

文章编号: 1007-4627(2005)04-0370-04

反常扩散: 定向通过一个势能鞍点*

包景东

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

摘 要: 考虑一个处于非 Ohmic 环境下的系统定向通过一个倒谐振子势鞍点的输运过程, 给出了通过几率的解析式。结果表明在欠扩散情况下, 时间有关的通过几率出现一个很强的超前峰和回流, 这可能有助于理解重核融合系统的激发函数随质心能量的慢增长机制。

关键词: 反常扩散; 通过几率; 超前峰; 回流

中图分类号: O415.6 **文献标识码:** A

1 引言

近几年来, 在破缺媒介及非大数定理统计下的反常扩散现象引起了人们的极大关注^[1]。一个自由粒子的方均位移在长时间后正比于时间的分数次幂: $\langle x^2(t) \rangle \propto t^\delta$, 其中, $0 < \delta < 1$ 为欠扩散, $\delta = 1$ 是正常扩散, $1 < \delta < 2$ 为超扩散, $\delta = 2$ 系弹道扩散^[2]。描写这一运动的主要手段有: 广义 Langevin 方程、分数 Fokker-Planck 方程或分数 Langevin 方程、Levy 飞行、Tsallis 统计和连续时间无规行走 (CTRW) 等。但这些研究大都局限于自由场, 很少的有势信息被展现。从原则上讲, 核内部核子运动是一个有限体系, 对它的马尔科夫统计有改进的余地^[3]; 而且复合核在大形变处由于颈部窗口的近闭合, 耗散将被混沌运动所修正, 则核的集体摩擦强度要减低 3—4 倍。考虑这些因素的一个动力学方案是计及系统对它运动历史的记忆, 即非 Ohmic 摩擦机制^[4]。这一模型能很好地体现系统长时间的动力学行为取决于噪声谱分布的低频部分^[5]。

本文将论及一个逆和反常的 Kramers 问题, 给出了处于非 Ohmic 环境中的粒子通过一个倒谐振子势鞍点几率的解析式, 讨论了它与时间有关的行为, 并应用到重核融合几率的计算。

2 模型和结果

系统的运动方程由如下的广义 Langevin 方程

所描述:

$$m\ddot{x}(t) + m \int_0^t \gamma(t-s)\dot{x}(s)ds + U'(x) = \xi(t), \quad (1)$$

式中的无规力 $\xi(t)$ 服从高斯分布, 其系综平均为零, 关联满足涨落耗散定理

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= mk_B T \gamma(t-t') \\ &= 2mk_B T \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} J(\omega) \cos \omega(t-t'), \end{aligned} \quad (2)$$

这里 k_B 是 Boltzmann 常数, T 是热浴温度, 势被选成一个倒谐振子势: $U(x) = -(1/2)m\omega_b^2 x^2$, 热浴振子的谱密度 $J(\omega)$ 为非 Ohmic 形式, 即 $J(\omega) = \gamma_b(\omega/\omega_c)^{\delta-1}$, 其中 ω_c 是一个使 $m\gamma_b$ 具有时间倒数数量纲的参考频率。

由于噪声满足高斯分布, 而方程(1)在代入了倒谐振子势后是线性的, 所以在任意时刻系统的空间分布可用以下的高斯函数来表示:

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t)}} \exp\left(-\frac{[x(t) - \langle x(t) \rangle]^2}{2\sigma_x^2(t)}\right), \quad (3)$$

式中坐标的一次和二次矩为

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= (1 + \omega_b^2 \int_0^t \Phi_\delta(t') dt') x_0 + \Phi_\delta v_0, \\ \sigma_x^2(t) &= 2mk_B T \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \Phi_\delta(t-t_1). \end{aligned}$$

收稿日期: 2005-09-14

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10235020, 10075007); 教育部跨世纪优秀人才基金资助项目

作者简介: 包景东(1962-), 男(满族), 辽宁瓦房店人, 教授, 博士生导师, 从事统计物理、核理论和计算物理的研究和教学工作;
E-mail: jdbao@bnu.edu.cn

$$\Phi_\delta(t - t_2)\gamma(t_1 - t_2), \quad (4)$$

这里 x_0 和 v_0 是系统的初始坐标和速度。响应函数的 Laplace 变换为 $\hat{\Phi}_\delta(s) = (s^2 + s\hat{\gamma}[s] - \omega_b^2)^{-1}$ ，其中 $\hat{\gamma}[s] = \tilde{\gamma}_\delta s^{\delta-1}$ 是阻尼核函数的 Laplace 变换，有效阻尼强度因子 $\tilde{\gamma}_\delta = \gamma_\delta \sin^{-1}(\delta\pi/2)$ 。运用留数定理，我们可以获得响应函数的一个完整表达式：

$$\Phi_\delta(t) = \frac{\tilde{\gamma}_\delta \sin(\pi\delta)}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^\delta \exp(-rt) dr}{(r^2 - \omega_b^2)^2 + \tilde{\gamma}_\delta^2 r^{2\delta} + 2(r^2 - \omega_b^2)\tilde{\gamma}_\delta r^\delta \cos(\pi\delta)} + R_\delta(t), \quad (5)$$

式中

$$R_\delta(t) = \begin{cases} \frac{\exp(a_M t)}{2a_M + \delta\tilde{\gamma}_\delta a_M^{\delta-1}}, & 1 < \delta < 2 \\ \frac{1}{a_1 - a_2} [\exp(a_1 t) - \exp(a_2 t)], & \delta = 1 \\ \frac{\exp(a_M t)}{2a_M + \delta\tilde{\gamma}_\delta a_M^{\delta-1}} + E(t), & \delta_0 < \delta < 1 \\ E(t), & 0 < \delta < \delta_0 \end{cases} \quad (6)$$

这里

$$E(t) = \frac{\exp(acos\varphi t)}{4a^2 + \delta^2 \tilde{\gamma}_\delta^2 a^{2(\delta-1)} + 4\delta\tilde{\gamma}_\delta a^\delta \cos(2-\delta)\varphi} \cdot \{4a \cos[at \sin\varphi - \varphi] + 2\delta\tilde{\gamma}_\delta a^{\delta-1} \cdot \cos[at \sin\varphi - (\delta-1)\varphi]\}. \quad (7)$$

方程(6)中的 a_M 是 $s^2 + \tilde{\gamma}_\delta s^\delta - \omega_b^2 = 0$ (当 $\delta \neq 1$) 唯一的正根；若 $\delta < \delta_0$ 时，该方程无实数根； a_1 和 a_2 是当 $\delta = 1$ 时，该方程的两个负实根；当 $0 < \delta < 1$ 时，该方程有一对复根，写作 $s = a \exp(\pm i\varphi)$ ，其中 $a > 0, |\varphi| < \pi^{[6,7]}$ 。系统通过势能鞍点的几率被定义为

$$\chi(x_0, v_0, t) = \int_0^\infty W(x, t) dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\langle x(t) \rangle}{\sqrt{2}\sigma_x(t)}\right). \quad (8)$$

图 1 给出了两种初始速度下，系统通过几率随时间的演变。显然，如果系统的初始动能小于其临界值^[8]，热涨落和扩散帮助它越过鞍点；当系统的初始动能大于临界值，则扩散抑制定向运动。一般情况下，长时间后系统的平均位置与它的方均根随时间同步增长，则通过几率趋于一个常数。有趣的是，对于一个慢扩散系统(δ 接近 δ_0 ， a_M 的值很小)而言，在开始阶段，它以一个很大的几率通过鞍点，

但经过一段驰豫时间后，又返回其原所处的鞍点一侧，导致通过几率降到很小，显示出一个很强的超前峰(overshooting)现象。原因在于这种系统对它的初始位置的记忆远超过对初始速度的记忆。

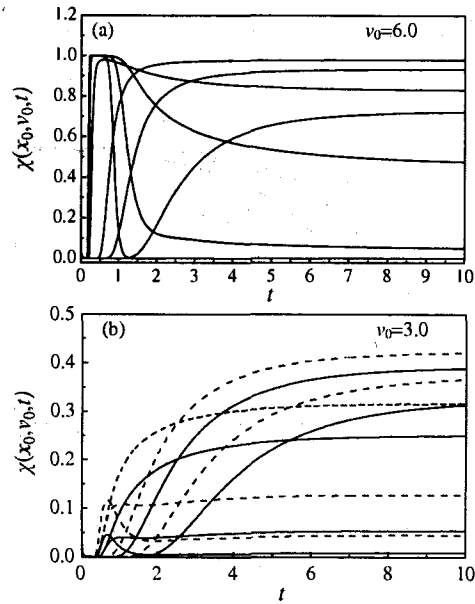


图 1 不同反常指数下与时间有关的通过几率

所用的参数为 $m\omega_b^2 = 1.0, \gamma_\delta = 4.0, x_0 = -1.0$; (a) $\delta = 1.4, 1.6, 1.0, 1.8, 0.8, 0.6, 0.4$, 从上至下; (b) $\delta = 1.4, 1.8, 1.0, 0.8, 0.6$, 从上至下; — 的 $T = 0.2$, - - - 的 $T = 0.4$ 。

图 2 显示了鞍点流 $j(t) = dx(x = x_b, v_0, t)/dt$ 作为时间的函数。注意到长时间后鞍点流消失，这意味着作为一个系综的实验粒子中，一部分通过鞍点，一部分衰亡；而极大流对应于平均轨道的最快增长。尤其是，对欠扩散粒子($\delta < 1$)，鞍点流是从负值渐进地趋于零，即出现回流现象。事实上，这种粒子分布的中心通过鞍点后，它的宽度随时间的

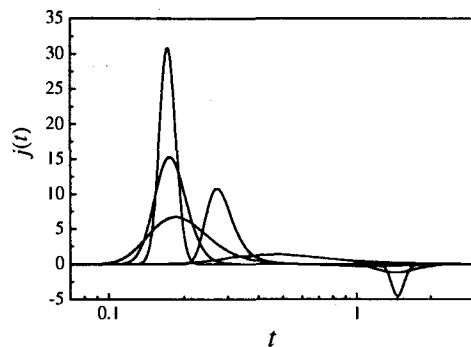


图 2 鞍点几率流随时间的变化

参数为 $m\omega_b^2 = 1.0, \gamma_\delta = 4.0, x_0 = -1.0, v_0 = 6.0, T = 0.2, \delta = 0.4, 0.6, 1.0, 0.8, 1.4$, 由上至下。

增加才开始变快,那么分布一侧的尾巴将退回鞍点内侧,形成一个鞍点负流。这个负几率流大于同时从初始位置通过鞍点的粒子正流,由于此时发现粒子在鞍点内侧的几率较小,故净几率速流小于零。我们在用 Langevin 模拟^[9-11]结合最后通过位垒方法研究受激裂变时,也发现了一种动力学回流,这种效应降低了裂变速率。

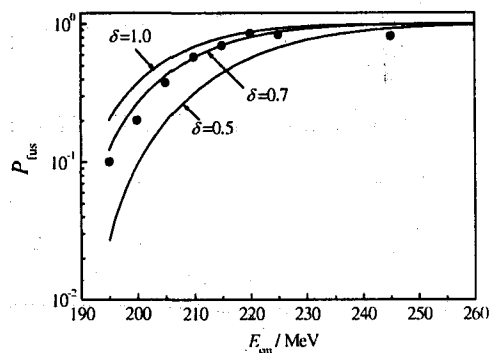


图 3 $^{100}\text{Mo}+^{100}\text{Mo}$ 反应的熔合几率随质心能量的变化
• 是实验数据^[12]。

我们将此模型应用于一个典型的重核熔合系统： $^{100}\text{Mo}+^{100}\text{Mo}$ ，计算了其熔合几率 P_{fus} （即鞍点通过几率）作为质心能量 E_{cm} 的函数，结果见图 3。我们采用双中心核表面模型和墙加窗一体耗散机制

获得形变势能、惯性和磨擦张量^[13, 14]，核在鞍点的温度定义为 $aT^2 = E_{\text{cm}} - U_b$ ，其中能级密度参数 $a = A/10$ (A 是复合核的核子数)， U_b 为鞍点势能。从图中可见，正常扩散给出的熔合几率随质心能量变化较快，而用 $\delta = 0.7$ 的欠扩散机制所计算的结果与实验值较好地符合。

3 总结

重核熔合激发函数随质心能量慢增长的实验结果，需要核大振幅集体运动是一种强耗散过程，然而核在大形变处，内部混沌运动又大大减低了核单体磨擦。这个矛盾应用新的扩散机制来解决，而欠扩散就是一个途径。本文尝试将反常扩散应用到一个势能鞍点的通过问题，给出了与时间有关的通过几率的解析式。结果显示：欠扩散系统的通过鞍点几率出现一个非常明显的超前峰，并导致负流返回鞍点内侧。这是因为系统分布的中心通过鞍点后，其宽度和中心位置随时间的增长并不同步，前者快于后者，故分布一侧的尾巴返回鞍点里面。还初步用非 Ohmic 模型计算了重核熔合几率，取得了较好的结果。

参 考 文 献:

[1] Metzler R, Klafter J. Phys Rep, 2000, **339**: 1.
 [2] Bao J D, Zhuo Y Z. Phys Rev Lett, 2003, **91**: 138104.
 [3] Bao J D, Zhuo Y Z. Phys Rev, 2005, **E71**: 010102(R).
 [4] Weiss U. Quantum Dissipative Systems. Singapore: World Scientific, 1999.
 [5] Bao J D, Song Y L, Ji Q, et al. Phys Rev, 2005, **E72**: 011113.
 [6] Bao J D, Zhuo Y Z. Phys Rev, 2003, **C67**: 064606.
 [7] Bao J D. Phys Rev, 2004, **E69**: 016124.
 [8] Boilley D, Abe Y, Bao J D. Euro Phys J, 2003, **A18**: 627.
 [9] Bao J D, Jia Y. Phys Rev, 2004, **C69**: 027602.
 [10] 刘 玲, 吕 坤, 包景东. 高能物理与核物理, 2004, **28**: 854.
 [11] 贾 莹, 包景东. 原子核物理评论, 2004, **21**(4): 385.
 [12] Schmidt K H, Morawek W. Rep Prog Phys, 1991, **54**: 949.
 [13] Bao J D, Boilley D. Nucl Phys, 2002, **A707**: 47.
 [14] 包景东. 原子核物理评论, 2003, **20**(2): 132.

(下转第 386 页)

Progress on Study of Quantum Secure Direct Communication*

DENG Fu-guo^{1, 2, 3, 4}, ZHOU Ping^{1, 2, 3}, LI Xi-han^{1, 2, 3},

LI Chun-yan^{1, 2, 3}, ZHOU Hong-yu^{1, 2, 3, 4}

(1 *The Key Laboratory of Beam Technology and Material Modification of Ministry of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;*

2 *Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;*

3 *Department of Material Science and Engineering, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;*

4 *Beijing Radiation Center, Beijing 100875, China)*

Abstract: The requirements of quantum secure direct communication (QSDC) are briefly introduced. Two QSDC schemes i. e. , the Two-Step QSDC scheme and the Quantum-One-Time-Pad QSDC scheme, are discussed in brief.

Key words: quantum communication; secure direct communication; secure direct communication; Two-Step scheme; Quantum-One-Time-Pad-schem

(上接第 372 页)

Anomalous Diffusion: Directional Passing over the Saddle Point of a Potential**

BAO Jing-dong

(*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*)

Abstract: Directional transport of a particle in a non-Ohmic environment passing over the saddle point of a potential is considered and the analytical expression of the passing probability is obtained. Our results has shown that both overshooting and backflow are observed in the case of subdiffusion. This is a possible for understanding slow increasing of the fusion probability with the center-of-mass energy.

Key words: anomalous diffusion; passing probability; overshooting; backflow

* **Foundation item:** National Natural Science Foundation of China(10447106)

** **Foundation item:** National Natural Science Foundation of China(10235020, 10075007); Project of Trans-century Training Programmer Foundation for the Talents, Ministry of Education, China