文章编号：1007－4627(2004)01－0060－05

正弦平方势与沟道辐射的谱线展宽

韦洛霞，罗诗裕，陈少文
（东莞理工学院，广东 东莞 523106）

摘　要：利用曾经提出的正弦平方势解析地处理了非线性效应和偶极效应对沟道谱线宽度的影响，解释了正电子能量在 5 GeV 附近的 Si (110)面沟道辐射谱特征.

关键词：正弦平方势；沟道辐射；非线性；正电子；谱线

中图分类号：O471.5；O571.33　　　**文献标识码**：A

1　引言

随着加速器技术的发展，人们对带电粒子束同物质相互作用进行了广泛而深入的研究. 带电粒子的沟道效应和沟道辐射便是人们发现的重要现象之一. 所谓沟道效应是指，当带电粒子沿着晶体某些方向(特别是低晶面指数方向)入射时，很容易穿透到晶体内部，对于粒子来说，这个方向就像一条通道一样，这种现象称为沟道效应. 而且，经典物理学证明，在电磁场中做加速运动的带电粒子将不断向外辐射能量，在晶格场中运动的沟道粒子也不例外，这种辐射称为沟道辐射.

人们在研究带电粒子面沟道辐射或沟道效应时，常常假设带电粒子同晶体之间的相互作用势是平面连续势，而且假设粒子运动无阻尼. 于是，粒子运动方程是一个无阻尼的非线性微分方程，是一个不显含时间的自洽系统. 注意到晶体的特点是晶格原子规则地排列在格点上，而外层(价)电子通常都游离在点阵之间(或沟道内部)，因此我们可以认为占据格点的不再是原子而是带正电的离子. 略去格点的不连续性，假设晶面与粒子的相互作用势是连续的，而且是平面的，这就是所谓平面连续势假设. 在平面连续近似下，如果不考虑带电粒子与沟道内部电子的相互作用，则带电粒子(比如正电子)在面沟道中的运动行为就像在两个带(正)电平面之间的运动一样，总是在中心平面附近振荡. 正是这一假设成功地描写了很多实验现象，特别是在低能和小振幅情况下，这一假设很好地成立[1—4].

控制沟道粒子运动的是粒子-晶体相互作用势. 常用的粒子-晶体相互作用势有 Lindhard 势和 Moliere 势. 在经典力学框架内，粒子运动方程是一个非线性微分方程，由于方程的复杂性，一般都只能数值求解. 仅在简谐近似下，处理才是解析的. 但是这种近似又显粗糙. 为此，我们曾经引入正弦平方势来描述粒子-晶体相互作用[5]，结果使沟道辐射和沟道效应的处理变得完全解析，而结果也同实验基本一致.

值得注意的是，不管采用哪种相互作用势，在简谐(线性)近似下沟道辐射都只有一条谱线. 但是由于系统的非线性，这条谱线将被展宽. 文献[6]用量子力学方法讨论了这个问题. 当然，除了系统非线性外，影响谱线宽度的还有多普勒效应、晶格热振动、电子多重散射和偶极效应等因素. 因此，实验上观察到的谱线总有一定宽度. 从应用出发，人们总是希望沟道辐射的谱线越窄越好. 幸好，在储存环的束流冷却中，由于“束流晶化”产生的高速运动的晶化束可使 Doppler 展宽减至最小，甚至消失. 文献[7—9]对储存环“束流晶化”的非线性动力学进行了讨论，并指出了获得高速运动晶体的可能性以及若干重要的应用前景.

不过，人们在实验上确实发现，能量为 5.0 GeV 的正电子在 Si(110)面沟道中运动时，沟道辐射谱线非常窄. 这一现象引起了人们的注意，并试图从理论上加以解释，但处理都缺乏解析性. 我们利用正弦平方势可以解析地处理系统非线性和偶极效应对谱线展宽的影响. 结果表明，能量为5.7

收稿日期：2003－06－30；**修改日期**：2003－10－08
作者简介：韦洛霞(1963—)，女(汉族)，河南三门峡人，讲师，从事非线性和复杂性研究.

GeV 的正电子的 Si(110)面沟道辐射谱线非常窄. 这一结果与实验基本符合.

2　运动方程

在讨论(平)面沟道辐射或沟道效应时，一般都假设粒子-晶体相互作用势为平面连续势，而且势的大小只与粒子离开沟道中心平面的距离 x 有关. 假设粒子-晶体相互作用为 $V(x)$，粒子纵向运动方向为 z 方向，在(x,z)平面内，粒子运动方程可用矢量形式表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{i}\ , \tag{1}$$

或用分量形式表示为

$$\left.\begin{aligned} m_0\dot{x}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + m_0\gamma\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x) \\ m_0\dot{z}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + m_0\gamma\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

其中，m_0 是粒子静止质量，而

$$\boldsymbol{p} = m_0\gamma(\dot{x}\,\boldsymbol{i} + \dot{z}\,\boldsymbol{k}) \tag{3}$$

是粒子动量，γ 是相对论因子，且

$$\gamma^2 = \left[1 - \frac{\dot{x}+\dot{z}}{c^2}\right]^{-1}. \tag{4}$$

注意到 $E_0 = m_0\gamma_0c^2$，$\beta_z = \dot{z}/c$，$\beta_x = \dot{x}/c = [1-(\gamma_0^2\beta_{z0}^2+1)/\gamma^2]^{1/2}$，由方程(2)可得

$$\gamma(t) = \gamma_0\left(1 + \frac{V(0)-V(x)}{E_0}\right)\ , \tag{5}$$

其中，γ_0 是时间 $t=0$ 的相对论因子. 对式(5)微分

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma_0}{E_0}\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)\ , \tag{6}$$

再将式(6)代入式(2)的第一式，可得

$$m_0\gamma\ddot{x} + \left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x) = 0\ . \tag{7}$$

考虑到 $\dot{x}^2/c^2 \ll 1$，$\gamma \cong \gamma_0$，则方程(7)化为一般常见的横向运动方程[4]

$$m_0\gamma_0\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x) = 0\ . \tag{8}$$

方程(8)描写的是一个自洽系统，它的一次积分给出横向能量守恒公式：

$$\frac{1}{2}m_0\gamma_0\dot{x}^2 + V(x) = E_\perp\ , \tag{9}$$

其中，横向能量 $E_\perp$ 由系统的初值确定，且表示为

$$E_\perp = \frac{1}{2}m_0\gamma_0v_0^2\sin^2\varphi + V(x_0)\ , \tag{10}$$

v_0 是粒子的初始速度，x_0 是初始位置，φ 是粒子对于沟道平面的入射角，$\dot{x}_0 = v_0\sin\varphi$ 是初始横向速度. 对式(9)再积分一次，可得时间

$$t = \left(\frac{m_0\gamma_0}{2}\right)^{1/2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E_\perp - V(x)}}\ . \tag{11}$$

根据定义，粒子运动周期可表示为[6]

$$T = 4\left(\frac{m_0\gamma_0}{2}\right)^{1/2}\int_0^{x_{\max}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E_\perp - V(x)}}\ , \tag{12}$$

其中，$x_{\max}$是粒子最大振幅. 如果令

$$A'(E_\perp) = 4\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}\int_0^{x_{\max}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E_\perp - V(x)}}\ , \tag{13}$$

则粒子运动周期 T 可表示为

$$T = \sqrt{\gamma_0}A'(E_\perp)\ . \tag{14}$$

由式(13)引入系统的作用量

$$A(E_\perp) = 8\left(\frac{m_0}{2}\right)^{1/2}\int_0^{x_{\max}}\sqrt{E_\perp - V(x)}\,\mathrm{d}x\ , \tag{15}$$

则粒子平均横向动能可表示为

$$\langle E_\perp - V(x)\rangle = \frac{1}{2}\frac{A(E_\perp)}{A'(E_\perp)}\ , \tag{16}$$

其中符号〈…〉表示平均值. 由式(2)可知

$$\gamma\dot{z} = \gamma_0\dot{z}_0\ . \tag{17}$$

将式(5)代入方程(17)，可得

$$\dot{z} = v\cos\varphi\left[1 - \frac{V(0)-V(x)}{E_0} + O\left(\frac{V(x)}{E_0}\right)^2\right]. \tag{18}$$

注意到 $V(x)/E_0$ 是一个小量(例如，对于能量为 5 GeV 的正电子在 Si(110)面沟道中运动时，$V(x)/E_0$ 为 10^{-9} 量级)，略去二阶小量，方程(18)化为

$$\dot{z} = v\cos\varphi\left[1 - \frac{E_\perp - V(x)}{E_0}\right]. \tag{19}$$

讨论一种稍微特殊的情况，假设入射角 $\varphi=0$，则 $\cos\varphi=1$，而 $V(0)=E_\perp$，于是式(19)可进一步化为

$$\dot{z} = v\left(1-\frac{E_\perp - V(x)}{E_0}\right). \tag{20}$$

注意到

$$\begin{aligned} E_\perp - V(x) &= \langle E_\perp - V(x)\rangle + \Delta(E_\perp - V(x)) \\ &= \langle E_\perp - V(x)\rangle - \Delta V(x) \\ &= \langle E_\perp - V(x)\rangle - \langle V(x)\rangle - V(x). \end{aligned} \tag{21}$$

将式(21)代入式(20)，并注意到式(16)，则方程(19)化为

$$\dot{z} = v\left[1-\frac{A(E_\perp)}{2E_0 A'(E_\perp)} + \frac{1}{E_0}\langle V(x)\rangle - V(x)\right].$$

考虑到平均值 $\langle\langle V(x)\rangle - V(x)\rangle = 0$，上式化为

$$\dot{z}(t) = v\left[1-\frac{A(E_\perp)}{2E_0 A'(E_\perp)}\right]. \tag{22}$$

考虑到 Doppler 效应，n 次谐波的辐射频率可表示为[5, 6]

$$\omega_n = \frac{n\,\Omega_0}{1-\langle\beta_z\rangle\cos\theta}, \tag{23}$$

其中，$\Omega_0 = 2\pi/T$ 是惯性系中粒子振荡频率，θ 是辐射方向(或观察者)与 z 轴之间的夹角. 令 $\theta=0$，可得最大辐射频率

$$\omega_{n\,\max} = \frac{n\,\Omega_0}{1-\langle\beta_z(t)\rangle}, \tag{24}$$

其中角标 max 表示最大. 注意到 $\langle\beta_z(t)\rangle = \langle\dot{z}(t)\rangle/c$，$\Omega_0 = 2\pi/T$ 和方程(14)，将式(22)代入式(24)，可得 n 次谐波的最大辐射能量

$$E_{n\,\max} = \hbar\omega_{n\,\max} = \frac{2\pi\gamma_0^{3/2} n\,\hbar}{A'(E_\perp) + \dfrac{\beta}{2}\dfrac{\gamma_0 A(E_\perp)}{m_0 c^2}}. \tag{25}$$

由式(13)和(15)可以看出，只要粒子-晶体相互作用势给定，作用量 $A(E_\perp)$ 和它的微商就是完全确定的，因而，粒子的最大辐射能量 $E_{n\,\max} = \hbar\omega_{n\,\max}$ 也就完全确定(见式(25)). 本文的目的就是企图利用我们曾经提出的正弦平方势来讨论最大辐射能量 $E_{n\,\max} = \hbar\omega_{n\,\max}$ 的一些特征. 注意到式(25)的分母包含两项，第一项只与系统的初值(横向能量)有关，第二项与粒子入射能量 γ_0 有关. 这就是说，粒子最大辐射能量不仅与相互作用势的非线性有关，而且还与偶极效应有关. 这里的偶极性是指与粒子能量相关的一个概念，常说的偶极近似是指系统的状态数比较多，或粒子能量比较低的情况. 在偶极近似下，系统的性质可以用经典方法描述，在非偶极近似下，系统只能用量子力学方法描述. 在这两种近似交叉处，情况比较复杂.

3　正弦平方势

引入的无量纲正弦平方势[10, 11]

$$V(X) = K\beta_1 \sin^2(aX), \tag{26}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2ax}{d_p},\ a = \frac{\pi}{2} \\ K &= \pi Z_1 Z_2 e^2 N d_p^2 \end{aligned}\right\}, \tag{27}$$

β_1 是势参数，d_p 是晶面间距，Z_1 和 Z_2 是入射粒子和晶体的原子序数，Nd_p^2 是晶体的面密度. 将式(26)代入式(15)，可得作用量

$$A(E_\perp) = 4\left(\frac{2m_0 K\beta_1 d_p^2}{\pi^2}\right)^{1/2} \cdot \left\{E\left(\arcsin p, \frac{1}{p}\right) - \left(1-\frac{1}{p^2}\right)F\left(\arcsin p, \frac{1}{p}\right)\right\}, \tag{28}$$

其中 F 和 E 分别是第一类和第二类椭圆积分，而

$$p^2 = \frac{K\beta_1}{E_\perp}. \tag{29}$$

将式(26)代入式(13)，可得

$$A'(E_\perp) = 2\left(\frac{2m_0 d_p^2}{\pi^2 K\beta_1}\right)^{1/2} F\left(\arcsin p, \frac{1}{p}\right). \tag{30}$$

将式(28)和(30)代入式(25)，可得最大辐射能量

$$E_{n\,\max} = \hbar\omega_{n\,\max}(0,\gamma_0)\Big/\left\{F\left(\arcsin p, \frac{1}{p}\right) + l\left[E\left(\arcsin p, \frac{1}{p}\right) - \left(1-\frac{1}{p^2}\right)F\left(\arcsin p, \frac{1}{p}\right)\right]\right\}, \tag{31}$$

其中

$$l = \frac{2\gamma_0 K\beta_1}{m_0 c^2},$$

$$\omega_{n\,\max}(0,\gamma_0) = n\left(\frac{2\pi^3\gamma_0^3 K\beta_1}{m_0 d_p^2}\right)^{1/2}, \tag{32}$$

4 结果和讨论

4.1 粒子运动方程与振动周期

当粒子-晶体相互作用势由正弦平方势式(26)给出时，在经典物理框架内，粒子运动方程可表示为[4]

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \sin\xi = 0 \ , \tag{33}$$

其中

$$\xi = \alpha X \ , \quad \tau = \left(\frac{\pi^2 K\beta_1}{E_\perp \, d_p^2}\right)^{1/2} v\,t \ . \tag{34}$$

方程(33)是一个标准的摆方程. 它的解可用 Jacobian 椭圆函数解析地表示为[3,4]

$$\xi = \arcsin(\kappa sn\tau)$$
$$\frac{d\xi}{d\tau} = 2\kappa cn\tau \ , \tag{35}$$

其中 $sn\tau$ 和 $cn\tau$ 是 Jacobian 椭圆函数[12].

当相互作用势由式(26)给出时，式(12)可具体表示为

$$\begin{aligned} T &= 4\left(\frac{m_0\gamma}{2}\right)^{1/2}\int_0^{\pi/2}\frac{(d_p/\pi)}{\sqrt{E_\perp - K\beta_1\sin^2\xi}}d\xi \\ &= \frac{4d_p}{\pi E_\perp^{1/2}}\left(\frac{m_0\gamma}{2}\right)^{1/2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\xi}} \\ &= \frac{4d_p}{\pi}\left(\frac{m_0\gamma_0}{2E_\perp}\right)^{1/2}F(\kappa) \ , \end{aligned} \tag{36}$$

其中

$$F(\kappa) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\xi}} \ , \tag{37}$$

称为第一类椭圆积分，而

$$\kappa = \left(\frac{K\beta_1}{E_\perp}\right)^{1/2} \tag{38}$$

是椭圆函数的模. 利用正弦平方势，运动方程的解和粒子振动周期可用椭圆函数和椭圆积分表示，而且，作用量和最大辐射能量也可以解析地表示(如果用 lindhard 势和 Moliere 势，则只能数值求解). 正是基于这一原因，我们引入正弦平方势，具体分析非线性效应和偶极效应对谱线宽度的影响.

4.2 非线性效应和偶极效应对谱线展宽的影响

不管采用经典物理方法，还是量子力学方法，在相互作用势的简谐近似下，系统都只有一条谱线，而且这条谱线非常尖锐. 实际上，由于非线性效应和其它因素的影响，谱线总有一定展宽. 但是，实验发现当正电子能量 $E_0=5.0$ GeV 时，它的面沟道辐射谱线却很窄. 从式(25)可以直接看出，最大辐射能量 $E_{n\,max}$ 与横向能量有关，在相互作用势的简谐近似下，这一依赖性不复存在. 因此，一般说来，非线性将使谱线展宽；同时，考虑到 $A'(E_\perp)$ 和 $A(E_\perp)$ 随 $E_\perp$ 变化的单调性正好相反，可望在某一能量 γ_{0c} 上(或它的附近)，最大辐射能量 $E_{n\,max}$ 不再与 $E_\perp$ 有关(或只有微弱的依赖性). 于是，可以预期，在 γ_{0c} 这个能量上，谱线不会明显展宽，而仅仅是一条尖锐的谱线，这就可能对实验现象作出理论解释. 我们采用正弦平方势，并以正电子Si(110)面沟道辐射为例，讨论了一次谐波辐射能量 E_{1max} 与横向能量 $E_\perp/K\beta_1$ 之间的关系，进而说明谱线变窄的原因.

需要指出的是，我们采用正弦平方势和时间相关的相对论因子后，非线性和偶极效应都包含在式(31)和(32)中. 换句话说，从式(31)和(32)出发可以同时考虑这两种因素的影响. 选择与入射粒子有关的参数为 $Z_1=1$，$E_0=5$ GeV；与硅单晶有关的参数为 $Z_2=14$，$d_p=1.29$ Å；与相互作用势有关的参数为 $\beta_1=0.2$. 根据式(31)和(32)，并注意到式(36)，发现在粒子能量 $E_0=5.0$ GeV 附近，E_{1max} 与 $E_\perp/K\beta_1$ 的依赖性很小，而在 $E_0=5.7$ GeV 时，这种相关性最弱. 这就是说，当粒子-晶体相互作用势为正弦平方势时，$E_0=5.7$ GeV 的正电子面沟道辐射谱线很窄. 这同实验发现的 $E_0=5.0$ GeV 附近有一条尖锐谱线基本一致.

参 考 文 献:

[1] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Sine - squared Potential and Channeling Effects in Bent Crystal (I)[J]. Radiation Effects Express, 1988, **2**(1): 45.

[2] 罗诗裕，马如康，邵明珠. 形(应)变超晶格的沟道效应与系统的相平面特征[J]. 原子核物理评论，2002，**19**(4)：407.

[3] 林钧锋，罗诗裕，周小方等. 形(应)变超晶格的退道效应与

系统的全局分叉[J]. 原子核物理评论，2003，**20**(1)：55.

[4] 罗诗裕，邵明珠，周小方等. 形变超晶格的位错模型与粒子的退道效应[J]. 半导体学报，2003，**24**(5)：485.

[5] Luo Shiyu , Shao Mingzhu. Sine-squared Potential of Planar Channeled Particles and Kumakhov Radiation of Charged Particles[J]. Chin Phys, USA , 1984, **4**(3): 527.

[6] 罗诗裕，邵明珠. 弯晶沟道的全局分叉及其混沌行为[J]. 物理学报，1988，**37**(8)：1 278.

[7] 邵明珠，Hofmann I，罗诗裕. 一维晶化束的非线性动力学(I)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 189.

[8] 邵明珠，Hofmann I，罗诗裕. 一维晶化束的非线性动力学(II)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 200.

[9] 邵明珠，Hofmann I，罗诗裕. 一维晶化束的非线性动力学(III)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 207.

[10] 胡西多，邵明珠，罗诗裕. 正弦平方势与带电粒子的准沟道辐射[J]. 原子核物理评论，2003，**20**(3)，222.

[11] 邵明珠，罗诗裕. 带电粒子沟道辐射的混沌行为[J]. 中国激光，1987，**14**(8)：547.

[12] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products[M]. New york: Academic Press, 1980, 948—953.

Nonlinearity Effects on Width of Spectral Line of Channeling Radiations

WEI Luo-xia, LUO Shi-yu, CHEN Shao-wen

(*Dongguan University of Technology*, *Dongguan* 523106, *Guangdong*, *China*)

Abstract: The spectral properties of the planar channeling radiation of positron have been investigated by using Sine-squared Potential. At positron energy of 5 GeV a sharp line has been explained for the planar channeling radiation in Si(110). It is that theoretic results are compatible to the experiments.

Key words: sine-squared potential; channeling radiation; nonlinearity; positron; spectral line