文章编号: 1007－4627(2007)04－0318－05

双频激励下超晶格系统的混沌行为*

张　梅, 邵明珠, 罗诗裕#
(东莞理工学院, 广东东莞　523106)

摘　要: 假设超晶格"折沟道"对粒子的作用等效为形状相似的周期调制; 引入正弦平方势, 在小振幅近似下, 把粒子运动方程化为具有双频激励的 Duffing 方程。用 Melnikov 方法分析了系统的混沌行为。结果表明, 当外场为双频激励时, 系统将存在不同的次谐和超次谐分叉序列。由于系统的混沌行为与系统参数有关, 于是, 只需控制材料组分、或掺杂浓度, 就可望达到避免或控制混沌的目的, 为半导体超晶格的制备及其光磁电效应提供了理论分析。

关 键 词: 超晶格; 沟道效应; Melnikov 方法; 混沌
中图分类号: O471.5; O571.33　　　**文献标识码**: A

1　引言

所谓超晶格就是将两种晶格常数不同的材料交替生长而形成的多层薄膜结构。正是由于超晶格的特殊几何结构, 引起了人们对它的密切关注。如果选择 GaP 作基片, 沿[100]方向生长等厚的 GaP 和 $GaAs_xP_{1-x}$薄层, 由于在生长方向上晶格失配, 沿生长方向的各层将交替产生伸长和压缩形变, 导致(110)平面沟道偏折, 使直沟道变成了锯齿状的"折沟道", 从而改变了半导体材料的能带特征, 进而改变了半导体材料的光磁电性质。值得注意的是, 这种沟道的特点是在界面处沟道平面连续, 一阶导数不存在。由于超晶格具有特殊的层状结构, 可望用它把沟道辐射改造为 X 激光或 γ 激光[1—3], 开辟超晶格材料应用的新领域。由于超晶格材料的组分和层厚等均可以人为控制, 可望得到均匀半导体材料所不具有的光电特征。

值得注意的是, 粒子在(110)面沟道中运动时, 由于不断受到"折沟道"对它的作用, 它的横向动量在界面处发生突变, 其效果等效于在直沟道中运动的粒子受到如"折沟道"相似的相互作用势的调制。文献[4—6]对超晶格的位错动力学和粒子动力学问题作过分析, 本文进一步从一般运动方程出发, 把"折沟道"对粒子的作用等效为面沟道粒子受到与"折沟道"形状类似的周期调制, 利用我们曾经提出的正弦平方势[7], 在小振幅近似下, 把粒子运动方程化为具有硬弹簧特性的 Duffing 方程, 并用 Melnikov 方法分析了系统的混沌行为。结果表明, 如果外周期含有两种频率分量, 则可能导致不同的次谐和超次谐分叉序列。注意到系统的混沌行为与系统参数有关, 于是, 只需控制材料组分、或掺杂浓度, 就可望达到避免或控制混沌的目的, 为半导体超晶格的制备及其光磁电效应提供理论分析。

2　运动方程

选择自然坐标。假设 z 是粒子沿沟道中心线方向的平衡轨道, x 是粒子偏离平衡轨道的横向距离, 并假设粒子在(x, z)平面内运动。注意到超晶格的沟道不再是直沟道, 而是呈锯齿状的折沟道, 我们假设粒子在折沟道中的运动行为可以等效为粒子在直沟道中的运动, 再加上一个由于折沟道引起的周期势场的作用。考虑到运动阻尼, 粒子运动方程可表示为[4]

$$m_0\gamma\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\mu_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}=\chi\frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}, \quad (1)$$

其中, χ 是折沟道与等效势之间的比例因子, $2\mu_0(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$是由沟道粒子与沟道内部电子云相互作用

* 收稿日期: 2007－01－15; 修改日期: 2007－10－07
作者简介: 张　梅(1977－), 女(汉族), 陕西宝鸡人, 讲师, 从事超晶格量子阱光电性质研究; E-mail: zhangm@dgut.edu.cn
通讯联系人: 罗诗裕, E-mail: bgluoshy@dgut.edu.cn

产生的耗散项，$2\mu_0$ 是耗散（阻尼）系数，$z=vt$（v 是粒子纵向运动速度），m_0 是粒子静止质量，γ 是相对论因子，$V(x)$ 是直沟道中的粒子-晶体相互作用势，$W(z)$ 是与折沟道相似的周期势。对于薄层等厚的超晶格，如果层厚为 l，则 $W(z)$ 是以 $2l$ 为周期的锯齿形函数，且在一个超晶格周期（$2l$）内，有 $\int_0^{2l} W(z)\,\mathrm{d}z=0$。利用我们曾经提出的正弦平方势[7]，可将 $V(x)$ 表示为[8]

$$V(x)=K_1\beta_1\sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right),\qquad(2)$$

其中，$K_1\beta_1$ 是势阱深度，β_1 是势参数，且

$$K_1=\pi Z_1Z_2e^2Nd_p^2,$$

而 d 是相邻晶面间距，Z_1 和 Z_2 是入射粒子和晶体的原子序数，e 是电子电荷，N 是晶体原子密度，Nd 是晶体原子面密度。

首先分析方程（1）的右端项。注意到 $W(z)$ 是 z 的周期函数，则 $W(z)$ 可展开为傅立叶级数：

$$W(z)=\sum_{p=1}^{\infty}b_p\cos(p\omega z)\ ,\qquad(3)$$

其中展开系数

$$b_p=\frac{2}{l}\int_{-1/2}^{1/2}W(\tau)\cos\left(\frac{2\pi pz}{l}\right)\mathrm{d}z,\qquad(4)$$

而

$$\omega=\frac{2\pi v}{l}\sqrt{\frac{m_0\gamma}{K_1\beta_1}}\ 。\qquad(5)$$

再注意到，对于薄层等厚的超晶格，沟道轴的方向与 z 轴的关系呈锯齿状，我们假设调制函数 $W(z)$ 也具有相似形状，且可用函数表示为

$$W(z)=\begin{cases}k\left(\dfrac{l}{2}+z\right)\ , & l\leqslant z\leqslant 0\\[2ex] k\left(\dfrac{l}{2}-z\right)\ , & 0\leqslant z\leqslant l\end{cases}\qquad(6)$$

其中 k 是斜率。将式（6）代入式（4），可将展开系数具体表示为

$$b_p=\begin{cases}\dfrac{4kl}{(p\pi)^2}, & p\ \text{为奇数}\\[2ex] 0\ , & p\ \text{为偶数}\end{cases}\qquad(7)$$

将式（3）代入方程（1）右边，并考虑到式（7），则方程（1）右端完全确定。

再分析方程（1）左端第 2 项（阻尼项）。考虑到沟道粒子同晶体原子周围的电子云相互作用而损失能量，单位长度上的能损为 $2\mu_0(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$，其中 μ_0 由文献[9]给出，且可具体表示为

$$\mu_0=\frac{2\pi Lr_er_p\,jZ_2^2}{e\gamma^2A\beta}\left(\frac{c}{v^*}\right)^3,\qquad(8)$$

A 是靶原子量，而

$$\left.\begin{aligned}&r_e=\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0m_ec^2}\ ,\qquad r_p=\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0m_pc^2}\\ &j=Z_ien_e\beta\,c\ ,\qquad L\cong\ln\left(\frac{\lambda_D(v^*/c)^2}{2Z_2r_e}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

r_e 和 r_p 分别是经典电子半径和质子半径，n_e 是晶体的电子云密度，j 是粒子流密度，v^* 是粒子和电子之间的相对热速度，λ_D 是 Debye 屏蔽距离，β 是无量纲的粒子速度，c 是光速。

将式（2），（3），（6）和（8）代入方程（1），并令

$$\xi_1=\frac{2\pi x}{d_p},\quad \tau=\delta^{1/2}t,\quad \delta=\frac{2\pi^2K_1\beta_1}{m_0\gamma d_p^2}\ ,\qquad(10)$$

$$\mu=\frac{\mu_0}{\delta^{1/2}},\quad \Omega=\frac{p\ \omega v}{\delta^{1/2}},\quad c_p=\frac{2\pi\chi b_pp\omega}{md\delta}\ ,\qquad(11)$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_1}{\mathrm{d}\tau^2}+\sin\xi_1=-2\mu\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}\tau}-\sum_{p=1}c_p\sin(\Omega\,\tau)\ 。\qquad(12)$$

3　小振幅近似与系统的混沌行为

方程（12）是一个具有外周期作用的摆方程，不存在严格的解析解。注意到任何认识都是近似的，没有近似就没有认识。我们引入小振幅近似，把粒子运动方程化为具有双频激励的 Duffing 方程，并用 Melnikov 方法讨论这个系统的混沌行为。

将方程（12）$\sin\xi_1$ 作泰勒展开，在小振幅近似下，$\sin\xi_1$ 可用展开式中的前两项代替，且方程右边求和号中起主要作用的也只有前面少数几项。为了方便，又不失一般性，我们也只保留求和号中的前两项。于是，方程（12）可化为如下形式的 Duffing 方程：

$$\frac{d^2\xi_1}{d\tau^2}+\xi_1=-2\mu\frac{d\xi_1}{d\tau^2}+$$
$$\alpha\xi_1^3+c_1\cos(\Omega_1\tau)+c_2\cos(2\Omega_1\tau)\ ,\quad(13)$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{6},\quad c_{1,2}=\frac{2\pi\chi b_{1,2}\omega}{md\delta},$$
$$\Omega_1\tau=\frac{\pi}{2}+\Omega\tau\ ,\quad(14)$$

令

$$\xi=\sqrt{\alpha}\xi_1,\quad \varepsilon\gamma=2\mu,\quad \varepsilon f=\frac{c_1}{\sqrt{\alpha}}\approx\frac{c_2}{\sqrt{\alpha}}\ ,(15)$$

则方程(13)可进一步化为具有双频激励的 Duffing 方程

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+\xi=\xi^3+\varepsilon\{-\gamma\zeta+f[\sin(\Omega\tau)+\sin(2\Omega\tau)]\}。\quad(16)$$

方程(16)的等价系统为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}&=\zeta,\\ \dot{\zeta}&=-\xi+\xi^3+\varepsilon\{-\gamma\zeta+f[\sin(\Omega\tau)+\sin(2\Omega\tau)]\},\end{aligned}\quad(17)$$

其中 $\zeta=d\xi/d\tau$。当 $\varepsilon\neq0$ 时, 两条异宿轨道的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned}M(\tau_0)&=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_{\pm}^0(\tau)\{-\gamma\zeta_{\pm}^0(\tau)+f[\sin\Omega(\tau+\tau_0)+\sin2\Omega(\tau+\tau_0)]\}d\tau\\&=\pm f[I_1\sin(\Omega\tau_0)+I_2\sin(2\Omega\tau_0)]-\gamma I_3,\end{aligned}\quad(18)$$

其中

$$I_1=\sqrt{2}\pi\Omega\mathrm{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Omega\right),$$
$$I_2=2\sqrt{2}\pi\Omega\mathrm{csch}(\sqrt{2}\pi\Omega),$$
$$I_3=\frac{2\sqrt{2}}{3}。\quad(19)$$

产生 Smale 马蹄的混沌参数 f/γ 的阈值为

$$R_{\infty}=\frac{2\sqrt{2}}{3q}\ ,\quad(20)$$

其中

$$q=\max|I_1\sin(\Omega\tau_0)+I_2\sin(2\Omega\tau_0)|\ 。(21)$$

对任意给出的一对互质的自然数 m 和 n, 存在唯一的 κ, 使得

$$T_{\kappa}=4\sqrt{1+\kappa^2}K(\kappa)=\frac{2\pi m}{\Omega n}\ ,\quad(22)$$

其中 $K(\kappa)$ 是全椭圆积分, κ 是 Jacobian 椭圆函数的模。

现在计算次谐轨道的 Melnikov 函数, 通过不太复杂的计算, 可得次谐轨道的 Melnikov 函数

$$\begin{aligned}M^{m/n}&=\int_0^{mT}\zeta_{\kappa}(\tau)\{-\gamma\zeta_{\kappa}(\tau)+\delta[\sin\Omega(\tau+\tau_0)+\sin2\Omega(\tau+\tau_0)]\}\\&=\delta J_1(m,n)\sin(\Omega\tau_0)+\delta J_2(m,n)\sin(2\Omega\tau_0)-\gamma J_3(m,n)\ ,\end{aligned}\quad(23)$$

其中

$$J_1(m,n)=\begin{cases}0, & \text{当 } n\neq1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数时}\\ 2\sqrt{2}\pi\Omega\mathrm{csch}\left(\dfrac{m\pi K'(\kappa)}{2K(\kappa)}\right), & \text{当 } n=1 \text{ 或 } m \text{ 为奇数时}\end{cases}\quad(24)$$

$$J_2(m,n)=\begin{cases}0, & \text{当 } n\neq2 \text{ 或 } m \text{ 为偶数时}\\ \delta\sqrt{2}\pi\Omega\mathrm{csch}\left(\dfrac{m\pi K'(\kappa)}{2K(\kappa)}\right), & \text{当 } n=2 \text{ 且 } m \text{ 为奇数时}\end{cases}\quad(25a)$$

$$J_3(m,n)=\begin{cases}0, & \text{当 } n\neq2 \text{ 或 } m \text{ 为偶数时}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{3\pi\omega(1+\kappa^2)^{3/2}}J_1(m,2)\cdot[\kappa^2-1)K(\kappa)+(\kappa^2+1)E(\kappa)]\cdot\mathrm{sh}\dfrac{m\pi K'(\kappa)}{2K(\kappa)}, & \text{当 } n=2 \text{ 且 } m \text{ 为奇数时}\end{cases}\quad(25b)$$

$E(\kappa)$ 是第二类椭圆积分, $K'(\kappa)=K(\kappa')$, 而 κ' 是椭圆函数的补模。由式(23)中 $J_i(m,n)$(其中 $i=1,2$)的表达式可以看出, 当参数 f/γ 变化时, 系统式(17)存在两列次谐分叉序列:

(1) 第一列是 $n=1$, m 为奇数的次谐分叉序列, 即 $m/1=1, 3, 5$……。由式(24)和(25a)可导出产生此列次谐分叉轨道的参数 f/γ 阈值为

$$\begin{aligned}R_1^m(\Omega)&=\frac{J_2(m,1)}{J_1(m,1)}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3\pi\Omega(1+\kappa^2)^{3/2}}[(\kappa^2-1)K(\kappa)+\end{aligned}$$

$$(\kappa^2+1)E(\kappa)]\,\mathrm{sh}\,\frac{m\pi K'(\kappa)}{2K(\kappa)}\,,\tag{26}$$

（2）第二列是 $n=2$，m 为奇数的超次谐分叉序列，即 $m/2=1/2, 3/2, 5/2, \cdots$，由式(24)式和(25b)式可导出产生此列超次谐分叉轨道的参数 f/γ 阈值为

$$\begin{aligned}R_2^m(\Omega) &= \frac{J_3(m,2)}{J_1(m,2)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3\pi\Omega(1+\kappa^2)^{3/2}}[(\kappa^2-1)K(\kappa)+ \\ &\quad (\kappa^2+1)E(\kappa)]\,\mathrm{sh}\,\frac{m\pi K'(\kappa)}{2K(\kappa)}\,,\end{aligned}\tag{27}$$

对于任意固定的 Ω，当 $m\to\infty$（即 $\kappa\to1$）时，有

$$\begin{cases}R_1^m(\Omega)\to\dfrac{2}{3\pi\Omega}\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{2}\pi\Omega}{2}=R_1'(\Omega)\,,\\ R_2^m(\Omega)\to\dfrac{1}{3\pi\Omega}\mathrm{sh}\,\sqrt{2}\pi\Omega=R_1'(\Omega)\,,\end{cases}\tag{28}$$

其中，$R_1'(\Omega)$ 和 $R_2'(\Omega)$ 分别对应于基频激励 $\sin(\Omega\tau)$ 和倍频激励 $\sin(2\Omega\tau)$ 单独存在时，系统出现的无限次分叉的参数 f/γ 值。另外还可得到

$$R_\infty(\Omega)<R_1'(\Omega),\quad R_\infty(\Omega)<R_2'(\Omega)\,。\tag{29}$$

上式表明，完成单列无限次分叉的参数值 f/γ 比产生 Smale 马蹄变换意义下的混沌阈值大。

进一步利用 $K(\kappa)$ 和 $E(\kappa)$ 在 $\kappa\to1$ 时的级数展开，可估计出对于固定的 Ω，当 κ 充分接近于 1(即 m 充分大)时，有

$$R_1^m(\Omega)<R_1'(\Omega),\quad R_2^m(\Omega)<R_2'(\Omega)\,。\tag{30}$$

另一方面，对于固定 m，当 $\kappa\to0$（即 $\Omega\to m$）时，利用 $K(\kappa)$ 和 $E(\kappa)$ 在 $\kappa\to0$ 的级数展开式，也可以估计出，

$$R_1^m(\Omega)\to0\,,\quad m=1\tag{31}$$

$$R_1^m(\Omega)\to\infty\,,\quad m=3,5,7,\cdots\cdots\tag{32}$$

对于固定的 $m/2$，当 $\kappa\to0$，即 $\Omega\to m/2$ 时，也有

$$R_2^m(\Omega)\to0\,,\quad m=1\tag{33}$$

$$R_2^m(\Omega)\to\infty\,,\quad m=3,5,7,\cdots\cdots\tag{34}$$

综上所述，可以看出对于固定的 Ω，逐渐增大参数 f/γ 值，系统式(17)就有可能经过有限次次谐分叉和超次谐分叉而达到 Smale 马蹄意义下的混沌阈值。

4　结果和讨论

我们在经典物理框架内，把超晶格“折沟道”对粒子的作用等效为面沟道粒子受到与“折沟道”形状类似的周期调制，利用我们曾经提出的正弦平方势[7]，在小振幅近似下，把粒子运动方程化为具有双频激励的 Duffing 方程，并用 Melnikov 方法分析了系统的混沌行为。结果表明，如果外场含有两种频率分量，则可能导致不同的次谐和超次谐分叉序列。产生这两种分叉序列的阈值极限($m\to\infty$)是不相同的。注意到，系统参数 f，γ 或 f/γ 与超晶格材料的组分或掺杂物质、掺杂浓度有关，于是，我们就可望通过控制材料组分、或掺杂物质及掺杂浓度来调节这两个参数的比值，从而达到避免、控制或调节混沌的目的。

参考文献(References)：

[1] Korol A, Solovyov A V, Greiner W. J Phys, 1998, **G24**: L45.

[2] Korol A, Solovyov A V, Greiner W. Int J Mod Phys, 1999, **E8**: 49.

[3] Luo S Y, Shao M Z, Hu X D. HEP & NP, 2004, **28**(1): 96(in Chinese).
(罗诗裕，邵明珠，胡西多. 高能物理与核物理，2004，**28**(1)：96.)

[4] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Chin J Semiconductors, 2005, **26**(2): 294 (in Chinese).
(罗诗裕，邵明珠. 半导体学报，2005，**26**(2)：294.)

[5] Luo S Y, Shao M Z . Acta Phys Sin, 2004, **53**(4): 1 157(in Chinese).
(罗诗裕，邵明珠. 物理学报，2004，**53**(4)：1 157.)

[6] Luo S Y, Shao M Z. Nuclear Physics Review, 2002, **19**(4): 407(in Chinese).
(罗诗裕，邵明珠. 原子核物理评论，2002，**19**(4)：407.)

[7] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Chin Phys(USA), 1984, **4**(7): 670.

[8] Luo S Y, Shao M Z. Nuclear Physics Review, 2003, **20**(1): 55 (in Chinese).
(罗诗裕，邵明珠. 原子核物理评论，2003，**20**(1)：55.)

[9] Luo S Y, Shao M Z. Chin J Luminescence, 2005, **26**(4): 431 (in Chinese).
(罗诗裕，邵明珠. 发光学报，2005，**26**(4)：431.)

Chaotic Behaviour of Superlattice with Dual Frequency Excitation*

ZHANG Mei, SHAO Ming-zhu, LUO Shi-yu#

(*Dongguan University of Technology*, *Dongguan* 523106, *Guangdong*, *China*)

Abstract: It is assumed that a periodic modulation is equivalent to deflected channel of the superlattice. In the small amplitude approximation the particle motion equation is simplified to the Duffing equation with a hard-spring properties by using sine-squared potential. The chaotic behaviour is analysed by Melnikov method. It shows that the sub-harmonic bifurcation and the super-sub-harmonic bifurcation are presented in the system, the chaos can be controlled by controlling the parameters of the system. The result provided a theoretical analysis for the study of the photo-magneto-electric effects of superlattice.

Key words: superlattice; channelling effect; Melnikov method; chaos

* **Received date**: 15 Jan. 2007; **Revised date**: 7 Oct. 2007

Corresponding author: Luo Shi-yu, E-mail: bgluoshy@ dgut. edu. cn