

## β<sup>-</sup>衰变的能量和强度平衡计算

周春梅, 吴振东

(中国原子能科学研究院核物理研究所, 中国核数据中心, 北京 102413)

**摘要:** 论述了 β<sup>-</sup>衰变的能量和强度平衡的计算公式, 并以 <sup>95</sup>Nb 的 β<sup>-</sup>衰变为例说明其实际应用。

**关键词:** β<sup>-</sup>衰变; 能量平衡; 强度平衡; 计算公式

**中图分类号:** O571.3      **文献标识码:** A

### 1 引言

不稳定的原子核会经过 α, β<sup>-</sup>, β<sup>+</sup>, ε 和 IT(同质异能跃迁)等衰变方式中的一种或多种进行衰变, 并且一直衰变到稳定核素为止。原子核的这种衰变过程是一个完全独立的系统, 它除了要保持系统的能量平衡(即能量守恒)之外, 还要保持衰变强度的平衡。本文给出了 β<sup>-</sup>衰变的能量和强度平衡计算公式, 并以 <sup>95</sup>Nb 的 β<sup>-</sup>衰变为例说明其实际应用。

### 2 能量平衡

#### 2.1 β<sup>-</sup>衰变能

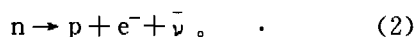
在 β<sup>-</sup>衰变过程中, 由母核基态衰变到子核基态所放出的能量为 β<sup>-</sup>衰变能 Q<sub>β<sup>-</sup></sub>,

$$Q_{\beta^-} = \{M(A, Z) - M(A, Z+1)\}c^2. \quad (1)$$

其中, M(A, Z)和 M(A, Z+1)分别为母核与子核的中性原子质量, c 是光在真空中的传播速度。不同核素的 β<sup>-</sup>衰变能 Q<sub>β<sup>-</sup></sub> 已经被评价, 可以查表得到<sup>[1]</sup>。

#### 2.2 β<sup>-</sup>粒子能量

β<sup>-</sup>衰变是原子核中的一个中子转变为一个质子, 同时发射一个 β<sup>-</sup>粒子和放出一个反中微子  $\bar{\nu}$  的原子核衰变过程, 即



β<sup>-</sup>衰变是一个三体过程。母核经 β<sup>-</sup>衰变到子

核的第 j 条能级的 β<sup>-</sup>粒子和反中微子  $\bar{\nu}$  的能量分别为 E<sub>β<sup>-</sup></sub> 和 E <sub>$\bar{\nu}$</sub> , 二者均为连续谱线能量,

$$E_{\beta^-} + E_{\bar{\nu}} = Q_{\beta^-} + E_{Pl} - E_{dj}, \quad (3)$$

式中, E<sub>Pl</sub> 为母核发生 β<sup>-</sup>衰变的能级能量(母核基态的 E<sub>Pl</sub> = 0), E<sub>dj</sub> 为子核第 j 条能级的能量, Q<sub>β<sup>-</sup></sub> 为母核基态 β<sup>-</sup>衰变到子核基态的 β<sup>-</sup>衰变能。β<sup>-</sup>粒子的最小能量和最大能量分别为

$$E_{\beta^-, \min} = 0, \quad E_{\beta^-, \max} = Q_{\beta^-} + E_{Pl} - E_{dj}. \quad (4)$$

实际应用中, 多需要采用平均能量。母核经 β<sup>-</sup>衰变到子核的第 j 条能级的 β<sup>-</sup>粒子的平均能量是  $\bar{E}_{\beta^-}$  和反中微子  $\bar{\nu}$  的平均能量是  $\bar{E}_{\bar{\nu}}$ 。β<sup>-</sup>粒子的平均能量  $\bar{E}_{\beta^-}$  可由 LOGFT 程序计算得到。由(3)式得,

$$\bar{E}_{\bar{\nu}} = \bar{E}_{\beta^-, \max} - \bar{E}_{\beta^-}. \quad (5)$$

由(2)式可知,

$$I_{\bar{\nu}} = E_{\beta^-}. \quad (6)$$

母核经 β<sup>-</sup>衰变到子核的第 j 条能级的绝对强度为 I<sub>β<sup>-</sup></sub>, 反中微子  $\bar{\nu}$  的平均能量为  $\bar{E}_{\bar{\nu}}$ , 则有 β<sup>-</sup>衰变过程中放出的 β<sup>-</sup>粒子的总平均能量 E<sub>β<sup>-</sup></sub> 与反中微子的总平均能量 E <sub>$\bar{\nu}$</sub>  分别为

$$E_{\beta^-} = \sum_j I_{\beta^-} \bar{E}_{\beta^-}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E_{\bar{\nu}} &= \sum_j I_{\bar{\nu}} \cdot \bar{E}_{\bar{\nu}} = \sum_j I_{\beta^-} \cdot (E_{\beta^-, \max} - \bar{E}_{\beta^-}) \\ &= \sum_j I_{\beta^-} \cdot (Q_{\beta^-} + E_{Pl} - E_{dj} - \bar{E}_{\beta^-}). \end{aligned} \quad (8)$$

### 2.3 $\gamma$ 射线与 X 射线能量

母核发生  $\beta^-$  衰变后, 通常情况下, 子核处于激发态。处于高激发态的子核通过  $\gamma$  跃迁退激发到低激发态, 一直退激发到子核基态。激发态的子核除了发射  $\gamma$  射线退激发以外, 还通过发射内转换电子退激发。伴随内转换电子发射又会产生 X 射线发射。

假定第  $i$  条  $\gamma$  射线的能量为  $E_{\gamma_i}$ , 其强度为  $I_{\gamma_i}$ ,  $\gamma$  射线总能量为  $E_{\gamma}$ , 则有

$$E_{\gamma} = \sum_i E_i(\gamma) = \sum_i E_{\gamma_i} \cdot I_{\gamma_i} \quad (9)$$

假定第  $k$  条 X 射线的能量为  $E_{X_k}$ , 强度为  $I_{X_k}$  (由内转换电子产生的 X 射线的强度计算, 请参考文献 [2]), 其辐射能量为  $E_k(X)$ , 则有

$$E_k(X) = E_{X_k} \cdot I_{X_k} \quad (10)$$

X 射线总能量为  $E_X$ , 则有

$$E_X = \sum_k E_{X_k} \cdot I_{X_k} + E_{X_L} \cdot I_{X_L} \quad (11)$$

在上式中, K-X 射线主要包括  $K_{\alpha_2}$ ,  $K_{\alpha_1}$  和  $K_{\beta}$  X 射线。

### 2.4 内转换电子和俄歇电子能量

假定能量为  $E_{\gamma_i}$  的第  $i$  条  $\gamma$  射线, K, L 和 M 壳层电子的结合能分别为  $E_{B_K}$ ,  $E_{B_L}$  和  $E_{B_M}$ 。则 K, L 和 M 电子壳层的内转换电子能量分别为:

$$E_{eK_i} = E_{\gamma_i} - E_{B_K} \quad (12)$$

$$E_{eL_i} = E_{\gamma_i} - E_{B_L} \quad (13)$$

$$E_{eM_i} = E_{\gamma_i} - E_{B_M} \quad (14)$$

令第  $i$  条  $\gamma$  射线的强度为  $I_{\gamma_i}$ , 它的 K, L 和 M 电子壳层的内转换电子系数分别为  $\alpha_{K_i}$ ,  $\alpha_{L_i}$  和  $\alpha_{M_i}$ , 则其内转换电子强度分别为:

$$I_{K_i} = I_{\gamma_i} \alpha_{K_i} \quad (15)$$

$$I_{L_i} = I_{\gamma_i} \alpha_{L_i} \quad (16)$$

$$I_{M_i} = I_{\gamma_i} \alpha_{M_i} \quad (17)$$

并令第  $i$  条  $\gamma$  射线的内转换电子能量为  $E_i(\text{ce})$ ,

$$E_i(\text{ce}) = I_{\gamma_i} [(E_{\gamma_i} - E_{B_K}) \alpha_{K_i} + (E_{\gamma_i} - E_{B_L}) \alpha_{L_i} + (E_{\gamma_i} - E_{B_M}) \alpha_{M_i}] \quad (18)$$

令内转换电子总能量为  $E_{\text{ce}}$ , 则有

$$E_{\text{ce}} = \sum_i E_i(\text{ce}) = \sum_i I_{\gamma_i} [(E_{\gamma_i} - E_{B_K}) \alpha_{K_i} + (E_{\gamma_i} - E_{B_L}) \alpha_{L_i} + (E_{\gamma_i} - E_{B_M}) \alpha_{M_i}] \quad (19)$$

由于内转换电子发射会使电子壳层产生空穴, 外壳层电子将填充这些空穴, 并发射俄歇电子。令 K 壳层俄歇电子的能量为  $E_{A_K}$ ; L 壳层俄歇电子的能量为  $E_{A_L}$ , 其强度分别为  $I_{A_K}$  和  $I_{A_L}$  (俄歇电子能量和强度的计算可参考我们的文章<sup>[3]</sup>), 俄歇电子总能量为  $E_{\text{Auger}}$ , 则有

$$E_{\text{Auger}} = I_{A_K} \cdot E_{A_K} + I_{A_L} \cdot E_{A_L} \quad (20)$$

### 2.5 原子核反冲能量

$\gamma$  射线发射时, 原子核会有核反冲, 并带走一部分动能  $E_R$ ,

$$E_{R_i} = \frac{1}{2} M v^2 \cong \frac{1}{2} \frac{E_{\gamma_i}^2}{2Mc^2} \\ = 5.3678 + 10^{-7} E_{\gamma_i}^2 / A \quad (21)$$

式中,  $M$  是核质量,  $v$  是核反冲速度,  $A$  是核质量数,  $E_{\gamma_i}$  是以 keV 为单位的第  $i$  条  $\gamma$  射线能量。可以看出, 当轻核时, 或  $\gamma$  射线能量较高时,  $E_R$  是不能被忽略的。

总的核反冲能量

$$E_R = \sum_i E_{R_i} = \sum_i 5.3678 \times 10^{-7} E_{\gamma_i}^2 / A \quad (22)$$

### 2.6 未放入纲图的 $\gamma$ 射线能量

由于有些被测量的  $\gamma$  射线不能被放入衰变纲图中, 对于这部分  $\gamma$  射线应计算它们对能量平衡的贡献。令未放入纲图的第  $n$  条  $\gamma$  射线的能量为  $E_{\gamma_n}$ , 其强度为  $I_{\gamma_n}$ , 其能量为  $E_{\gamma}(n)$ , 则有

$$E_{\gamma}(n) = E_{\gamma_n} \cdot I_{\gamma_n} \quad (23)$$

令放入纲图的  $\gamma$  射线的总能量为

$$E_{\gamma} = \sum_n E_{\gamma_n} \cdot I_{\gamma_n} \quad (24)$$

### 2.7 能量平衡

为方便起见, 令

$$E_{\gamma+X} = E_{\gamma} + E_X \quad (25)$$

$$E_{ce+Auger} = E_{ce} + E_{Auger}, \quad (26)$$

则有

$$E_T = E_R + E_{\beta^-} + E_{ce+Auger} + E_{\gamma+X} + E_{\gamma} + E_{\nu}, \quad (27)$$

再令

$$E_{ab} = E_R + E_{\beta^-} + E_{ce+Auger} + E_{\gamma+X} + E_{\gamma}, \quad (28)$$

式中,  $E_{ab}$  是被物质吸收的辐射衰变能量, 而中微子的总平均能量  $E_{\nu}$  是因其穿透能力非常强, 不能被物质吸收。(27) 式中,  $E_T$  是辐射衰变的总能量。

吸收的辐射衰变能量  $E_{ab}$  对核反应堆安全和放射性治疗都是非常重要的参数。通常情况下, 它和  $\beta^-$  衰变的辐射能量  $Q_{\beta^-} \cdot BR$  应该是相等的。其中,  $BR$  是  $\beta^-$  衰变的分支比, 通常情况下  $BR = 100\%$ 。因此, 根据能量平衡得

$$E_T = Q_{\beta^-} \cdot BR. \quad (29)$$

实际上, 由于测量条件的限制和测量误差等诸多原因,  $E_T$  和  $Q_{\beta^-} \cdot BR$  不可能完全相等。它们只能在其误差范围内符合(或称自洽)。

### 3 强度平衡

一般情况下, 除  $\beta^-$  衰变能量平衡以外, 最重要

的物理自洽是其子核各激发能级的强度平衡。

#### 3.1 除基态和最高激发态外的其它能级

对于除基态和最高激发态外的其它能级, 原则上对子核各条  $j$  能级的跃迁  $\gamma$  射线绝对强度应满足

$$I_{\beta_j^-} = \left[ \sum_o I_{\gamma_{jo}} (1 + \alpha_{jo}) - \sum_i I_{\gamma_{ij}} (1 + \alpha_{ij}) \right], \quad (30)$$

式中,  $I_{\gamma_{jo}}$ ,  $I_{\gamma_{ij}}$ ,  $\alpha_{jo}$  和  $\alpha_{ij}$  分别是离开和进入第  $j$  条能级的  $\gamma$  射线的绝对强度和总内转换系数,  $I_{\beta_j^-}$  是  $\beta^-$  衰变到第  $j$  条能级的强度。即离开和进入能级  $j$  的所有跃迁  $\gamma$  射线绝对强度之差应等于母核  $\beta^-$  衰变至能级  $j$  的  $\beta^-$  射线强度(发射几率)  $I_{\beta_j^-}$ 。

#### 3.2 基态

对子核基态, 至基态的所有跃迁  $\gamma$  射线绝对强度之和应满足

$$(100 - I_{\beta_0^-}) = \sum_j I_{\gamma_{j0}} (1 + \alpha_{j0}), \quad (31)$$

式中,  $I_{\beta_0^-}$  是  $\beta^-$  衰变至基态的强度,  $I_{\gamma_{j0}}$  是由能级  $j$  跃迁至基态的  $\gamma$  射线绝对强度,  $\alpha_{j0}$  是它的总内转换系数。

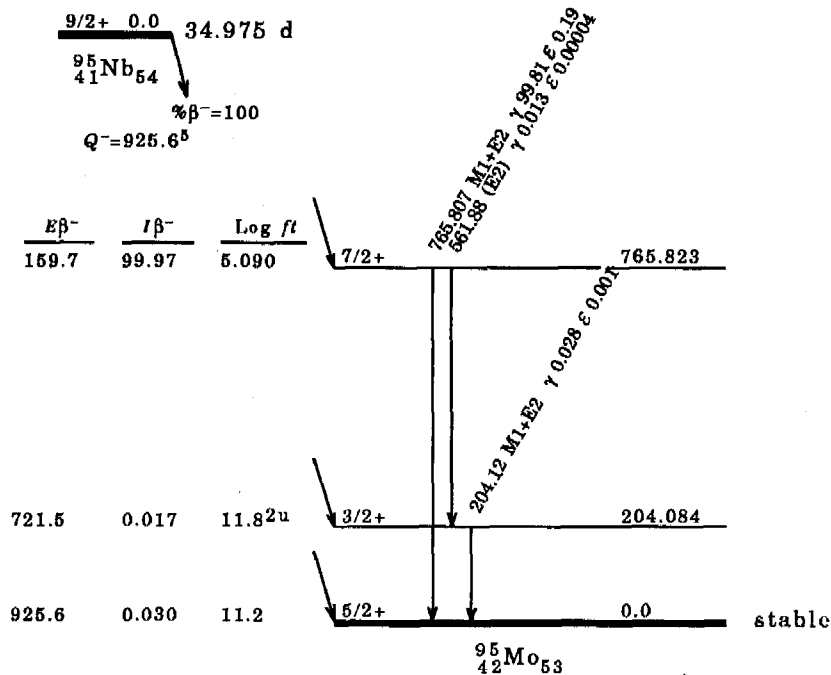


图 1  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变纲图

### 3.3 最高激发态

对于核最高激发能级 L, 离开能级 L 的所有跃迁  $\gamma$  射线绝对强度之和应满足

$$I_{\beta L} = \sum_0 I_{\gamma_{L0}} (1 + \alpha_{L0}), \quad (32)$$

式中,  $I_{\gamma_{L0}}$  是离开子核最高激发能级 L 的第 o 条  $\gamma$  射线的绝对强度,  $\alpha_{L0}$  是它的总内转换系数,  $I_{\beta L}$  是母核  $\beta^-$  衰变至最高激发能级 L 的  $\beta^-$  射线强度(发射几率)。

## 4 应用实例

以  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变<sup>[3]</sup> 为例说明其实际应用。图 1 是  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变纲图, 并分别标明了  $\beta^-$  衰变至子核

各条能级的  $\beta^-$  最大衰变能量  $E_{\beta^-}$  及其衰变强度  $I_{\beta^-}$ , 和  $\gamma$  射线的能量、多极性、发射  $\gamma$  射线及其内转换电子的强度、与相对位置等。表 1 给出了  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变至子核各条能级的  $\gamma$  射线、内转换电子、X 射线、Auger 电子的能量及其绝对强度, 以及  $\beta^-$  衰变的最大能量  $E_{\beta^-}(\text{max})$ 、平均能量  $E_{\beta^-}(\text{Avg})$  与强度和  $\beta^-$  衰变的强度  $I_{\beta^-}$ , 它们是用 RADLST 程序<sup>[2]</sup> 计算的。

### 4.1 能量平衡

对表 1 数据按照辐射能量平衡的计算公式进行计算, 并将得到的结果列于表 2。由表 2 可看出, 在计算误差范围内,  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变能量与辐射总能量是平衡(或称自洽)的。

表 1  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变的辐射数据

辐射类型	能量/keV	绝对强度(%)	辐射类型	能量/keV	绝对强度/(%)
$\beta_1^-$	max159.8 <sup>a</sup> 5		XK <sub>a2</sub> <sup>@</sup>	17.374 31 4	0.028 4
	Avg43.36 15	99.97 3	XK <sub>a1</sub> <sup>@</sup>	17.479 3 1	0.054 7
$\beta_2^-$	max721.5 5		XK <sub><math>\beta</math></sub> <sup>@</sup>	19.60	0.016 2
	Avg283.58 20	0.017 10	$\gamma_1^{++}$	204.12 1	0.028 9
$\beta_3^-$	max925.6 5		$\gamma_2$	561.88 2	0.013 3
	Avg321.94 21	0.030 5	$\gamma_3$	765.807 6	99.81 3
eAu <sub>L</sub> <sup>#</sup>	2.270	0.141 23	eCe <sub>aK</sub> <sup>§</sup>	745.807 6	0.128 17
eAu <sub>K</sub> <sup>#</sup>	14.80	0.030 4	eCe <sub>L</sub> <sup>§</sup>	762.942 6	0.014 15
XL <sup>§</sup>	2.290	0.005 9 10			

<sup>a</sup> 不确定度(误差); 数据数字后空格给出的数字为其不确定度(误差)。例如, 159.85 表示  $159.8 \pm 0.5$  (最后一位对齐, 下同); # 分别是 L 和 K 壳层的欧歌电子; § L 壳层的 X 射线; @ 分别是不同能量的 K 壳层的 X 射线; ++ 编号为 1 的  $\gamma$  射线; § 编号为 3 的  $\gamma$  射线的 K 和 L 壳层的内转换电子(下同)。

表 2  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变辐射能量计算结果

	$E_{\beta^-}$	$E_{\text{Ce+Auger}}$	$E_{\gamma+X}$	$E_R$	$E_e$	$E_{\text{ob}}$	$E_T$	$Q \cdot BR$
能量	43.492	1.067	764.500	0.004	116.636	809.063	925.699	925.600
能量误差	0.154	0.167	0.231	0.003	0.163	0.324	0.363	0.500

### 4.2 强度平衡

对表 1 数据按照各条激发能级的强度平衡计算公式(30), (31)和(32)进行了计算, 并将结果列于表 3。在表 3 中,  $RI_{\text{OUT}}$ ,  $RI_{\text{IN}}$ ,  $TI_{\text{OUT}}$ 和  $TI_{\text{IN}}$  分别是离开和进入子核各条能级的  $\gamma$  射线的绝对强度和包括内

转换电子与  $\gamma$  射线的绝对强度  $I_{\beta}^{\text{calc}}$  和  $I_{\beta}^{\text{m}}$  分别是根据强度平衡计算公式计算的和测量(在图 1 中所示)的  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变至子核各条能级的衰变强度。由表 3 可看出, 在计算误差范围内,  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变至子核各条激发能级的强度是平衡(或称自洽)的。

表 3  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  衰变至子核各条激发能级的强度计算结果(单位:%)

Level/keV	$RI_{\text{OUT}}$	$RI_{\text{IN}}$	$RI_{\text{OUT}}-RI_{\text{IN}}$	$TI_{\text{OUT}}$	$TI_{\text{IN}}$	$TI_{\text{OUT}}-TI_{\text{IN}}$	$I_{\beta}^{\text{Calc}}$	$I_{\beta}^{\text{In}}$
0.0	0.000	99.811	-99.811	0.000	99.987 9	-99.987 9	0.014	0.030 5
204.084 9	0.028 9	0.013 3	0.015 10	0.030 9	0.013 3	0.017 10	0.017 10	0.017 10
765.823 6	99.823 3	0.000	99.823 3	99.973	0.000	99.973	99.973	99.973

## 5 讨论

### 5.1 对其它衰变的能量和强度的平衡计算

上面只讨论了  $\beta^-$  衰变的能量和强度的平衡计算问题。对  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\beta^+$  和 IT 衰变能量和强度的平衡计算,其原理是一样的。但对  $\beta^+$  衰变的能量计算中,应该注意的是  $\beta^+$  衰变也是一个三体过程,其

$\beta^+$  和中微子带走的能量也是连续谱线,应先计算它的平均能量,然后再计算其带走的总平均能量。

### 5.2 衰变能量和强度平衡计算的意义

其计算结果是检验测量数据和衰变纲图的准确性和精确性的一种好方法。此外,它也是衰变热量计算和吸收剂量计算的必需数据。

### 参考文献:

- [1] Audi G, Wapstra A H. Nuclear Physics, 1995, **595**: 409.      核物理, 2003, **27**(4): 341.  
 [2] Zhou Chunmei, Huang Xiaolong, Wu Zhendong. 高能物理与      [3] Burrows T W. Nuclear Data Sheets, 1993, **68**: 635.

## Balance Calculations of Energies and Intensities from $\beta^-$ Decays

ZHOU Chun-mei, WU Zhen-dong

(China Nuclear Data Center, Department of Nuclear Physics, China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China)

**Abstract:** The calculation formulas of energy balance and intensity balance from  $\beta^-$  decays are presented here. The example of  $^{95}\text{Nb}$   $\beta^-$  decay is shown to illustrate its practical application.

**Keywords:**  $\beta^-$  decay; energy balance; intensity balance; calculation formula