第 19 卷　第 3 期　　原子核物理评论　　Vol. 19, No. 3
2002 年 9 月　　Nuclear Physics Review　　Sep., 2002

**文章编号**：1007－4627(2002)03－0347－05

# 量子噪音与量子 Langevin 方程*

文万信[1,2]，靳根明[1]

（1 中国科学院近代物理研究所，甘肃 兰州 730000；
2 苏州大学核医学院，江苏 苏州 215007）

**摘　要**：介绍了量子噪音和量子 Langevin 方程，并与经典噪音和经典 Langevin 方程进行了比较．量子噪音来源于两种途径，第一种与经典噪音相似，第二种则起源于 Heisengberg 测不准原理．同时，也简略给出了量子 Langevin 方程的推导．

**关 键 词**：量子噪音；量子涨落；随机方程

**中图分类号**：O414.2　　　**文献标识码**：A

量子噪音存在于许多物理领域，近些年理论与实验都作了许多研究[1－4]，在量子光学与 Josephson 结实验中已经对量子噪音作了较多研究．一些量子系统中出现的问题也可以归结为量子噪音问题．量子随机问题的研究具有实际应用价值，量子半导体器件就存在量子噪音或量子随机问题．量子 Langevin 方程是研究量子随机问题的一个基本方程，在其基础上也发展了其它的量子随机方程．这里我们主要介绍量子噪音和量子 Langevin 方程．

## 1　经典噪音

浸人液体中的 Brown 粒子的运动由粒子与液体分子的相互作用决定．原则上对于纯粹的经典体系，从微观角度可以为粒子与每一个分子建立运动方程，联立求解这些方程就能够确定粒子的运动．然而 1 摩尔的分子数目就多达 $10^{23}$ 量级，运动方程数量如此之巨，一方面根本无法精确确定变量的初始条件，另一方面即使能够确定初始条件，人工或计算机也无法完成这样的计算任务．于是对系统变量的几率描述便成为一种有效实用的方法，对粒子运动位置的精确描述改用粒子出现在某一位置的几率来描述．在得到系统变量的密度分布函数之后，系统变量的变化平均行为也就随之确定．热力学中常常将研究对象分为自由度较少的系统与自由度较多的热库(heat bath)，热库对系统的影响是明显的，而系统对热库的影响可以忽略．系统与热库之间存在能量交换，造成系统能量耗散及系统变量涨落．自由度较少的系统与自由度较多的热库的相互作用所引出的重要概念便是噪音与耗散，无论是经典力学还是量子力学都是如此．热库的作用体现在系统运动方程中的随机力与耗散力．这一思想最早起源于 Langevin．在粘滞流体中的 Brown 粒子的运动由 Langevin 方程描述．由于无法精确处理无限多的微观运动方程，与涨落、噪音、耗散等概念相联系的随机方法便成为行之有效的方法．涨落、噪音、耗散等概念意味着未完全考虑所涉及到的全部自由度，仅仅考虑主要的自由度，而其它数目巨大的次要自由度对少数主要自由度的影响通过随机量来体现．在一定意义上讲，经典噪音的根源存在人为的因素．由于所研究的系统总是处在具有无限多自由度的宇宙环境之中，不可能完全消除经典噪音．这里经典噪音所涉及的系统与热库都是纯经典的，实际问题要复杂的多，热库可能是纯经典的，有可能是经典与量子混合的．量子噪音根源与经典噪音有相同之处，也有不同之处，后面要讨论这一问题．

在经典 Brown 运动中，若浸人液体的宏观粒子的质量 $m$ 远大于分子质量，液体分子热涨落对粒子速度的影响可忽略不计，粒子所受到的磨擦力或阻力由 Stoke 定律给出，即 $F_{c}=-\sigma v$，摩擦力的物理

**收稿日期**：2002－12－30；**修改日期**：2002－07－12
* **基金项目**：国家自然科学基金资助项目(19805012)
**作者简介**：文万信(1964－)，男(汉族)，甘肃白银人，教授，从事核物理与核医学研究．

实质是液体分子与粒子的碰撞引起的耗散. 在外力作用下粒子运动方程为

$$m\dot{v} + \alpha v = 0 \ , \tag{1}$$

由此得到 $v(t) = v(0)\mathrm{e}^{-t/\tau}$ ($\tau = 1/\gamma = m/\alpha$ 为弛豫时间). 显然, 粒子最终将停止运动. 如果粒子质量较小, 液体分子热涨落对粒子运动的影响就必需加以考虑, 方程(1)也不能精确成立, 但如果粒子质量与液体分子质量相比仍然比较大, 则液体分子对粒子的作用可分解为两部分, 即取平均的摩擦力或阻尼力 $F_c$ 与平均后所剩的随机力 $F_f(t)$. 方程(1)也相应改变为

$$\dot{v} + \gamma v = \Gamma(t) \ , \tag{2}$$

其中 $\Gamma(t) = F_f(t)/m$ 为单位质量的涨落力, 或称 Langevin 力. 方程(1)是常微分方程, 而方程(2)是随机方程. 为了求解它, 需要对 Langevin 力的性质作一些假定. 首先, Langevin 力对系综的平均为零, 即 $\langle\Gamma(t)\rangle = 0$, 这是因为平均速度 $\langle v\rangle$ 仍满足方程(2). 另外, 不同分子与粒子的碰撞大体上相互独立. 只要 $|t-t'| \geq \tau_0$, 即时间间隔大于分子与粒子碰撞的持续时间, 不同时间 $t$ 和 $t'$ 的 Langevin 力的乘积的系综平均也为零, 即 $\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = 0$ . 一般碰撞持续时间远小于弛豫时间, 取极限 $\tau_0 \to 0$, 则

$$\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = q\,\delta(t'-t) \ , \tag{3}$$

其中 $q = 2\gamma\kappa T/m$. 至于更高的关联, 如 $\langle v(t_1)v(t_2)\cdots v(t_n)\rangle$, 一般都假定 $\Gamma(t)$ 是高斯分布, 这样偶数矩就能够展开为二级关联的多项式, 而奇数矩为零. 具有 δ 关联的噪音称为白噪音, 否则称为色噪音. 如果还有外场 $V(x)$ 作用于 Brown 粒子, Langevin 方程则为

$$m\ddot{x} = V'(x) - \gamma\dot{x} + \sqrt{2\gamma\kappa T}\xi(t) \ . \tag{4}$$

上式为经典 Langevin 方程的一般形式.

## 2 量子噪音根源

经典噪音是由于系统与热库的耦合所造成的. 系统与热库的耦合同样也是造成量子系统噪音的原因. 除此而外, 量子系统噪音还有一个更重要的来源, 这便是量子力学的一个本质问题, 即 Heisenberg 测不准原理. 纯量子噪音起源于 Heisenberg 测不准原理. 量子系统的噪音有两个来源, 一是系统与热库的耦合, 它是系综平均后的涨落, 与经典噪音具有相似的性质; 其二是与测不准原理相联系的纯粹的量子力学效应, 是量子力学平均后的涨落. 在量子力学中, 两个正则共轭变量无法同时精确测量, 如位置和动量, 它们遵守测不准原理 $\Delta x\Delta p \geq \hbar/2$. 根据 Heisenberg 测不准原理无法测量量子系统的全部变量. 以量子力学的任意两个算符 $x$ 和 $y$ 为例, 重复测量 $x$ 和 $y$, 它们将围绕平均值 $\langle x\rangle$ 和 $\langle y\rangle$ 涨落[1],

$$\delta x = x - \langle x\rangle, \ \delta y = y - \langle y\rangle \ . \tag{5}$$

这里 $\langle\rangle$ 表示量子力学以及统计系综平均. 任何量子力学算符都满足 $\langle AA^+\rangle \geq 0$. 令 $A = \delta x + \lambda\mathrm{e}^{i\theta}\delta y$, 则有

$$\langle\delta x^2\rangle + \lambda(\cos\theta\langle[\delta x,\delta y]_+\rangle - \mathrm{i}\,\sin\theta\langle[\delta x,\delta y]\rangle) + \lambda^2\langle\delta y^2\rangle \geq 0 \ . \tag{6}$$

上式成立的条件为

$$(\cos\theta\langle[\delta x,\delta y]_+\rangle - \mathrm{i}\,\sin\theta\langle[\delta x,\delta y]\rangle)^2 \leq 4\langle\delta x^2\rangle\langle\delta y^2\rangle \ , \tag{7}$$

上式对任意 $\theta$ 都成立, 左边取极大值

$$\langle\delta x^2\rangle\langle\delta y^2\rangle \geq \frac{1}{4}\,|\,\langle[\delta x,\delta y]\rangle\,|^2 + \frac{1}{4}\,|\,\langle[\delta x,\delta y]_+\rangle\,|^2 \ , \tag{8}$$

右边量子项与经典项并存, 其中

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}\langle[\delta x,\delta y]_+\rangle = \frac{1}{2}\langle\delta x\delta y + \delta y\delta x\rangle \tag{9}$$

为协方差. 在经典情况下 $\langle AB\rangle = \langle BA\rangle$, 对于量子情况, 只有两个算符对易时等式才成立. 对于经典情况, 则有

$$\langle\delta x^2\rangle\langle\delta y^2\rangle \geq \sigma_{xy}^2 \ , \tag{10}$$

若 $x$ 与 $y$ 相关联方差的乘积满足上式. (8)式中, 尽管右边第二项存在经典对应, 但还不是纯经典项, 无论是经典还是量子情况, 它都起源于系统与热库的耦合. 第一项是纯量子力学项, 因为当 $\delta x$ 与 $\delta y$ 对易时此项将消失. 若 $x$ 与 $y$ 是正则共轭变量, 则有

$$\Delta x\Delta y \geq \sqrt{\frac{1}{4}\hbar^2 + \sigma_{xy}} \ . \tag{11}$$

若 $x$ 与 $y$ 无关联，即 $\sigma_{xy}$ 消失，则回到 Heisenberg 测不准关系，测不准原理本身就是量子噪音的根源.

## 3　量子 Langevin 方程

量子 Langevin 方程的推导基于一些假设[1, 3]，其中最基本的假设是热库是诸多谐振子的集合，另外谐振子集合还需具备如下一些性质：(1) 谐振子频率密度谱平滑；(2)系统与热库的耦合是线性的；(3)系统算符与热库算符的耦合系数必须是谐振子频率的光滑函数. 这些性质在量子场论中自动满足，电磁场便是一个最好的例子. 这里方程中的变量都是算符，而非物理变量. 假设热库的 Hamilton 量的形式为

$$H_{\mathrm{B}} = \sum_n \left\{ \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{\kappa_n q_n^2}{2} \right\} . \tag{12}$$

系统的 Hamilton 量 $H_{\mathrm{S}}$ 的形式可以是任意的，用 $Z$ 表示系统变量算符的集合. 系统与热库耦合后总的 Hamilton 量为

$$H = H_{\mathrm{S}}(Z) + \sum_n \left\{ \frac{1}{2m_n} p_n^2 + \frac{\kappa_n}{2} (q_n - X)^2 \right\} , \tag{13}$$

其中 $X$ 是系统算符集 $Z$ 的一个算符. 这样的耦合比较简单，仅仅是势能依赖于 $X$. 作正则变换，

$$q_n \to \frac{p_n}{\sqrt{\kappa_n}} ,$$

$$p_n \to - \frac{q_n}{\sqrt{\kappa_n}} ,$$

$$\frac{\kappa_n}{m_n} \to \omega_n^2 ,$$

$$\sqrt{\kappa_n} \to \kappa_n . \tag{14}$$

因此总的 Hamilton 量变为

$$H = H_{\mathrm{S}}(Z) + \frac{1}{2} \sum_n \{ (p_n - \kappa_n X)^2 + \omega_n^2 q_n^2 \} . \tag{15}$$

在同一时间，算符对易关系如下：

$$[Z_n, p_n] = [Z_n, q_n] = 0 ,$$
$$[p_n, p_m] = [q_n, q_m] = 0 ,$$
$$[q_n, p_m] = \mathrm{i}\hbar \delta_{nm} . \tag{16}$$

不同时间的算符对易关系较为复杂，如一般情况，$[Z(t), p_n(t')] \neq 0$. 若系统算符与热库算符是非线性耦合的，则很难用 Langevin 方程来处理，这种情况用主方程处理较为适宜. 由 Heisenberg 方程得到热库谐振子变量算符的运动方程为

$$\dot{q}_n = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, q_n] = p_n - \kappa_n X ,$$
$$\dot{p}_n = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, p_n] = - \omega_n^2 q_n . \tag{17}$$

用产生湮灭算符表示 $q_n$ 和 $p_n$，

$$q_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}} (a_n^+ + a_n) ,$$
$$p_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}} (a_n^+ + a_n) . \tag{18}$$

$a_n$的运动方程为

$$\dot{a}_n = - \mathrm{i}\omega_n a_n - \kappa_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2\hbar}} X , \tag{19}$$

其解为

$$a_n = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n (t-t_0)} a_n(t_0) - \kappa_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2\hbar}} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n (t-t')} X(t') \mathrm{d}t' . \tag{20}$$

$a_n^+$ 的解与(20)式形式相似，是 $a_n$ 的厄米共轭. 系统变量 $Y$ 的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, Y] = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_{\mathrm{S}}, Y] + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar} \sum_n [[Y, p_n - \kappa_n X]_+, \kappa_n X] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_{\mathrm{S}}, Y] + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar} \sum_n [[Y, \kappa_n X], p_n - \kappa_n X]_+ . \end{aligned} \tag{21}$$

将(18)式代入(21)式后分步积分，并利用$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ 得到

$$\dot{Y} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_{\mathrm{S}}, Y] - \frac{\mathrm{i}}{2\hbar} \{ X, [Y, \xi(t) - \int_{t_0}^{t} f(t-t') \dot{X}(t') \mathrm{d}t' - f(t-t_0) X(t_0)]_+ \} , \tag{22}$$

或者

$$\dot{Y}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_{\mathrm{S}},Y]-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[[X,Y],\xi(t)-\int_{t_0}^{t}f(t-t')X(t')\mathrm{d}t'-f(t-t_0)X(t_0)]_+\,, \tag{23}$$

其中

$$\xi(t)=\mathrm{i}\sum_{n}\kappa_n\sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}}[-a_n(t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n(t-t_0)}+a_n^{+}(t_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n(t-t_0)}]\,,\quad f(t)=\sum_{n}\kappa_n^2\cos(\omega_n t)\,. \tag{24}$$

方程(22)和(23)就是一般形式的量子 Langevin 方程，其形式还可以进一步简化．考察在势场 $V$ 中运动的粒子，重新标记系统的正则变量为 $q$ 和 $p$，系统与热库耦合的变量 $X$ 选作 $q$．系统的 Hamilton 量为

$$H_{\mathrm{S}}=\frac{p^2}{2m}+V(q)\,. \tag{25}$$

由(23)得到

$$\dot{q}(t)=\frac{p(t)}{m}\,,$$

$$\dot{p}(t)=-V'(q(t))-\int_{t_0}^{t}f(t-t')\dot{q}(t')\mathrm{d}t'-f(t-t_0)q(t_0)+\xi(t)\,. \tag{26}$$

$f(t)$的一个显著特点是其具有记忆功能，它使得 $t$ 时刻的运动方程依赖于 $t$ 之前的 $\dot{q}(t')$．如果 $f(t)$趋于零的速度快于 $\dot{q}(t')$的变化速度，则可以用 $\dot{q}(t)$ 代替 $\dot{q}(t')$，而且只有 $t$ 离初始时间 $t_0$ 较远时，$f(t-t_0)q(t_0)$项也可以略去．系统与热库的耦合一般都十分复杂，不过可以采取一些合理的假设．设定热库中频率为 $\omega_n$ 谐振子有 $g_n$ 个，这样

$$\xi(t)=\mathrm{i}\sum_{n}\sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}}\sum_{m=0}^{g_n}\kappa_{n,m}[-a_{n,m}(t_0)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n(t-t_0)}+a_{n,m}^{+}(t_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n(t-t_0)}]\,,$$

$$f(t)=\sum_{n}\cos(\omega_n t)\{\sum_{m=0}^{g_n}\kappa_{n,m}^2\}=\sum_{n}\cos(\omega_n t)G(\omega_n)\,, \tag{27}$$

其中 $G(\omega_n)=\sum\limits_{m=0}^{g_n}\kappa_{n,m}^2$，$\xi(t)$ 就是热库对系统所施加的噪音．在连续谱情况下，

$$f(t)=\sum_{n}\cos(\omega_n t)G(\omega_n)\rightarrow\int_{0}^{\infty}\cos(\omega t)G(\omega)\frac{\mathrm{d}n(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega\,. \tag{28}$$

$G(\omega)\dfrac{\mathrm{d}n(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$决定了系统的阻尼特征．假定 $G(\omega)\dfrac{\mathrm{d}n(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$为常数(此即 Markov 第一近似)，即

$$G(\omega)\frac{\mathrm{d}n(\omega)}{\mathrm{d}\omega}=\frac{2\gamma}{\pi}\,. \tag{29}$$

于是，

$$f(t)=\frac{2\gamma}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega=2\gamma\delta(t)\,. \tag{30}$$

因此在 Markov 第一近似下，量子 Langevin 方程为

$$\dot{q}(t)=\frac{p(t)}{m}\,,$$

$$\dot{p}(t)=-V'(q(t))-\gamma\dot{q}(t')+\xi(t)\,, \tag{31}$$

其形式与经典 Langevin 方程完全相同，只不过它是算符的方程．若不具体指定与热库耦合的系统变量，在 Markov 第一近似下量子 Langevin 的普遍形式为

$$\dot{Y}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_{\mathrm{S}},Y]-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}[[X,Y],\xi(t)-\gamma\dot{X}]_+\,. \tag{32}$$

在 Markov 第一近似下，系统算符的运动方程都是一阶微分方程，算符的演化原则上由系统算符的初值决定．由于物理变量还与基矢(波函数)或密度算符有关，方程(32)不是纯粹的 Markov 过程．

## 4 小结

很多学科，如激光、量子半导体器件、原子核物理[4]、化学和理论生物学等都会遇到涨落、噪音或随机过程诸如此类的问题．但凡系统内部或外部相互作用复杂，外部性质不清楚或难以精确处理的，通常都作为噪音或涨落来对待，由此将复杂的问题简化为只存在噪音的自由度很少的系统的演化行为．量子噪音来源于两种途径，第一种与经典噪音完全相同，第二种则起源于 Heisengberg 测不准原理，这是与经典噪音有本质区别的地方．量子 Langevin 方程以及由它衍生出的其它量子随机方程是研究量子涨落或噪音的有效方法．我们曾用量子 Langevin 方程讨论了原子核四极形变集体自由

度动力学对称性破缺[5]．量子 Langevin 方程并不容易求解，方程中的变量都是算符，可以在 Heisenberg 表象中求解算符的演化，这样还需要求解系统的初始时刻的波函数．

## 参 考 文 献：

[1] Gardiner C W. Quantum Noise [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991, 1—100.

[2] Weiss U. Quantum Dissipative Systems [M]. Singapore: World Scientific, 1993, 1—50.

[3] Ford G W, Lewis J T, O' Connell R F. Quantun Langevin Equation [J]. Phys Rev, 1988, **A37**: 4 419.

[4] Abe Y, Ayik S, Reinhard P-G, *et al*. On Stochastic Approaches of Nuclear Dynamics [J]. Phys Rep, 1996, **275**: 49.

[5] Wen W, Hau Huu-Tai P, Lacroix D, *et al*. Quantal and Statistical Fluctuations in Dynamical Symmetry Breaking [J]. Nucl Phys, 1998, **A637**: 15.

# Quantum Noise and Quantum Langevin Equation*

WEN Wan-xin[1,2], JIN Gen-ming[1]

(*Institute of Modern Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Lanzhou* 730000, *China*;
2 *Nuclear Medicine School*, *Soochow University*, *Suzhou* 215007, *China*)

**Abstract**: The properties of quantum noise and Langevin equation are discussed. Comparisons between the quantum noise and Langevin eqution and the classic one are presented. A brief derivation for quantum Langevin equation is showed. The quantum noise comes from two ways, namely, the way as same as that of classic noise and the Heisenberg uncertainty.

**Key words**: quantum noise; quantum fluctuation; stochastic equation

* **Foundation item**: National Natural Science Foundation of China (19805012)