第 21 卷 第 2 期
2004 年 6 月

原子核物理评论
Nuclear Physics Review

Vol. 21, No. 2
June, 2004

文章编号：1007－4627(2004)02－0099－05

玻色子多体系统的平均场理论*

玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)的冷却与激发

王顺金

（四川大学物理系，四川成都 610064）

摘　要：用量子主方程的平均场近似和代数动力学研究玻色-爱因斯坦凝聚体的 sympathetic cooling；用玻色-爱因斯坦凝聚体波函数的运动方程的平均场近似-非线性薛定谔方程研究玻色-爱因斯坦凝聚体的暗孤子和明孤子激发.

关 键 词：玻色-爱因斯坦凝聚；sympathetic 冷却；孤子激发；代数动力学；非线性薛定谔方程

中图分类号：O412.3；O572.2　　　**文献标识码**：A

1　BEC 与玻色子多体系统的平均场理论

1.1　BEC 的冷却、激发和应用

自 1995 年实现 BEC 以来[1,2]，对它的研究热潮至今仍未减退. 研究的重要内容包括 BEC 的冷却、激发和应用. BEC 是玻色子的统计法则(同一量子态可以填充许多直至宏观数目的粒子)形成的原子的宏观量子相干态凝聚体，不是原子相互作用导致的平凡的凝聚体. 要实现 BEC，必须尽量减弱甚至排除原子间的相互作用，其条件是苛刻的. BEC 实现的条件是凝聚体原子的密度 n 和热运动的德布罗依波长 λ 满足

$$n\lambda^3 \geqslant 2.612 , \qquad (1)$$

即原子间的距离应小于其热运动的德布罗依波长 λ，才能形成宏观的原子的量子波相干的凝聚体. 其中 λ 与温度 T 的关系为

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{1/2}, \qquad (2)$$

m 是原子的质量. 实现条件(1)需要：(1) 增加原子的密度，这需要发展原子的陷阱捕捉技术；(2) 把原子冷却到 nK，这需要发展原子的超低温冷却技术. 这就是为什么爱因斯坦很早就预言了 BEC，但到 20 世纪 90 年代才在实验室找到它的原因，因为直到那时才发展出实现 BEC 的上述两个技术.

BEC 的冷却技术包括：(1) 激光冷却(K→μK)；(2) 蒸发冷却(原子间作用强时使用，可实现 μK→nK)；(3) sympathetic cooling(原子间作用弱时使用，可实现 μK→nK).

原子 BEC 实现的过程包括原子的陷阱捕捉、冷却和凝聚 3 个过程. 已形成的 BEC 一般为基态，可以实现各种各样的激发，包括声子、涡旋、孤子和壁畴等激发[3,4].

BEC 已获得各种应用：用原子光学对氦的双原子范得瓦尔斯分子(He_2，其原子距离 $d=6.5$ nm)的结合能的测量相对精度已达 $\varepsilon=10^{-7}$ eV；用 BEC 进行的光谱测量相对精度达 5×10^{-12}；用 BEC 做成的原子钟的精度达 2×10^{-15} s；用 BEC 做成的原子干涉仪测量加速度或重力的精度提高 3 个量级. 用 BEC 做原子光刻可大大减小线宽；BEC 还可用于原子传输和量子信息.

1.2　BEC 冷却和激发的描述

BEC 冷却和激发涉及弱相互作用的玻色子多

收稿日期：2004－01－18；修改日期：2004－02－29

* 基金项目：国家自然科学基金资助项目；教育部博士点基金资助项目；兰州重离子加速器国家实验室理论中心基金资助项目

作者简介：王顺金(1937－)，男(汉族)，四川德阳人，教授，博士生导师，从事关联动力学与重离子输运理论、代数动力学与人造量子系统的研究.

体问题，多用平均场理论描述. 对 BEC 冷却，有简化的热分量、BEC 分量耦合的二分量平均场理论和 sympathetic cooling 的平均场理论. 对 BEC 的激发，多用 Gross-Pitaevskii 方程(非线性薛定谔方程)描述[5]. 下面分别予以介绍.

2 玻色-爱因斯坦凝聚体的 sympathetic cooling[6, 7]

2.1 sympathetic cooling 模型

当用于产生玻色-爱因斯坦凝聚体的 A 类原子的相互作用很弱，蒸发冷却的效率很低，就需要用另一种质量较大但温度很低(nK)的 B 类原子气体做冷库与用于产生玻色-爱因斯坦凝聚体的 A 类原子相互作用使之冷却. 这种冷却称 sympathetic cooling. 描述这种冷却过程的模型如下：系统的哈密顿量包括 A 类原子的哈密顿量 H_A、B 类原子的哈密顿量 H_B 和两类原子相互作用的哈密顿量 H_{AB}，即

$$H = H_A + H_B + H_{AB}, \tag{3}$$

其中，

$$H_A = \sum_n \hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z) a_n^+ a_n, \tag{4}$$

$$H_B = \int dk\, \varepsilon(k) b^+(k) b(k), \tag{5}$$

$$H_{AB} \sum_{m, m'} \int dk dk' \gamma_{m, m'}(k, k') a_m^+ a_{m'} b^+(k) b(k'), \tag{6}$$

$$\gamma_{m, m'}(k, k') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{2\mu(2\pi)^3} \int dr \Psi_m^*(r) \Psi_{m'}(r) e^{-i(k-k')\cdot r}. \tag{7}$$

a 为散射长度，$\mu = m_A m_B/(m_A + m_B)$ 为两种原子碰撞时的折合质量.

2.2 量子主方程及平均场近似

(1) 量子主方程

由总系统的密度矩阵 ρ_{A+B} 满足的冯-诺依曼方程为

$$i\hbar \frac{d\rho_{A+B}}{dt} = [H, \rho_{A+B}], \tag{8}$$

可得 A 类原子的密度矩阵 $\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{A+B}$ 的量子主方程

$$\frac{d\rho_A}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_A, \rho_A] + \hat{L}\rho_A, \tag{9}$$

其中刘维算子 $\hat{L}$ 定义为

$$\hat{L}\rho_A = \sum_{m \neq n} \Gamma_{nm}^{mn} (2a_m^+ a_n \rho_A a_n^+ a_m - a_n^+ a_m a_m^+ a_n \rho_A - \rho_A a_n^+ a_m a_m^+ a_n), \tag{10}$$

$$\Gamma_{nm}^{mn} = \frac{\pi}{\hbar} \int dk dk' \gamma_{nm}(k, k') \gamma_{mn}(k', k) n(k) \cdot [n(k) + 1] \delta(\varepsilon(k) - \varepsilon(k') + \alpha h v),$$

$$\alpha = \sum_{i = x, y, z} (n_i - m_i). \tag{11}$$

推导(9)式时做了下述近似：(1) 二级微扰；(2) ρ_B 处于热平衡；(3) Markov 近似；(4) ρ_{A+B}的非对角元退相干.

(2) 平均场近似

在平均场近似下(10)式变为

$$\hat{L}\rho_A = \sum_m \Gamma_m (2a_m^+ \rho_A a_m - a_m^+ a_m \rho_A - \rho_A a_m^+ a_m - \rho_A) + \sum_m \Gamma^m (2a_m^+ \rho_A a_m - a_m^+ a_m \rho_A - \rho_A a_m^+ a_m + \rho_A), \tag{12}$$

其中，

$$\Gamma_m = \sum_n \Gamma_{nm}^{mn} N_n, \quad \Gamma^m = \sum_n \Gamma_{nm}^{mn} (N_n + 1), \tag{13}$$

填充 Ψ_n 态的平均原子数 N_n 定义为

$$N_n = T\rho_A a_m^+ a_m. \tag{14}$$

2.3 平均场近似下主方程的动力学代数结构与动力学对称性

在平均场近似下，

$$\rho_A = \prod_m \rho_m, \tag{15}$$

ρ_m 满足下述主方程

$$\frac{d\rho_m}{dt} = \hat{\Gamma}_m \rho_m, \tag{16}$$

这是在 Ψ_n 态空间的主方程，它很像时间有关的 Hartree-Fock 方程(TDHF)，是耦合的非线性的平均场方程；$\hat{\Gamma}_m$ 对应于 TDHF 的哈密顿量，它体现了平均场，而 Ψ_n 态的平均原子数 N_n 通过(13)式进入平均场，把不同轨道的量子态耦合起来. 因此，(16)式是量子多体问题中的(TDHF)平均场理论从量子力学向量子统计力学的推广.

耗散算子(或衰退率算子)

$$\hat{\Gamma}_m = 2\Gamma_m K_m^+ + 2\Gamma^m K_m^- - 2(\Gamma_m + \Gamma^m)K_m^0 - (\Gamma_m - \Gamma^m) \ , \quad (17)$$

具有 su(1，1)动力学代数结构：

$$[K_m^0, K_m^\pm] = \pm K_m^\pm,$$
$$[K_m^-, K_m^+] = 2K_m^0. \quad (18)$$

按照代数动力学[8,9]：(1)主方程具有 su(1，1)动力学对称性(有守恒量子数)；(2)方程(16)式可以解析求解.

2.4 平均场近似下量子主方程的代数动力学求解

(1) 静态稳定解：耗散算子的本征解

为了简便，略去(16)，(17)和(18)式中表示状态的下标. 用代数动力学方法可求得(16)式

$$\frac{d\rho}{dt} = \hat{\Gamma}\rho$$

的稳态解，它们是下述本征方程的解：

$$\hat{\Gamma}\rho^n = \gamma_n \rho^n,$$
$$\hat{\Gamma} = aK^+ + bK^- - (a+b)K^0 - \frac{a-b}{2}, \quad (19)$$
$$\rho^n = C_n e^{\alpha_+ K^+} e^{\alpha_- K^-} \mid n\rangle\langle n \mid, \quad (20)$$
$$\gamma_n = n(a-b) \leqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \quad (21)$$
$$\alpha_+ = \frac{a}{b} \ , \ \alpha_- = \frac{b}{a-b} \ ,$$
$$a = 2\Gamma_m, \ b = 2\Gamma^m, \ a \leqslant b \ . \quad (22)$$

上述零本征值解是唯一的非简併的，对应于平衡态，本征值非负保证了系统长时间趋于平衡态. 应当指出，上述本征解是完备的，它们与耗散算子的厄米共轭 $\hat{\Gamma}^+$ 的本征解组成双正交系[7,10].

(2) 时间有关的解

(16)式描述量子系统的非平衡演化过程，可以用代数动力学方法求解，结果如下：

$$\rho(t) = C\exp\left[\int_0^t d\tau (b(\tau)\alpha_+(\tau) - a(\tau))\right] e^{\alpha_+(t)K^+} \cdot \sum_{N=0}^{\infty} f^N(t)\rho_N(0) \sum_{M=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} (\alpha_-(t))^{-M} \mid M\rangle\langle M \mid, \quad (23)$$

a，b 是时间的函数，α_+，α_- 满足下述微分方程：

$$\frac{d\alpha_+}{dt} = a + b\alpha_+ - (a+b)\alpha_-,$$
$$\frac{d\alpha_-}{dt} = b(1 - 2\alpha_+\alpha_-) + (a+b)\alpha_-,$$
$$f(t) = \alpha_- \exp\left[\int_0^t (2b\alpha_+ - a - b) d\tau\right] \xrightarrow{t \to \infty} \text{const} \ . \quad (24)$$

2.5 趋于平衡与平衡态的唯一性

可以证明，任何统计态 $\rho(t)$ 都趋于唯一的平衡态：

$$\rho(t \to \infty) \to Ce^{(a/b)K^+} \mid 0\rangle\langle 0 \mid$$
$$= C\sum_{n=0} \frac{(a/b)^n}{n!} \mid n\rangle\langle n \mid \ . \quad (25)$$

2.6 量子主方程的代数动力学解法的普遍性——量子统计系统的代数动力学

代数动力学是针对人造的非自治量子系统的求解问题而发展起来的，并在这类量子系统中得到了成功的应用. 上面的例子说明，代数动力学方法不仅适用于量子力学系统，而且也适用于量子统计力学的主方程的求解. 上述这种推广导致量子统计系统的代数动力学. 量子统计系统的这种代数动力学方法的优点是，它能解决量子统计力学中非平衡态统计的一些困难而重要的问题：如平衡态解的存在与唯一性，任何非平衡态演化均趋于唯一的平衡态等问题. 代数动力学对于它处理的问题，不仅可提供稳定的和与时间有关的统计态的解析解，而且还提供了量子主方程的新信息，如动力学对称和统计解所具有的守恒量子数等.

量子统计系统的代数动力学特别适合处理量子系统的耗散与退相干. 这种方法具有普遍性，它正被用于处理更多的量子耗散与退相干问题，如二能级原子与热源相互作用，二能级原子与单膜腔场和热源的相互作用(联系于量子位的退相干)，腔场与经典场和热源的相互作用等[10,11].

3 玻色-爱因斯坦凝聚体的暗孤子和明孤子激发[3—5]

3.1 BEC 凝聚体波函数的运动方程的平均场近似——Gross-Pitaevski(非线性薛定谔)方程

玻色-爱因斯坦凝聚体的宏观波函数在平均场近似下满足 Gross-Pitaevski(非线性薛定谔)方程：

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) + \lambda \mid \Psi(\boldsymbol{r}) \mid^2\right]\Psi(\boldsymbol{r}). \quad (26)$$

低温长波近似下的自洽平均场强度 λ 与散射长度 a 的关系为

$$\lambda = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \tag{27}$$

$a>0$ 为排斥力，$a<0$ 为吸引力. $V(r)$为束缚外场.

3.2 一维、单分量暗孤子与明孤子解[5]

对于长雪茄形束缚外场，可做准一维近似. 用下述 Tanh 型外场模拟长雪茄形束缚外场，

$$V(x) = V_0 \tanh^2 \beta x , \tag{28}$$

可求得定态孤子解，

$$\Psi(r, t) = R(x) e^{i(\theta(x)-\mu t)}, \tag{29}$$

$$R(x) = [A\tanh^2 \beta x + B]^{1/2}, \tag{30}$$

孤子速度势(或相位)

$$\theta(x) = C\int \frac{dx}{R^2(x)}, \tag{31}$$

其中

$$A = \frac{\beta^2 - V_0 m}{m\lambda},$$

$$C = \pm\sqrt{B}\frac{\beta[\beta^2 + m(B\lambda - V_0)]}{\sqrt{m\lambda(\beta^2 - mV_0)}}, \tag{32}$$

明孤子：

$$B = \frac{\beta N}{2\sigma} = n_0, \quad n_0 \text{ 为原子密度} \tag{33}$$

暗孤子：

$$B = n_0 - A, \tag{34}$$

孤子能量

$$\mu = \frac{\hbar^2\beta^2}{m} + \frac{B(3\beta^2 - 2mV_0)}{2(\beta^2 - mV_0)}. \tag{35}$$

明暗孤子的判据：

(1)暗孤子：$A>0$，$A+B\geqslant 0$，

1)黑孤子：$B=0 \to C=0$，$\theta(x)=0$，

2)灰孤子：$B\neq 0 \to C\neq 0$，$\theta(x)\neq 0$；

(2)明孤子：$A<0$，$A+B\geqslant 0 \to C=0$，$B=-A$，$\theta(x)=0$.

孤子的局域速度

$$v(x) = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta(x), \tag{36}$$

孤子的平均速度

$$v = \langle v(x)\rangle = \frac{\beta}{m}\sqrt{\frac{B}{A}}. \tag{37}$$

由此可知：明孤子和暗孤子速度为零，而灰孤子速度为

$$v_d = \frac{\beta}{m}\sqrt{\frac{B}{A}}. \tag{38}$$

3.3 灰孤子的速度定律

当 $V_0=0$ 时，BEC 由吸引的自洽平均场的自束缚形成. 这时有

$$A = \left[1 - \left(\frac{v_d}{c_s}\right)^2\right] n_0,$$

$$B = \left(\frac{v_d}{c_s}\right)^2 n_0, \tag{39}$$

其中声速 $c_s = \sqrt{4\pi a n_0}/m$. 引进关联长度 $l_0 = 1/\sqrt{4\pi a n_0}$和孤子宽度 $l_e = 1/\beta$，我们可得灰孤子的速度定律：

$$\frac{v_d}{c_s} = \sqrt{1 - \left(\frac{l_0}{l_e}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{L\sigma\beta^2}{m\lambda N}} = \left| \cos\frac{\triangle\theta}{2} \right|, \tag{40}$$

其中 L 为孤子长度，σ 为孤子截面，N 为 BEC 原子数，$\triangle\theta$ 为灰孤子两侧的相位差. 孤子的速度定律是非线性薛定谔方程对积分解的各个常数约束的结果，其中最重要的约束是振幅和相位的关联.

用上述定律计算，对^{87}Rb，实验：$v_d=2.0-3.0$ mm/s，理论：$v_d=2.62$ mm/s；对^{23}Na，实验：$v_d=(1.8\pm0.4)$ mm/s，理论：$v_d=1.98$ mm/s. 理论与实验[3,4]相当符合.

4 讨论与结论

BEC 的 sympathetic cooling 的主方程的平均场近似具有 su(1，1)动力学对称性，可用代数动力学方法求解；其稳态解包含唯一的平衡态解，其完备的本征值非负的本征解保证了任何非平衡态趋于唯一的平衡态. 令人惊异的是，许多量子耗散系统的主方程具有动力学代数结构. 这使得代数动力学在量子耗散与退相干问题上派上了用场，帮助人们解决非平衡态统计中的一些困难而重要的问题，如平衡态的唯一性和趋于平衡态的必然性.

BEC 的宏观波函数在平均场近似下的非线性薛定谔方程能相当好地描述 BEC 的各种激发. 孤子的速度定律是非线性薛定谔方程对积分解的各个常数约束的结果，其中最重要的约束是振幅和相位的关联. 这种关联使得自束缚的明孤子和暗孤子静止

不动，灰孤子运动的速度与其宽度，相位跃度和 BEC 粒子数之间形成严格而有趣的速度定律.

参 考 文 献:

[1] Anderson M H, Ensher J R, Mathews M R, *et al*. Science, 1995, **269**: 198.

[2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, *et al*. Phys Rev Lett, 1995, **75**: 3 969.

[3] Burger S, Bongs K, Dettmer S, *et al*. Phys Rev Lett, 1999, **83**: 5 198.

[4] Denschlag J, Simsarian J E, Feder D L, *et al*. Science, 2000, **287**: 97.

[5] Wang Shunjin, Jia Chenglong, Zhao Dun, *et al*. Phys Rev, 2003, **A68**(1): 015601.

[6] Lewensein M, Cirac J I, Zoller P. Phys Rev, 1995, **A51**(6): 4 617.

[7] Wang S J, Nemes M C, Salgueiro A N, *et al*. Phys Rev, 2002, **A66**: 033608-1.

[8] 王顺金. . 物理学进展, 1999, **19**(4): 331.

[9] Wang S J, Li F L, Weiguny A. Phys Let, 1993, **A180**: 189.

[10] Wang Shunjin, An Junhong, Luo Honggang, *et al*. J Phys, 2003, **A36**: 829.

[11] Hou Bangpin, Wang Shunjin, Yu Wanlun. Chin Phys Lett, 2003, **20**(7): 979.

Mean Field Theory for Boson Systems*

Sympathetic Cooling and Soliton Excitations of Bose-Einstein Condensate

WANG Shun-jin

(*Department of Physics, Sichuan University, Chengdu* 610064, *China*)

Abstract: The sympathetic cooling of Bose-Einstein Condensate has been studied by virtue of quantum master equation and algebraic dynamics under mean field approximation. Soliton Excitations of Bose-Einstein Condensate have been investigated by nonlinear Schrödinger equation for the wave function of the condensate.

Key words: Bose-Einstein Condensate; sympathetic cooling; Soliton Excitation; algebraic dynamics; nonlinear Schrödinger equation

* **Foundation item**: National Natural Science Foundation of China; The Foundation for Ph. D. Training Program of China; Foundation of Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou