3 种元素分别为中子幻数时，采用能隙参数公式计算的中子对能的壳结构不明显，而采用对力强度公式计算得到中子幻数核的中子对能都增大为零。和图 1 得到的结论相同，采用能隙参数公式不能很好地反映原子核的壳结构，而采用对力强度公式却可以很明显的反映壳结构。采用公式(5)得到的中子对能结果和由以上能隙参数公式得到的结果基本上是相同的，说明它们在处理对关联上有等效的一面。

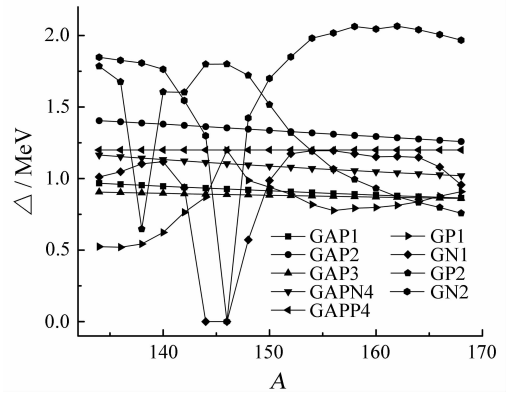


图 1 由 6 个参数公式得到的 Gd 链的能隙或等效能隙 GAP1, GAP2 和 GAP3 分别代表由公式(1), (2)和(3)计算得到的能隙；GAPN4 和 GAPP4 代表公式(4)计算得到中子和质子的能隙；GN1, GN1, GN2 和 GN2 分别代表公式(5)和(6)计算得到的中子和质子的能隙。

以上的讨论说明采用对力强度经验参数公式能很好地反映原子核的壳结构，而采用能隙经验参数公式却不能很好地说明这一点。这是它们不同的地方。但采用公式(5)得到的结果和以上得到的能隙参数公式得到的结果十分相近，从而很好地说明了这两种参数公式也具有等效性的一面。为了说明它

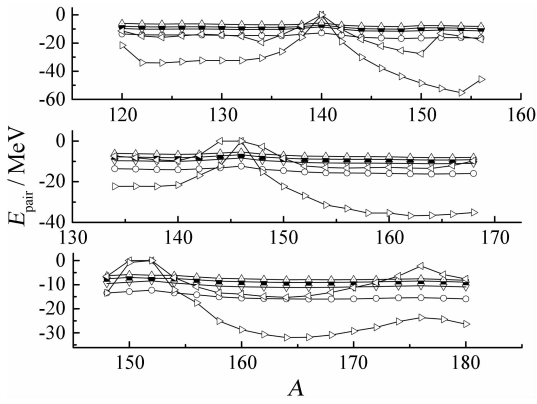


图 2 6 个对关联经验参数公式计算的 Ce, Gd 和 Yb 同位素链的中子对能  
 ■, ○, △ 和 ▽ 分别代表公式 (1), (2), (3) 和 (4) 算出的结果;  
 ◁, ▷ 代表公式 (5) 和 (6) 算出的结果 (图 3 和图 4 中的符号代表的意义与此相同)。

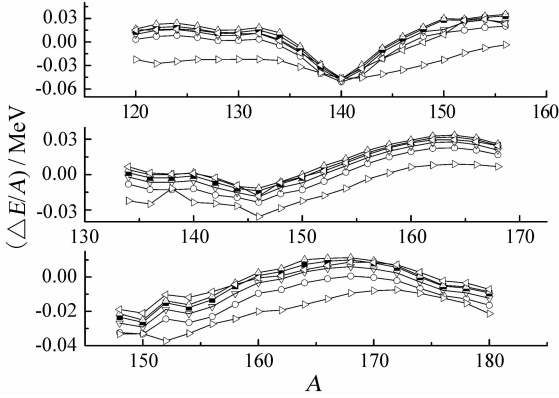


图 3 由对关联经验参数公式计算得到的 Ce, Gd 和 Yb 同位素链的结合能和实验值偏差 (实验数据来自文献 [24])

们之间的等效性, 我们也计算其它的物理量。图 3 是计算了它们的单核子结合能, 计算的结合能减去实验值, 从而得到它们的偏差。从图中可以看出, 最大偏差都小于 0.04 MeV, 单核子结合能一般是 10 MeV 左右, 相对误差小于千分之几, 都能很好地符合实验值。图 4 给出了计算的双中子分离能, 一般双中子分离能都大于 10 MeV, 最大偏差都小于 4 MeV, 大多都小于 2 MeV, 也都可以大致预言原子核的双中子分离能。不仅如此, 它们的偏差趋势也趋向一致: 公式 (5) 得到的结果和采用能隙公式 (1)–(4) 趋向于一致, 而采用公式 (6) 得到的结果和采用能隙公式 (1)–(4) 差别稍大些。现在研究原子核形变成为核物理研究的一个热点, 我们分别采用两类公式进行了计算, 计算结果如图 5 所示。选用公式 (2) 和公式 (6) 进行计算, 发现它们位能曲

线变化趋势一致。我们又进行了更为精确的计算, 得出采用公式 (8) 和 (2) 基态形变值分别为 0.204 和 0.202, 其实验值为 0.206 9<sup>[25]</sup>, 计算结果和实验值的一致性很好。

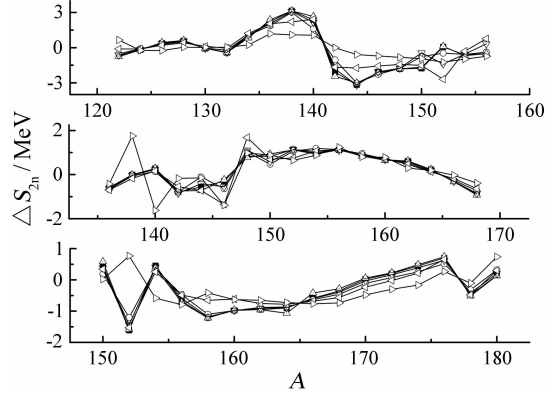


图 4 由对关联经验参数公式计算得到的 Ce, Gd 和 Yb 同位素链的双中子分离能和实验值偏差 (实验数据来自文献 [24])

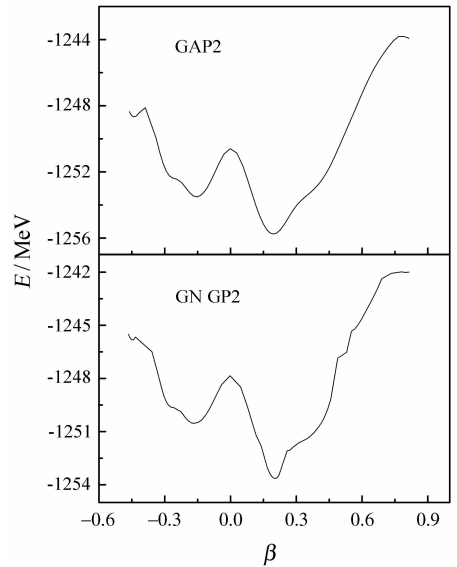


图 5 由公式 (2) 和 (8) 计算的 <sup>152</sup>Gd 位能曲线  
 GAP2 代表由公式 (2) 计算得到的结果, GN GP2 是由公式 (6) 计算的结果。

## 4 结论

在 RMF 理论框架下, 采用 BCS 方法, 不同的对关联的参数公式对稀土区元素 Ce, Gd, Yb 的同位素链进行了系统的计算和研究。发现计算中尽管采用对力强度经验公式和能隙经验参数公式, 在能否反映原子核的壳结构方面差别很大, 但采用公式对力强度经验参数公式 (5) 得到的结果和能隙参数公式的结果差别却很小, 采用经验参数公式 (6) 对

应的差别稍大些。总之,采用不同类别的参数公式得到的结果趋于一致,都能很好地反映原子核的基态性质。

### 参考文献 (References):

- [1] Serot B D, Walecka J D. *Adv Nucl Phys*, 1986, **16**: 1.
- [2] Reinhard P G. *Rep Prog Phys*, 1989, **52**: 439.
- [3] Ring P. *Prog Part Nucl Phys*, 1996, **37**: 193.
- [4] Meng J. *Nucl Phys*, 1998, **A635**: 3.
- [5] Meng J, Toki H, Zhou S G, *et al.* *Prog Part Nucl Phys*, 2006, **57**: 470.
- [6] Geng L S, Toki H, Sugimoto S, *et al.* *Prog Theor Phys*, 2003, **110**: 921.
- [7] Meng J, Tanihata I. *Nucl Phys*, 1999, **A650**: 176.
- [8] Guo Jianguo, Meng Jie, Zhang Shuangquan. *Nuclear Physics Review*, 2004, **21**(4): 355(in Chinese).  
(郭建友, 孟杰, 张双全. *原子核物理评论*, 2004, **21**(4): 355.)
- [9] Meng Jie, Zhuang Wei, Zhang Huangqiao. *Nuclear Physics Review*, 2003, **20**(2): 137(in Chinese).  
(孟杰, 张炜, 张焕乔. *原子核物理评论*, 2003, **20**(2): 137.)
- [10] Vogel P, Jonson B, Hansen P G. *Phys Lett*, 1984, **B139**: 227.
- [11] Möller P, Nix J R. *Nucl Phys*, 1992, **A536**: 20.
- [12] Satula W, Dobaczewski J, Nazarewicz W, *et al.* *Phys Rev Lett*, 1998, **81**: 3 599.
- [13] Bohr A, Mottelson B R. *Nuclear Structure(1)*. New York: Benjamin, 1969, 169.
- [14] Hu Jimin, Yang Baijun, Zheng Chunkai. *Nuclear theory*. Beijing: Atomic Energy Press, 1992, 70(in Chinese).  
(胡济民, 杨伯君, 郑春开. *原子核理论*. 北京: 原子能出版社 1992, 70.)
- [15] Dudek J, Majhofer A, Skalski J. *J Phys*, 1980, **G6**: 447.
- [16] Li Junqing, Ma Zhongyu, Chen Baoqiu. *Phys Rev*, 2002, **C65**: 064 305.
- [17] Serot B D. *Rep Prog Phys*, 1992, **55**: 1 855.
- [18] Gambhir Y K, Ring P, Thimet A. *Ann Phys (NY)*, 1990, **198**: 132.
- [19] Sugahara Y, Toki H. *Nucl Phys*, 1994, **A579**: 557.
- [20] Panda P K, Patra S K, Reinhard J, *et al.* *Int J Mod Phys*, 1997, **E6**: 307.
- [21] Gmuca S. *Nucl Phys*, 1992, **A547**: 447.
- [22] Hilaire S. *Phys Lett*, 1998, **B531**: 61.
- [23] Ding Bingang, Zhang Dali, Lu Dinghui. *High Energy Physics and Nuclear Physics*, 2006, **30**: 616(in Chinese).  
(丁斌刚, 张大立, 鲁定辉. *高能物理与核物理*, 2006, **30**: 616.)
- [24] Audi G, Wapstra A H, Thibault C. *Nucl Phys*, 2003, **A729**: 337.
- [25] Raman S, Nestor C W, Tikkanen P. *At Data Nucl Data Tables*, 2001, **78**: 1.

## Studies on Different Pairing Parameters in Rare-earth Nuclei\*

GUO Feng-liang<sup>1)</sup>, GUO Jian-you, WANG Shi-hu

(School of Physics and Material Science, Anhui University, Hefei 230039, China)

**Abstract:** In the framework of relativistic mean field (RMF) theory, we use BCS approximation to calculate Ce, Gd and Yb isotopic chains with different pairing parameters. And found whether they can show shell structure are different, but other physical quantities are similar by using different kinds of pairing parameters, both can correctly reproduce the experimental binding energies, two-neutron separation energy and potential curves.

**Key words:** relativistic mean field theory; BCS approximation; energy gap; pairing strength

\* Received date: 27 Jun. 2007; Revised date: 3 Mar. 2008

\* Foundation item: National Natural Science Foundation of China(10475001, 10675001); Program for New Century Excellent Talents in University of China (NCET-05-0558); Program for Excellent Talents in Anhui Province Universities(2006KJ259B)

1) E-mail: guofengliang999@126.com