第 21 卷 第 4 期
2004 年 12 月

原子核物理评论
Nuclear Physics Review

Vol. 21, No. 4
Dec., 2004

文章编号：1007－4627(2004)04－0294－04

Dirac 粒子的正-反粒子自由度和正-反粒子量子数*

王顺金[1,4]，周善贵[2,4]，H. C. Pauli[3]

(1 四川大学物理系，四川 成都 610064；
2 中国科学院理论物理研究所，北京 100080；
3 *Max Planck Institute for Nuclear Physics*, *D-69117 Heidelberg*, *Germany*；
4 兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心，甘肃 兰州 730000)

摘 要：对 Dirac 粒子引进了正-反粒子自由度和相应的内部 τ 空间的算子，把 γ 矩阵分解成自旋 σ 算子和正-反粒子 τ 算子；Dirac 方程的解出现了正-反粒子量子数；正-反粒子变换是 Dirac 粒子的哈密顿量的反对称变换，Dirac 粒子负能态能量的负值来自正-反粒子量子数的负值；γ 矩阵这种分解是处理物理相互作用的需要.

关 键 词：正-反粒子自由度；正-反粒子量子数；正-反粒子内部空间

中图分类号：O572.2　　**文献标识码**：A

自由空间和中心力场中的 Dirac 粒子的本征解是相对论量子力学和相对论量子场论处理物理问题的基础；坐标空间、自旋空间和正-反粒子空间的动力学自由度及其相应的量子数是表述这些本征解的基本要素；自旋算子、螺旋性算子和正-反粒子算子是描述 Dirac 粒子量子态的相关算子. 本文有助于澄清相对论量子力学和相对论量子场论中的一些相关的基本物理问题.

(A) 自由粒子的哈密顿量为

$$\hat{H} = c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta\ , \tag{1}$$

引进粒子-反粒子空间的算符 τ_i：

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 矩阵(或 γ_μ 矩阵)可分解为自旋空间算子 σ_i 和正-反粒子空间的算子 τ_i 的直积，

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma}\otimes\tau_1\ ,\quad \beta = I\otimes\tau_3\ , \tag{3}$$

约定自旋空间的算子(σ_i, I_σ)应作为矩阵元插入正-反粒子空间的算子(τ_i, I_τ)；这 16 个算子与 γ 空间的非线性的 Clifford 代数等价，而后者是描述相互作用的需要.

哈密顿量可改写为

$$\hat{H} = c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\otimes\tau_1 + mc^2 I\otimes\tau_3\ , \tag{4}$$

Dirac 粒子具有 $SU_\sigma(2)\otimes SU_\tau(2)$ 动力学对称性和三类自由度(DoF)：坐标空间 $\boldsymbol{r}$、自旋空间 σ_i 和正-反粒子空间 τ_i 的自由度. 与此同时，Dirac 粒子有 5 个守恒的物理量和相应的 5 个量子数：(1) 3 个守恒的动量分量算子($\hat{p}_i$)，(2) 螺旋性算子 $\sigma_p = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/p$，(3) 正-反粒子空间算子 $\tilde{\tau}_3$

$$\tilde{\tau}_3 = \frac{\mu c p\tau_1 + mc^2\tau_3}{E} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} mc^2 & \mu c p \\ \mu c p & -mc^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dirac 粒子的本征波函数是三类守恒算子的本征波函数的乘积

$$\tilde{\psi}_{p\mu\nu}(\boldsymbol{r},s,\tau) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\tilde{U}_\mu(s)\tilde{V}_\nu(\tau)\ . \tag{6}$$

收稿日期：2004－08－16

* **基金项目**：国家自然科学基金资助项目(10375039, 10175092)；国家重点基础研究发展规划项目(G20000774)；中国科学院知识创新工程重点方向性项目(KJCX2-SW-No2)；兰州重离子加速器国家实验室核理论中心资助项目

作者简介：王顺金(1937－)，男(汉族)，四川德阳人，教授，博士生导师，从事关联动力学与重离子输运理论、代数动力学与人造量子系统的研究；E-mail：sjwang@home.swjtu.edu.cn

在 $\sigma_p=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 的本征表象中，其本征解为

$$U_{+1}(s)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad U_{-1}(s)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\tag{7}$$

$\tilde{\tau}_3$ 的本征解为

$$\tilde{V}_{+1}(\tau)=\sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\mu cp}{E+mc^2}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{V}_{-1}(\tau)=\sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\begin{pmatrix}\dfrac{-\mu cp}{E+mc^2}\\ 1\end{pmatrix},\tag{8}$$

能量 $E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^4}$，$\nu=+1$ 对应粒子态，$\nu=-1$ 对应反粒子态. σ_p 的 4×4 矩阵形式为

$$\tilde{\Sigma}_p=I_\tau\otimes\sigma_p=\begin{pmatrix}\sigma_p & 0\\ 0 & \sigma_p\end{pmatrix},$$
$$\tilde{\Sigma}_p\tilde{\psi}_{p\mu\nu}=\mu\tilde{\psi}_{p\mu\nu},\tag{9}$$

$\tilde{\tau}_3$ 的 4×4 矩阵形式

$$\tilde{T}_3=\frac{1}{E}\begin{pmatrix}mc^2 & cp\sigma_p\\ cp\sigma_p & -mc^2\end{pmatrix},\quad \tilde{T}_3\tilde{\psi}_{p\mu\nu}=\nu\tilde{\psi}_{p\mu\nu}.\tag{10}$$

哈密顿量可表示为

$$\hat{H}=E\tilde{T}_3,\qquad \hat{H}\tilde{\psi}_{p\mu\nu}=\nu E\tilde{\psi}_{p\mu\nu}.\tag{11}$$

反粒子态能量为负来自反粒子量子数 $\nu=-1$. 粒子-反粒子变换为

$$\tilde{C}=\begin{pmatrix}0 & iI_\sigma\\ -iI_\sigma & 0\end{pmatrix}=\tilde{C}^+=\tilde{C}^{-1},$$
$$\tilde{C}\tilde{\psi}_{p\mu\nu}=\tilde{\psi}_{p\mu-\nu},\tag{12}$$

哈密顿量对粒子-反粒子变换是反对称的(而非对称的)：

$$\{\tilde{C},\hat{H}\}=\tilde{C}\hat{H}+\hat{H}\overleftrightarrow{C}=0,$$
$$\tilde{C}\hat{H}\tilde{C}^{-1}=-\hat{H},\tag{13}$$

通过幺正变换，

$$\hat{u}=I_\tau\otimes\sqrt{\frac{1}{1+\hat{p}_z}}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\hat{p}_r}{1+\hat{p}}\\ \dfrac{\hat{p}_l}{1+\hat{p}_z} & -1\end{pmatrix},\tag{14a}$$

$$\hat{p}_z=\frac{p_z}{p},\ \hat{p}_r=\frac{p_x-ip_y}{p},$$
$$\hat{p}_r=\frac{p_x-ip_y}{p},\tag{14b}$$

回到通常的 γ-矩阵表象，Dirac 方程的本征解变为

$$\psi_{p\mu\nu}=\hat{u}\tilde{\psi}_{p\mu-\nu},\tag{15}$$

$$\psi_{p^{++}}(\boldsymbol{r},s,\tau)=N\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\hat{p}_l}{1+p_z}\\ \dfrac{cp}{E+mc^2}\\ \dfrac{\hat{p}_l}{1+\hat{p}_z}\dfrac{cp}{E+mc^2}\end{pmatrix}e^{ip\cdot r/\hbar},$$

$$\psi_{p^{-+}}(\boldsymbol{r},s,\tau)=N\begin{pmatrix}\dfrac{\hat{p}_r}{1+\hat{p}_z}\\ -1\\ \dfrac{-\hat{p}_r}{1+\hat{p}_z}\dfrac{cp}{E+mc^2}\\ \dfrac{cp}{E+mc^2}\end{pmatrix}e^{ip\cdot r/\hbar},$$

$$\psi_{p^{+-}}(\boldsymbol{r},s,\tau)=N\begin{pmatrix}\dfrac{-cp}{E+mc^2}\\ \dfrac{\hat{p}_l}{1+\hat{p}_z}\dfrac{cp}{E+mc^2}\\ 1\\ \dfrac{\hat{p}_l}{1+\hat{p}_z}\end{pmatrix}e^{ip\cdot r/\hbar},$$

$$\psi_{p^{--}}(\boldsymbol{r},s,\tau)=N\begin{pmatrix}\dfrac{\hat{p}_r}{1+\hat{p}_z}\dfrac{cp}{E+mc^2}\\ \dfrac{-cp}{E+mc^2}\\ \dfrac{\hat{p}_r}{1+\hat{p}_z}\\ -1\end{pmatrix}e^{ip\cdot r/\hbar},$$

$$N=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{(E+mc^2)(1+\hat{p}_z)}{4E}}.\tag{16}$$

螺旋性算子 Σ_p 和粒子-反粒子算子 T_3 变为

$$\Sigma_p=I_\tau\otimes\begin{pmatrix}\hat{p}_z & \hat{p}_r\\ \hat{p}_l & -\hat{p}_z\end{pmatrix},$$
$$\Sigma_p\psi_{p\mu\nu}=\mu\psi_{p\mu\nu},\tag{17}$$

$$T_3=\frac{1}{E}\begin{pmatrix}mc^2I_\sigma & cp\begin{pmatrix}\hat{p}_z & \hat{p}_r\\ \hat{p}_l & -\hat{p}\end{pmatrix}\\ cp\begin{pmatrix}\hat{p}_z & \hat{p}_r\\ \hat{p}_l & -\hat{p}_z\end{pmatrix} & -mc^2I_\sigma\end{pmatrix},$$

$$T_3\psi_{p\mu\nu}=\nu\psi_{p\mu\nu}, \tag{18}$$

哈密顿量和粒子-反粒子变换可表为

$$\hat{H}=ET_3, \qquad \hat{H}\psi_{p\mu\nu}=\nu E\psi_{p\mu\nu}, \tag{19}$$

$$C=\hat{u}\tilde{C}\hat{u}^{-1}=I_\sigma\otimes\tau_2, \; C\psi_{p\mu\nu}=\psi_{p\mu-\nu}. \tag{20}$$

B 在中心力场，Dirac 粒子的哈密顿量

$$\hat{H}=\begin{pmatrix}(mc^2+V_s)+V_v, & c\hat{p}_r\sigma_r-\frac{\mathrm{i}c\hbar}{r}\sigma_r\hat{\kappa}\\ c\hat{p}_r\sigma_r+\frac{\mathrm{i}c\hbar}{r}\sigma_r\hat{\kappa}, & -(mc^2+V_s)+V_v\end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$\sigma_r=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}, \quad \hat{p}_r=-\mathrm{i}\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r}\right), \tag{22}$$

$\hat{\kappa}$ 代表其本征值$\pm(j\pm1/2)$，$\hat{\kappa}$ 的物理意义是直角坐标系中的螺旋性算子 Σ_t 在球坐标系中的类比；$\hat{H}^2=m^2c^4-(c\hbar)^2\nabla^2$ 在直角坐标系中线性化，导致螺旋性算子 Σ_p 代表自旋沿动量的投影；$(\hat{H}-V_s)^2=m^2c^4-(c\hbar)^2\nabla^2$ 在球坐标系中线性化，导致 $\hat{\kappa}$ 算子代表自旋沿轨道角动量的投影.

粒子-反粒子变换

$$C=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_r\\ \mathrm{i}\sigma_r & 0\end{pmatrix}=C^{+}=C^{-1}, \tag{23}$$

$$CV_sC^{-1}=V_s, \; CV_vC^{-1}=-V_v, \tag{24}$$

$$C\hat{H}C^{-1}=-\hat{H}, \; \{C, \hat{H}\}=0. \tag{25}$$

$$\tilde{\psi}_{njm\kappa\nu}=C\psi_{njm\kappa\nu}=\psi_{njm\kappa-\nu}, \; \kappa=\pm1, \tag{26}$$

$$\hat{H}\psi_{njm\kappa\nu}=\nu E\psi_{njm\kappa\nu}, \tag{27}$$

波函数的具体形式为

$$\psi_{njm++}=\begin{pmatrix}\Phi^A_{jm}f_{nj}(r)\\ \Phi^B_{jm}\mathrm{i}g_{nj}(r)\end{pmatrix}, \quad \psi_{njm+-}=\mathrm{i}\begin{pmatrix}\Phi^A_{jm}g_{nj}(r)\\ \Phi^B_{jm}\mathrm{i}f_{nj}(r)\end{pmatrix}, \tag{28a}$$

$$\psi_{njm-+}=\begin{pmatrix}\Phi^B_{jm}f_{nj}(r)\\ \Phi^A_{jm}\mathrm{i}g_{nj}(r)\end{pmatrix}, \quad \psi_{njm--}=\mathrm{i}\begin{pmatrix}\Phi^B_{jm}g_{nj}(r)\\ \Phi^A_{jm}\mathrm{i}f_{nj}(r)\end{pmatrix}, \tag{28b}$$

物理系统的对称性和反对称性：哈密顿量的对称性直接导致对称算子守恒；哈密顿量的反对称性不直接导致反对称算子守恒，但导致粒子-反粒子对偶态的存在及相应的粒子-反粒子算子及其量子数，即哈密顿量的反对称性蕴涵着粒子-反粒子算子及其量子数的存在. 这是把离散对称性扩展到高维空间的连续对称性的必然结果.

与场论中的电荷共轭变换对称性的关系：正-反粒子变换是在相对论量子力学框架内，对相对论性费米子的量子态定义的，C 与 H 反对易，C 本身不是守恒量. 电荷共轭变换对称性是在量子场论框架内定义的，由于在多体理论框架内把负能空穴态定义为反粒子态(即把相应的产生-消灭算符换位)，反粒子能量变正，C 与 H 对易，C 本身可以是守恒量(也可以不是).

γ 矩阵对应的内部自由度，是自旋自由度(I_σ，σ_i)和正-反粒子自由度(I_τ，τ_i)在真空背景中按特定方式相干组合的结果. 当存在相互作用时，γ 矩阵对应的内部自由度就分解成自旋自由度(I_σ，σ_i)和正-反粒子自由度(I_τ，τ_i)，或进入 γ 矩阵的非线性的 Clifford 代数领域. 因此，这种分解所必然引进的正-反粒子自由度(I_τ，τ_i)对描述基本粒子的相互作用是必须的. 引进正-反粒子自由度的有以下结果：(1)对自由 Dirac 粒子：1)平面波解有 5 个量子数，负能来自正-反粒子量子数 $\tau_3=-1$；2)出现正-反粒子变换 $\hat{C}$ 与 $\hat{H}$ 的反对称性$\{\hat{C},\hat{H}\}=0$，3)宇称 $\hat{P}=\mathrm{i}\gamma_4=\mathrm{i}\tau_3\otimes I_\sigma$ 表明，粒子分量宇称为正(因 $\tau_3=+1$)，反粒子分量宇称为负(因 $\tau_3=-1$)；ψ_{p,σ_p,τ_3} 的螺旋性守恒，宇称不守恒 $\hat{P}\psi_{p,\sigma_p,\tau_3}\neq c\psi_{p,\sigma_p,\tau_3}$. (2)对中心力场中的 Dirac 粒子：1)平面波解也有 5 个量子数；2)出现正-反粒子变换 $\hat{C}$-$\hat{H}$ 的反对称变换$\{\hat{C},\hat{H}\}=0$；3) $\hat{\kappa}$ 是直角坐标系中的螺旋性量子数 Σ_p 在球坐标系中的类比，代表自旋沿角动量 $\boldsymbol{l}$ 的投影；4) $\hat{P}\hat{\kappa}\hat{P}^{-1}=\hat{\kappa}$ 表明球面波解宇称守恒，大小分量 Φ^A 与 Φ^B 角动量宇称相反正好被正反粒子分量宇称相反所补偿. (3) γ_μ 分解为$(I_\sigma, \sigma_i)\otimes(I_\tau,\tau_i)$是描述基本粒子相互作用的需要，与 Klifford 代数(Dirac 环)等价. (4) 考察电子偶素(e^--e^+)衰变：1)正电子偶素：$l=0$，$S=0$，$\tau=1$，C 宇称为正，衰变为偶数光子；2)仲电子偶素，$l=0$，$S=1$，$\tau=0$，C 宇称为负，衰变为奇数光子. 与通常结论一致，但提供了 τ 空间的波函数及其量子数信息.

参 考 文 献：

[1] Bjorken J D, Drell S D. Relativistic Quantum Mechanics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964, 6—9.

[2] Itzykson C, Zuber J-B. Quantum Field Theory. New York: McGraw-Hill Book Company, 1980, II: 45—88.

[3] 李振道. 粒子物理和场论. 济南：山东科技出版社，1996，109—122.

Particle-antiparticle Degrees of Freedom and Related Quantum Number for Dirac Particles*

WANG Shun-jin[1,4], ZHOU Shan-gui[2,4], Hans-Christian Pauli[3]

(1 *Department of Physics, Sichuan University, Chengdu* 610064, *China*;
2 *Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy Sciences, Beijing* 100080, *China*;
3 *Max-Planck-Institut for Nuclear Physics*, 69029 *Heidelberg, Germany*)

Abstract: The particle-antiparticle degrees of freedom and the corresponding intrinsic space are introduced to study the dynamical symmetry of the Dirac particle. As a result, the particle-antiparticle quantum number appears naturally and the Dirac particle has five quantum numbers instead of four. An anti-symmetry of the Dirac Hamiltonian and a dual symmetry of its eigen functions are explored. The $\hat{\kappa}$ operator of the Dirac equation in central potentials is found to be the analog of the helicity operator of the free particle——the alignment of the spin along the angular momentum.

Key words: particle-antiparticle degrees of freedom; particle-antiparticle quantum number; particle-antiparticle intrinsic space

* **Foundation item**: National Natural Science Foundation of China(10375039, 10175029); Major State Basic Research Development Program of China (G20000774); Knowledge Innovation Project of Chinese Academy of Sciences(KJCX2-SW-No2); Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou