文章编号：1007－4627(2005)02－0180－06

对于自共振激光加速器中轴向场问题的讨论*

张德兴

（贵州大学物理系，贵州 贵阳 550025）

摘 要：从洛仑兹力方程的旋量形式出发，讨论了电磁场中电荷运动的轴向电场和轴向磁场问题以及平面波的脉冲和 Larmor 功率。这些问题是研究自共振激光加速器的基础。

关 键 词：洛仑兹力方程；轴向电场；轴向磁场；平面波的脉冲；Larmor 功率

中图分类号：O572.21+1 **文献标识码**：A

1 引言

早在 20 世纪 50 年代之前，人们已认识了线性极化单色的电磁平面波中点电荷的运动矩阵和哈密顿-雅可比解[1-6]，因而，对强激光场中激光和粒子加速可能出现在这样的解中已经有了新的意义，并且将其推广到如具有按指数律波动和任意极化的单色平面波这样的更一般的电磁场的成果已经发表。所得到的大多数的解是对于最初在静止状态或具有平均速度为零的电荷，并且许多是间接的或受到由一个有质势近似描述的相互作用的限制。Hestenes[7]应用闵可夫斯基空间-时间的 Clifford 代数[8]导出了单色平面波中电荷运动的一个更直接的结果。虽然所有这些处理是经典的而且忽略了辐射相互作用，但是它们给出了高场强中的量子行为的表示，因此，对于在高能粒子加速器中的可能应用(包括束注入器和高梯度加速器)[9-17]，对于粒子加速的可能的天体物理学运行机制，并且对于在强激光场中被光致电离的电子的运动都是很有意义的。

已取得的结果表明，尽管在强激光束中存在着大的电场，但可以忽略以一个长正弦束被传递到一个电荷上的净能量。然而，近年已在理论上和实验上表明，有效能量能够被宽度在一个或更少循环的数量级上的短激光脉冲所传递。并且提出了由被调整的激光脉冲驱动的加速器[11]。这些结果还观测到在一个高斯激光束的辉点半径之外所驱动的电子加速[18]，并且表明当一个循环极化的单色平面波在一个轴向磁场上被迭加时，可得到一个允许大能量传递的共振[10,19,20]。

本课题的研究工作限于孤立电荷和电磁场的相互作用，已经得到的解析结果有助于解释数值和实验结果，本文阐释对于在一个激光束中的电子运动的有质能量和质量改变的近似，并且表示了这些近似的限定。上述结果也对自共振激光加速器(ALA)方案[10]有贡献。在此方案中，通过一个脉冲调制的循环极化激光束来加速电荷，而此激光束被迭加在一个轴向静止的磁场上。

2 本征旋量和洛仑兹方程的旋量形式

电磁场是时空平面中的双超矢量：

$$\boldsymbol{F} = c\langle\partial\bar{A}\rangle_V = \frac{1}{2}c(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\langle e_\mu \bar{e}_\nu\rangle_V。 \quad (1)$$

展开式(1)是协变的，但是我们可以在一个特殊的坐标系中展开 $\boldsymbol{F}$ 为电磁场：$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}+ic\boldsymbol{B}$，式中 $i=e_T$ 是物理空间中的体积元。

麦克斯韦方程使源流 j 和场 $\boldsymbol{F}$ 联系起来：

$$\partial\boldsymbol{F} = Z\bar{j}, \quad (2)$$

式中 $Z=\mu c=(\varepsilon c)^{-1}$ 是介质的阻抗。通过实部和虚部的分离、矢量部分与标量部分的分离，麦克斯韦的四矢量方程可以完整地从(2)式得到。方程(2)的实部用 $\mathscr{R}$ 表示，虚部用 $\mathscr{I}$ 表示；矢量部分用 V 表

收稿日期：2004－07－30；修改日期：2005－01－25
* 基金项目：国家自然科学基金资助项目(10347003)
作者简介：张德兴(1946－)，男(汉族)，上海人，副教授，硕士，从事量子场论和基本粒子物理学研究；
E-mail：zdx0851@163.com

示，标量部分用 S 表示。

我们能够把洛仑兹方程的张量形式 $\dot{p}^{\mu}=eF^{\mu\nu}u_{\nu}$ 的协变形式写为

$$\dot{p}=\langle e\boldsymbol{F}u\rangle_{R}, \tag{3}$$

式中 p 是与电磁场 $\boldsymbol{F}$ 相互作用的电荷 e 的时空动量，$\dot{p}$ 表示对于本征时间(原时)τ 的微商。

粒子的运动和方向由它的本征旋量 Λ 确定，而此旋量正是把粒子的坐标和实验室坐标联系起来的代数洛仑兹变换 L，粒子坐标系中的时空矢量 q，通过 Λ 变换到实验室坐标系中的时空矢量 $q=\Lambda q_r\Lambda^{\dagger}$。特别是，在粒子坐标系中的时间轴 $e_0=1$ 被变换到实验室坐标系中粒子的原有速度(以 c 为单位)

$$u=\Lambda\Lambda^{\dagger}。\tag{4}$$

更一般地，静止坐标系的四维矢量$\boldsymbol{e}_{\mu}$的元素被变换到粒子在具有 $u_0\equiv u$ 的实验室坐标系中的超矢量

$$\boldsymbol{u}_{\mu}=\Lambda\boldsymbol{e}_{\mu}\Lambda^{\dagger}。\tag{5}$$

如一个特殊的洛仑兹变换中的振幅那样，本征旋量 $\Lambda\in SL(2,C)$表征在实验室坐标系中粒子的运动。"本征"与粒子本身正常的洛仑兹变换相关，并且"旋量"表明在一个进一步洛仑兹变换 L 下它的行为

$$\Lambda\rightarrow L\Lambda\ 。\tag{6}$$

特别是，本征旋量在任意 360°的旋转下改变符号，本征旋量变化的正常时间比率总是能够写为

$$\dot{\Lambda}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\Lambda\ 。\tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{\Omega}\equiv 2\dot{\Lambda}\bar{\Lambda}$ 是一个由在时空中的 Darboux 双矢量定义的双超矢量，如果(7)式能够被解，那末就可得到在粒子坐标系中被确定的任意时空矢量或双矢量的时间演展。例如，动量 p 在静止坐标系中有确定值 mc，而在实验室坐标系，

$$\begin{aligned}\dot{p}&=\dot{\Lambda}mc\Lambda^{\dagger}+\Lambda mc\dot{\Lambda}^{\dagger}\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}p+p\boldsymbol{\Omega}^{\dagger})=(\boldsymbol{\Omega}p)_{R}。\end{aligned}\tag{8}$$

(8)式与洛仑兹力方程(3)的比较表明，带电粒子的时空旋转比率 $\boldsymbol{\Omega}$ 可以在电荷状态上与电磁场 $\boldsymbol{F}$ 用等式相联系：

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{e}{mc}\boldsymbol{F}\ 。\tag{9}$$

并且洛仑兹力方程本身遵从旋量形式

$$\dot{\Lambda}=\frac{e}{2mc}\boldsymbol{F}\Lambda\ 。\tag{10}$$

在外场 $\boldsymbol{F}$ 中寻找解 $\Lambda(\tau)$，从电荷本身来的对 $\boldsymbol{F}$ 的贡献被忽略，并且略去辐射反应，通过对于本征速度或动量的计算，可以由 Λ 得到关于自旋的情况。

按照对于时空双矢量的洛仑兹变换的形式，$\boldsymbol{\Omega}\rightarrow L\boldsymbol{\Omega}\bar{L}$，$\boldsymbol{\Omega}^2$ 和 $\boldsymbol{F}^2=(\boldsymbol{E}^2-c^2\boldsymbol{B}^2)+2ic\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 是洛仑兹不变的。如果 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$，那么 F 是简单的，并且旋量洛仑兹力方程(10)有一个直接的几何解释：电磁场 $\boldsymbol{F}$ 导致一个在 $\boldsymbol{F}$ 时空平面内的比率 $\boldsymbol{\Omega}$ 的旋转，在任何一个给定坐标系中，电场导致在类时的(双曲线的)平面上的跃升也就是旋转，并且磁场导致在类空的(椭圆的)平面上的旋转。

一个与在电磁场中电荷运动相对应的定向平面波一般不是单色的，其超矢量势可以表示为一个函数 $A(s)$，而 $A(s)$仅仅通过洛仑兹标量

$$s=\langle k\,x\rangle_S=\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\omega_r\tau \tag{11}$$

依赖于空时位置的四矢量 x。(11)式中 $k=(\omega/c)+\boldsymbol{k}=(\omega/c)(1+\hat{\boldsymbol{k}})$是一个恒定的零(类光的)超矢量，其矢量部分给出平面波的传播方向，并且

$$\omega_r=c\langle k\,\bar{u}\rangle_S=\gamma\,\omega\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}}{c}\right)=\dot{s}\ 。\tag{12}$$

对于确定的 $\boldsymbol{K}$ 的振荡平面波，$\boldsymbol{K}$ 通常被取为是平均空时传播矢量，ω_r 是在以本征速度 $cu=\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$ 运动的粒子坐标系中的相应频率，场 F 有形式

$$\boldsymbol{F}=c\langle\partial\bar{\boldsymbol{A}}\rangle_V=c\langle k\bar{\boldsymbol{A}}'\rangle_V=(1+\hat{\boldsymbol{k}})E\ 。\tag{13}$$

式中 $A'(s)=\mathrm{d}A(s)/\mathrm{d}s$。能量密度 ρ 和玻矢量 $\boldsymbol{S}$ 由下式给出：

$$\rho+\frac{\boldsymbol{S}}{c}=\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\dagger}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(1+\hat{\boldsymbol{k}})\ 。\tag{14}$$

3　轴向电场

电磁场中电荷运动满足洛仑兹力方程。洛仑兹力方程遵从旋量形式

$$\dot{\Lambda}=\frac{e}{2mc}\boldsymbol{F}\Lambda\ ,\tag{15}$$

式中，Λ 为本征旋量，$\boldsymbol{F}$ 为电场，e 为电荷，m 为带电粒子的质量，c 为真空中的光速。为了求解对于

一个平面波加上一个恒定轴向场的本征方程(15)，我们应用互补的投射子 $P_k=(1+\hat{k})/2$ 和 $\bar{P}_k=1-P_k$ 分离此方程为属于代数的不同意义的部分。这些部分能够独立地被解并且被重新组合。用这个方法得到已避免了传统方法的明显解。我们知道，没有一个方法能给出对于在平面波加上轴向电场中的电荷运动的解析解。而且，对于平面波加上轴向磁场的解析解总是间接的并限于单色平面波[1-3]。

考虑一个平面波的电场 $\boldsymbol{F}=E_0\hat{\boldsymbol{k}}+(1+\hat{\boldsymbol{k}})\omega\bar{\boldsymbol{A}}'(s)$ 加上一个振幅为 E_0 的恒定轴向电场，应用投射子 P_k 和 $\bar{P}_k$ 到洛仑兹力方程(15)，并且考虑到 $\hat{\boldsymbol{k}}P_k=P_k$ 和 $\hat{\boldsymbol{k}}\,\bar{P}_k=-\bar{P}_k$，得到

$$P_k\dot{\Lambda}=\frac{1}{2}\alpha P_k\Lambda-\frac{e\,\omega}{mc}A'(s)\,\bar{P}_k\Lambda\ ,\qquad(16)$$

$$\bar{P}_k\Lambda=-\frac{1}{2}\alpha\,\bar{P}_k\Lambda\ ,\qquad(17)$$

式中 $\alpha=eE_0/(mc)$。(17)式的解为

$$\bar{P}_k\Lambda(\tau)=\exp\left(-\frac{\alpha\tau}{2}\right)\bar{P}_k\Lambda(0)\ 。\qquad(18)$$

由这个解可以考虑 s 和 τ，在电荷坐标系中平面的波频率为

$$\omega_r(\tau)=\dot{s}(\tau)=c\langle\bar{k}u(\tau)\rangle_S$$
$$=2\omega\langle\Lambda^{\dagger}((\tau))\,\bar{P}_k\Lambda(\tau)\rangle_S=\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\omega_r(0)\qquad(19)$$

被积分，并给出

$$s(\tau)=\frac{\omega_r(0)}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau})\ 。\qquad(20)$$

上式中，我们已在粒子世界线和光锥 $s=0$ 的交点上取 $\tau=0$。于是，当 τ 从 0 增加到无穷大时，振动场的洛仑兹不变的位相 s 被限制于 $0\leqslant s<\omega_r(0)/\alpha$。(16)式成为

$$P_k\dot{\Lambda}=\frac{1}{2}\alpha P_k\Lambda-\mathrm{e}^{-\alpha\tau/2}\frac{e\omega}{mc}A'(s)\bar{P}_k\Lambda(0)\ 。\qquad(21)$$

为了求解，设 $\Lambda(\tau)\equiv\mathrm{e}^{\alpha\tau\hat{k}/2}K(\tau)$，于是

$$P_k\dot{\Lambda}=\mathrm{e}^{\alpha\tau/2}P_k\left[\frac{1}{2}\alpha K(\tau)+\dot{K}(\tau)\right]\ ,\qquad(22)$$

并且通过与(21)式比较，

$$P_k\dot{K}(\tau)=-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\frac{e\omega}{mc}A'(s)\bar{P}_kK(0)。\qquad(23)$$

因为 $\mathrm{d}s=\omega_r(0)\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{d}\tau$，所以积分给出

$$P_kK(\tau)=P_kK(0)-\frac{a\omega}{\omega_r(0)}\bar{P}_kK(0)\ ,\qquad(24)$$

式中 $a\equiv e\Delta A/(mc)$。加上 $P_k\Lambda+\bar{P}_k\Lambda$ 和应用洛仑兹规范条件 $\langle\partial\bar{A}\rangle_S=\langle k\bar{A}'\rangle_S=0$，得到

$$\Lambda(\tau)=\mathrm{e}^{-\alpha\tau/2}\bar{P}_k+\mathrm{e}^{\alpha\tau/2}P_k\left[1+\frac{\bar{a}\omega}{\omega_r(0)}\right]\Lambda(0)$$
$$=\mathrm{e}^{\alpha\tau\hat{k}/2}\left[1+\bar{P}_k\frac{\bar{a}\omega}{\omega_r(0)}\right]\Lambda(0)\ 。\qquad(25)$$

当平面波场为零时，$a=0$，并且此解成为超双曲线运动的情形。另一方面，如果恒定电场不为零，那么，$\alpha=0$，并且可以得到解

$$\Lambda(s)=\Lambda(s_0)-\frac{e[A(s)-A(s_0)]}{2m\omega_r}\bar{k}\Lambda(s_0)\ 。$$

更一般地，动量为

$$p(\tau)=mc\Lambda\Lambda^{\dagger}=\mathrm{e}^{\alpha\tau\hat{k}/2}[p(0)+$$
$$\langle P_k\frac{\bar{a}\omega}{\omega_r(0)}p(0)\rangle_v-mc\frac{a\bar{a}\omega}{\omega_r(0)}P_k]\mathrm{e}^{\alpha\tau\hat{k}/2},\qquad(26)$$

而 $p(\tau)\bar{p}(\tau)=m^2c^2$[4-7]。

如果平面波与由轴向场 $\omega_r(0)\geqslant\alpha$ 引起的加速相比较同样快速振动的话，那么我们能够对振动求平均，并得到

$$p_{av}(\tau)=\mathrm{e}^{\alpha\tau\hat{k}/2}[P(0)+\mu^2mc\frac{\omega}{\omega_r(0)}P_k]\mathrm{e}^{\alpha\tau\hat{k}/2},\qquad(27)$$

式中 $\mu=(-a\bar{a})_{av}^{1/2}$。(27)式描述一个具有初始动量 $P_{av}(0)$ 和质量 $m^*=\sqrt{p_{av}\bar{p}_{av}}/c=m\sqrt{1+\mu^2}$ 的被包裹的电荷均匀加速。因为 τ 不是被包裹的电荷平移坐标系的本征时间，而是快速振动坐标系的本征时间，所以正常加速率不是 αc。被包裹的电荷正常加速为

$$\alpha_Dc=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\tau_D}\alpha c=\frac{\gamma_D}{\gamma}\alpha c\ 。\qquad(28)$$

α_Dc 比小 αc，相差因子 γ_D/γ，其中

$$\gamma_D=\frac{\langle p_{av}\rangle_S}{m^*c}=\frac{m}{m^*}[\langle\mathrm{e}^{\alpha\tau\hat{k}}u(0)\rangle_S+$$
$$\frac{1}{2}\mu^2\mathrm{e}^{\alpha\tau}\frac{\omega}{\omega_r(0)}]\ 。\qquad(29)$$

被包裹的电荷的有效质量在平移坐标系中被定义为恒定场 E_0 所施加的力除以正常加速，

$$m_D=\frac{eE_0}{\alpha_Dc}=\frac{\gamma}{\gamma_D}m\ 。\qquad(30)$$

并且因为

$$\gamma_{av}=\frac{\langle P\rangle_{S\cdot av}}{mc}=\frac{m^*}{m}\gamma_D,\qquad(31)$$

所以在对快速振动求平均后，m_D 与 m^* 相等。由于 μ 与 m 成反比，因而在 $m\to 0$ 的极限中，有效质量 $m^*=m\sqrt{1+\mu^2}=e\langle -\Delta A\Delta\bar{A}\rangle_{av}^{1/2}/c$[6-11]。

4 轴向磁场

考虑一个平面波场加上一个轴向磁场

$$F = icB_0\hat{k} + (1+\hat{k})\omega\bar{A}'(s) 。\quad (32)$$

$\bar{P}_k$ 应用于洛仑兹力方程的旋量形式

$$\dot{\Lambda} = \frac{e}{2mc}F\Lambda \quad (33)$$

的两边，得到

$$P_k\dot{\Lambda} = -\frac{i\omega_0}{2}\bar{P}_k\Lambda ， \quad (34)$$

式中 $\omega_c=eB_0/m$ 是廻旋加速器的本征频率，其解是

$$\bar{P}_k\Lambda(\tau) = \exp\left(-\frac{i\omega_c\tau}{2}\right)\bar{P}_k\Lambda(0) 。\quad (35)$$

利用上式得到

$$\begin{aligned}\dot{s}(\tau) &= c\langle\Lambda^{\dagger}(\tau)\bar{k}\Lambda(\tau)\rangle_S \\ &= c\langle\Lambda^{\dagger}(0)\bar{k}\Lambda(0)\rangle_S \\ &= c\langle\bar{k}u(0)\rangle_S = \omega_r ,\end{aligned} \quad (36)$$

于是，$s(\tau)=s_0+\omega_r\tau$，式中 $s_0=s(0)$。

将 P_k 应用到洛仑兹力方程的旋量形式(20)，并利用具有规范条件 $\langle\partial\bar{A}\rangle_S=\langle k\bar{A}'\rangle_S=0$ 的(35)式，我们得到

$$\begin{aligned}P_k\dot{\Lambda} &= \frac{i}{2}\omega_c P_k\Lambda - \omega a'\bar{P}_k\Lambda \\ &= \frac{i}{2}\omega_c P_k\Lambda - e^{-i\omega_c\tau/2}\omega a'\bar{P}_k\Lambda(0) ，\end{aligned} \quad (37)$$

式中 $a'(s)=eA'(s)/(mc)$。为了得到 $P_k\Lambda$，我们变换到一个旋转坐标系并定义 K 为本征旋量：

$$K(s(\tau)) = \exp\left(-\frac{i}{2}\hat{k}\omega_c\tau\right)\Lambda(\tau) 。\quad (38)$$

特别是，在 $\tau=0$ 时，$K(s_0)=\Lambda(0)$，并且藉助于(35)式，

$$\bar{P}_kK(s) = e^{i\omega_c\tau/2}\bar{P}_k\Lambda(\tau) = \bar{P}_kK(s_0)。\quad (39)$$

将 P_k 应用到 Λ 上并求微商，我们得到

$$P_k\dot{\Lambda} = P_k\frac{d}{d\tau}(e^{i\omega_c\tau/2}K) = \frac{i}{2}\omega_c P_k\Lambda + e^{i\omega_c\tau/2}P_k\dot{k}。$$

与(37)式比较给出

$$P_k\dot{K} = \exp(-i\omega_c\tau)\omega P_k\bar{a}'\Lambda(0)。\quad (40)$$

并且藉助于 s，我们得到

$$P_kK'(s) = \exp\left[\frac{-i\omega_c(s-s_0)}{\omega_r}\right]P_k\frac{\omega\bar{a}'}{\omega_r}K(s_0)。\quad (41)$$

对(41)式求积分并加上 $\bar{P}_kK(s)=\bar{P}_kK(s_0)$，得到

$$K(s) = (1+\boldsymbol{\Theta})K(s_0) 。\quad (42)$$

并且

$$\Lambda(\tau) = e^{i\hat{k}\omega_c\tau/2}(1+\boldsymbol{\Theta})\Lambda(0)。\quad (43)$$

$$\begin{aligned}u(\tau) = {} & e^{i\hat{k}\omega_c\tau/2}[u(0)+2\langle\boldsymbol{\Theta}u(0)\rangle_s]\cdot \\ & e^{-i\hat{k}\omega_c\tau/2} + \boldsymbol{\Theta}u(0)\boldsymbol{\Theta}^{\dagger} .\end{aligned} \quad (44)$$

式中 $\boldsymbol{\Theta}$ 是无量纲的双超矢量，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta} &= \frac{\omega}{\omega_r}P_k\int_{s_0}^{s}ds'\exp\left[\frac{-i\omega_c(s'-s_0)}{\omega_r}\right]\bar{a}'(s') \\ &= P_k\hat{\boldsymbol{a}}\,\theta(s) 。\end{aligned} \quad (45)$$

其中，$\boldsymbol{a}$ 为任意与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的实的单位矢量，并且 θ 是复数有标量值的函数，

$$\theta(s) \equiv \int_{s_0}^{s}ds'\exp\left[\frac{-i\omega_c(s'-s_0)}{\omega_r}\right]\frac{e\boldsymbol{F}(s')}{mc\omega_r}\cdot\boldsymbol{a} 。\quad (46)$$

由于关系式(36)和 $\bar{P}_k$ 的投射性质，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}u(0)\boldsymbol{\Theta}^{\dagger} &= \boldsymbol{\Theta}\bar{P}_ku(0)\,\bar{P}_k\boldsymbol{\Theta}^{\dagger} \\ &= 2\boldsymbol{\Theta}\langle\bar{P}_ku(0)\rangle_S\bar{P}_k\boldsymbol{\Theta}^{\dagger} \\ &= \frac{\omega_r}{\omega}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}^{\dagger} = \frac{\omega_r}{\omega}|\theta|^2P_k。\end{aligned} \quad (47)$$

电荷的能量增加值是 mc^2 乘 $\gamma=\langle u\rangle_s$ 中的电荷。从(44)式和关系式 $\langle\Theta u(0)\rangle_s=\langle\boldsymbol{\Theta}\rangle_s\cdot\boldsymbol{u}(0)$，

$$\Delta\gamma\equiv\gamma(\tau)-\gamma(0)=2\langle\boldsymbol{\Theta}\rangle_s\cdot\boldsymbol{u}(0)+\frac{\omega_r}{2\omega}|\theta|^2。\quad (48)$$

当 u 的所有分量直接地由(44)式给出时，通过(36)式可将本征速度的径向分量表述为

$$\boldsymbol{u}_{\parallel} \equiv (\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{k}})\hat{\boldsymbol{k}} = \left(\gamma-\frac{\omega_r}{\omega}\right)\hat{\boldsymbol{k}} . \quad (49)$$

并且横向分量的量值由单位模 $u\bar{u}=1$ 给出：

$$u_{\perp}^2(\tau) = u_{\perp}^2(0) + 2\frac{\omega_r}{\omega}\Delta\gamma 。\quad (50)$$

考虑一个循环极化的单色波 $a(s)=e^{i(s-s_0)\hat{k}}a$ 的情形，上式中 $\boldsymbol{a}=e\boldsymbol{A}_{\perp}(s_0)/(mc)$ 是一个垂直 $\boldsymbol{k}$ 的常矢

量。积分给出

$$\theta = |\boldsymbol{a}|\,\omega\,\frac{1-\exp[\mathrm{i}(\omega_r-\omega_c)]\tau}{\omega_r-\omega_c}\text{。}\tag{51}$$

如果静坐标系的频率 ω_r 是与回旋加速器频率 ω_c 密切相联系，那么

$$\theta \simeq -\mathrm{i}\,|\boldsymbol{a}|\,\omega\tau\text{ 。}\tag{52}$$

更一般地，

$$\theta^2 = \omega^2\boldsymbol{a}^2\left(\frac{\sin[(\omega_r-\omega_c)\tau/2]}{(\omega_r-\omega_c)/2}\right)^2\text{。}\tag{53}$$

当 $\omega_r=\omega_c$ 时，关系式(48)导致

$$\Delta\gamma=\omega\tau(\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{u}(0)+\frac{1}{2}\omega\omega_r\tau^2\boldsymbol{a}^2,\tag{54}$$

这是自共振激光加速器(ALA)的基础[10-13]。

5 平面波的脉冲

为了深入研究 ALA 的问题，我们通过实的超标量场 $a(s)=e(mc)^{-1}\Delta A(s)$ 的微商考虑一个中心位于 $s=0$ 的平面波脉冲，该场被取为循环极化的高斯波包

$$a'(s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\boldsymbol{k}-\frac{1}{2}s^2\cdot\sigma^2}\boldsymbol{a}'(0)\text{ 。}\tag{55}$$

该波包通过 $a'=-e\boldsymbol{E}/(mc\omega)$ 与脉冲电场 $\boldsymbol{E}$ 相联系，在脉冲通过以后，由(45)式可给出

$$\theta = |\boldsymbol{a}'(0)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sqrt{2\pi}\,\sigma\,\frac{\omega}{\omega_r}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\omega_c}{\omega_r}-1\right)^2\right]\text{。}\tag{56}$$

式中恒定位相角 φ 依赖于初始值 s_0（被假定为 $s_0\ll-\sigma$）。如果 $u(0)$是纵向的，那么在场的强度中能量的增加值 $mc^2\Delta\gamma$ 是二次的：

$$\Delta\gamma = \frac{\omega}{\omega_r}[\boldsymbol{a}'(0)]^2\,\pi\,\sigma^2\exp\left[-\sigma^2\left(\frac{\omega_c}{\omega_r}-1\right)^2\right]\text{。}$$

为了求能量转移的极大值，可将脉冲宽度 σ 设为$[(\omega_c/\omega_r)-1]^{-1}$。此值当 ω_c 和 ω_r 大致相等的时候是相当大的，由共振 $\omega_r=\omega_c$ 引起的放大因子仅仅受到所要求的大磁场均匀性的限制。在轴向磁场不存在的情况下，$\omega_c=0$。磁场的存在可以通过由一个 σ^2 的因子放大能量增量看出来[11-16]。

6 Larmor 功率

由自共振激光加速器产生的辐射能量可以被忽略[17]。我们可以用简单的解析关系式表示这一结论。由于辐射而损失的 Larmor 功率可以写为[7]

$$P=-\frac{2}{3}mcr_e\dot{u}\dot{\bar{u}},\tag{57}$$

式中 $r_e=e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2)\simeq 282\times10^{-15}\,\mathrm{m}$ 是经典电子半径。对于一个平面波加上一个轴向磁场

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{i}cB_0\hat{\boldsymbol{k}}+(1+\hat{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{E}\text{ 。}\tag{58}$$

电荷的洛仑兹力方程 $\dot{P}=\langle e\boldsymbol{F}u\rangle$，成为

$$P = \frac{2}{3}mcr_e\left(\omega_c\boldsymbol{u}\times\hat{\boldsymbol{k}}+\frac{\omega_r}{\omega}\frac{e}{mc}\boldsymbol{E}\right)^2\text{。}\tag{59}$$

在 ALA 中，总的功率损耗有更大的意义。在一个轴向磁场和一个激光脉冲存在的情况下，在 P [(59)式]中廻旋加速器运动和在激光场 $\boldsymbol{E}$ 中线性项之间能够存在干涉。考虑一个循环极化的平面波

$$a(s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(s-s_0)\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}\text{ 。}$$

用 $\omega_r=\omega_c$ 且代入(63)式中，得到辐射功率

$$P = \frac{2}{3}mcr_e\omega_c^2[\boldsymbol{u}(0)\times\hat{\boldsymbol{k}}-\omega_c\tau\boldsymbol{a}+\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{a}]^2\text{。}\tag{60}$$

如果我们选择轴向投射 $\boldsymbol{u}_\perp(0)=0$，那么

$$P = \frac{2}{3}mcr_e\omega_c^2\boldsymbol{a}^2(1+\omega_c^2\tau^2)\text{ 。}\tag{61}$$

于是，辐射的总能量

$$\int p\,\mathrm{d}t = \int p_\gamma\,\mathrm{d}\tau = \int p[\gamma(0)+\Delta\gamma]\mathrm{d}\tau\text{ 。}\tag{62}$$

对能量增量 $\Delta\gamma mc^2=\frac{1}{2}\omega\omega_c\tau^2a^2mc^2$ 的比值为

$$\begin{aligned}\frac{\int p\,\mathrm{d}t}{\Delta\gamma mc^2} &= \frac{4}{3}\frac{r_e\omega_c}{c\tau^2\omega}\int(1+\omega_c^2\tau^2)\cdot\left[\gamma(0)+\frac{1}{2}\omega\,\omega_c\tau^2a^2\right]\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{4}{9}\frac{r_e\omega_c}{c\tau\omega}\left[(3+\omega_c^2\tau^2)\gamma(0)+\left(1+\frac{3}{5}\omega_c^2\tau^2\right)\Delta\gamma\right]\\ &\approx \frac{4}{15}\frac{r_e\omega_c^3\tau}{c\omega}\Delta\gamma\text{ 。}\end{aligned}\tag{63}$$

式中最后一项是当 $\omega_c\tau\gg1$，并且 $\Delta\gamma\gg\gamma(0)=\frac{1}{2}(\omega/\omega_c+\omega_c/\omega)$时，这个比值是小的，此限制在对于 $\omega_c\tau$ 的一个共振脉冲的能量增加上设置了一个上限 $\Delta\gamma$

$\lesssim \frac{c\,\omega}{r_e \omega_c^3 \tau}$ 这个限制可以是相当大的[5]。

7 结论

通过应用经典本征旋量表明了洛仑兹力方程与电磁场和一个空-时旋转速率的耦合有关，并且表明了一个零平面旋转的不变性导致空-时传播矢量在由一个直接平面波加速的一个电荷的系统中守恒，并且利用此守恒来解。对于这样电荷的洛仑兹力方程，讨论和分析了有质动量，它的相对论修正和限量，以及一个被修正的电荷的有效质量。同时，在平面波脉冲中和在被迭加后在轴向场上的这样的脉冲中，导出了相对论的运动解析解。

本文从洛仑兹力方程的旋量形式出发，讨论了电磁场中电荷运动的轴向电场和轴向磁场问题以及平面波的脉冲和 Larmor 功率。这些问题对于研究自共振激光加速器(ALA)有重要的意义。

参 考 文 献：

[1] Landau L D, Lifshiz E M. Electro-dynamics of Continuous Media, MA: Addison-Wesley, Reading, 1960, 81—90.

[2] Eherly J. In Progress in Optics, Amsterdam: North-Holland, 1968, 78—82.

[3] Hestenes D. Spacetime Algebra, New York: Gordon and Breach, 1966, 56—64.

[4] Elcezer S, Lorb A. In Advances in Accelerator Concepts, AIP Conf Proc No 156; NY: AIP, Woodbury, 1987, 94—98.

[5] Baylis W E, Yao Y. Phys Rev, 1999, **A60**: 785.

[6] Baylis W E. Clifford (Geometric) Algebras with Applocations on Physics, Mathematics and Engineering , Boston: Birkhauser, 1996, 65—74.

[7] Baylis W E. Electrodynamics, a Modern Geometric Approach, Boston: Birkhauser, 1998, 112—124.

[8] Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors, Cambridge: Cambrege University, 1997, 83—90.

[9] Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. Gravitation San Francisco: Freeman, 1973, 122—126.

[10] Penrose R, Rindler W. Spinors and Space-time, Cambridge: Cambridge University Press. 1984, 150—154.

[11] Malka G, Miquel J L. Phys Rev Lett, 1996, **77**: 75.

[12] Rau B, Tajima T, Hojo H. Phys Rev Lett, 1997, **78**: 3 310.

[13] Malka G, Lefebvre E, Miquel J L. Phys Rev Lett. 1997, **78**: 3 314.

[14] Baylis W E. Phys Canada, 1998, **54**(1): 24.

[15] Gao J, Bagayoko D, Guo D S. Can J Phys, 1998, **76**: 87.

[16] Meyerhofer D D. World Singapore: Scientific, 1997, in Atomic Physics 15, 431.

[17] Loeb A, Friedland L. Phys Rev, 1986, **A33**: 1 828.

Discussion for Problem of Axial Fields in Autoresonance Laser Accelerator*

ZHANG De-xing

(*Department of Physics, Guizhou University, Guiyang* 550025, *Guizhou, China*)

Abstract: From the spinorial form of the Lorentz-force equation, the problems about axial electric field and axial magnetic field of charge motion in electromagnetic fields, as well as plane-wave pulse and Larmor power have been discussed in this paper. These problems are the foundation of studying the autoresonance laser accelerator (ALA).

Key words: Lorentz-force equation; axial electric field; axial magnetic field; plane-wave pulse; Larmor power

* **Foundation item**: National Natural Science Foundation of China(10347003)