文章编号：1007－4627(2001)04－0201－05

可积系统规则运动的量子经典对应与有关问题*

徐躬耦[1,2]，杨亚天[3]，徐鸣洁[4]

(1 南京大学物理系，江苏 南京 210093；
2 兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心，甘肃 兰州 730000；
3 福建师范大学物理系，福建 福州 350007；
4 南京大学地球科学系，江苏 南京 210093)

摘　要：基于表述经典及量子系统可积性的动力对称性群，对量子可积系统规则运动的经典对应问题运用归纳法进行了研究. 具体给出了经典近似描述的适用条件，并进行了简明讨论.

关 键 词：动力对称性群；量子规则运动；量子经典对应

中图分类号：O413.1　　**文献标识码**：A

1　引言

经典力学的研究对象是宏观问题，涉及到物体的质量、彼此间相互作用的力程、以及运动变化的频率都在日常习见的量级. 量子力学的研究对象则是微观问题，涉及的质量、力程和频率都在相差甚远的量级. 但科学技术的发展已进入到纳米尺度，一方面可以进行常规测量，另一方面又显示出量子力学特征. 介观物理所研究的多体系统中，经典现象和量子现象是并存着的. 二十世纪内物理学的另一巨大成就是，阐明了经典的少数运动自由度的系统的混沌运动，其相点轨迹对于初条件的微小变动有指数敏感性. 人们自然要考虑相应的量子混沌是否存在，但至今还没有明确结论. 其实，规则运动和混沌运动是一个问题的两个侧面，只有阐明了规则运动的量子经典对应，才能根据量子经典对应原理同样从规则运动的充要条件的破坏去研究混沌运动. 本文的目的就是想在这方面做些努力.

量子经典对应是一个涉及面极广的问题，既要考虑二者之间的共性，又要考虑二者之间的差异，还要进一步在一定条件下进行比较，显示出差异随标度变化而减小的特征. 对于这样一个普遍的、不限于某种特定情形的问题，只能用归纳法来论证. 有关具体工作已在系列专文中论述[1]. 本文除对可积系统规则运动的量子经典对应问题作些概括外，还将对与之有联系的问题作些讨论.

2　对当今量子力学基本框架的分析

量子力学与经典力学的差异在于微观系统所特有的不确定性原理. 然而人们对于客观规律的认识，只能在继承的基础上不断地向前发展. 当今的量子力学基本框架正是从哈密顿力学的基础出发，融入新的实验发现，而发展形成的. 它包括下述 3 个方面[2]：(1)物理观测量由相应的厄密算子的期望值给出；(2)表述力学量变化的动力学方程仍取哈密顿方程形式，但力学量换成了相应的厄密算子、经典泊松括号换成了量子泊松括号；(3)表述力学量的算子作用于其上的希尔伯空间由一组可互易算子的完备集合来确定. 其中第 3 点还未将所研究的微观系统的状态空间与经典相点空间之间明确的对应关系建立起来. 由于这一不足之处，致使量子力学做出了辉煌贡献之后，仍给人留下不尽满意的感觉[3].

当今的量子力学基本框架已充分利用了经典力学中哈密顿方程对于正则变换的不变性. 此外，经典力学中还有一种仅仅适用于可积系统的不变性[4]，尚未被量子力学基本框架所利用. 另一方面，经典力学和量子力学教科书都仅仅具体讨论了少数

收稿日期：2001－09－29；**修改日期**：2001－10－12

* **基金项目**：国家基础性研究"非线性科学"资助项目，国家自然科学基金资助项目(19675019)

作者简介：徐躬耦(1921－)，男(汉族)，上海人，教授，从事理论核物理与量子力学基本问题的研究.

特殊的可积系统、对一般情形只是用微扰法进行了近似处理. 是否可由此得出启示：先从可积系统规则运动入手，进行系统研究，也许能改善当今量子力学基本框架中的第 3 点. 如果确能解答可积系统规则运动的量子经典对应问题，则不仅能增进人们对于量子力学内涵的认识，而且也自然地给出了一个具有量子经典对应的关于不可积性的标准，为进一步的研究提供了可能.

3 简谐振子的量子经典对应问题

可积系统虽是一类特定的系统，但它们仍可以区分为既有共性又有各自特征的不同类型. 因为量子经典对应是一种共性，所以我们从单个运动自由度的简谐振子入手去具体讨论. 但为了以后的推广，又严格要求只根据极普遍的对称性概念[5]和非常普遍的群论和拓扑方法[6]，去讨论简谐振子的量子经典对应问题.

经典简谐振子的可积性就是刘维定理[4]所讲述的其哈密顿量在作用量、角变量表述的相点空间中对于角变量转动的不变性. 为了区别于普通空间中的对称性、称相点空间中的这种对称性为动力对称性. 要示明这种动力对称性的存在，就要示明哈密顿量表为只是作用量的函数的可能性.

为了统一研究具有不同参量的量子简谐振子，第一步：先作标度变换，使它们的哈密顿量统一表为无量纲形式

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) . \tag{1}$$

第二步：要在(q,p)空间中作量子正则变换，仅把q、p视为无量纲的量还不够，还要保证对于时间反演的不变性. 像量子泊松括号中出现"i"那样、在量子正则变换中应采用$b^+ = 1/\sqrt{2}(q - \mathrm{i}p)$，$b = 1/\sqrt{2}(q + \mathrm{i}p)$这样一组厄密共轭的变量. 第三步：在量子简谐振子情形，可具体算出

$$[b, b^-] = 1, \quad H = b^- b + \frac{1}{2} ,$$
$$[H, b^+] = b^-, \quad [H, b] = -b, \tag{2}$$

H、b^+、b一起则构成一封闭的李代数、

$$[[H, b^+], b] + [[b, H], b^+] +$$
$$[[b^+, b], H] = 0 \tag{3}$$

诚然，一般的含r个元素的李代数中，任意三个元素间都有上述雅可俾恒等式. 但现在，H本身是一个运动积分、(2)式示明b^-、b分别表示升降算子，(3)式示明了、哈密顿量H也就是作用量$J = (b^+ b + 1/2)$、它与升降算子b^+、b一起，构成封闭李代数. 这一动力对称性群的存在具体表明了简谐振子可积性.

必须指出：单个自由度的系统不会呈现共振，必然是可积的. 且根据雅可俾恒等式、知道一定存在着由运动积分和升降算子构成的表征其可积性的动力对称性代数. 但第一，能找到的这样的动力对称性代数只有少数几种类型[7]；第二，能像简谐振子那样，直接地或通过简单变换给出其具体实现形式的，极为罕见. 因此，把这种能直接地或通过简单变换而给出其动力对称性代数的可积系统称为典型可积系统，并先从它们入手进行研究.

有了动力对称性群以后，就可以运用群表示来给出相应系统的量子态空间的表示. 不仅可以用作用量J的正交归一本征矢系来张布量子态空间，还可以用一组群元对基态$|\varphi_0\rangle$作用来给出一组状态

$$|\Phi_\gamma\rangle = \exp|\gamma b^+ - \gamma^* b|\varphi_0\rangle . \tag{4}$$

它们给出如下的平均性质：

$$\langle\Phi_\gamma|b^+|\Phi_\gamma\rangle = \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{q} - \mathrm{i}\bar{p}) ,$$

$$\langle\Phi_\gamma|b|\Phi_\gamma\rangle = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{q} - \mathrm{i}\bar{p}) ,$$

$$\langle\Phi_\gamma|H|\Phi_\gamma\rangle = \gamma\gamma^* + \frac{1}{2} . \tag{5}$$

这些平均性质与经典情形中的相点的性质相应.

然而，(1)具有不同γ值的两个$|\Phi_\gamma\rangle$彼此并不正交、(2)γ是数值连续地变化的参量，$\{|\Phi_\gamma\rangle\}$是过完备的. 推广 Husimi 分布函数[8]的概念，对这些彼此不正交的态通过如下的与$|\Phi_\gamma\rangle$的具体位置无关的量

$$|\langle\Phi_{\gamma_1}|\Phi_{\gamma_2}\rangle|^2 = P(|\Delta\gamma| = |\gamma_1 - \gamma_2|) \tag{6}$$

来表述$|\Phi_\gamma\rangle$的几率密度分布函数，从而给出$|\Phi_\gamma\rangle$的几率密度分布的平均半径

$$\overline{|\Delta\gamma|} = \frac{\int_0^\infty xP(x)\mathrm{d}x}{\int_0^\infty P(x)\mathrm{d}x} . \tag{7}$$

因为，γ值只取离散的相应于基本相胞中心坐标的数值的那些$|\Phi_\gamma\rangle$是近乎彼此正交的，故$|\Delta\gamma|$等于两个相邻的基本相胞的中心间距时、$P(|\Delta\gamma|)$之值很小，接近于零，$\overline{|\Delta\gamma|}$值在单位量级. 这样，单独地

考虑一个态$|\Phi_\gamma\rangle$时，可把它视为几率密度分布半径在单位量级的与经典相点相对应的态．可用这样的某个态$|\Phi_\gamma\rangle$作为含时薛定谔方程的初态，求得相应的解为$|\Phi_\gamma(t)\rangle = |\Phi_{\gamma(t)}\rangle$．其几率密度分布特征在运动中保持不变，仍保持着初始时刻的态的基本特征；其几率密度分布中心则像孤子那样在相应的$|\gamma|$取常数值的圆周上运转．

虽孤子般的态的运动与经典相点的运动有定性的彼此对应之处，还应进一步定量地考察在经典极限下近似描述的可能性．直观地考虑，作经典近似描述，应考虑如下条件，

$$\frac{\text{孤子般状态的几率密度分布范围}\ \overline{|\Delta\gamma|}}{\text{圆形轨道周长}} \approx \frac{1}{|\gamma|} \ll 1 . \tag{8}$$

因为有限的几率密度分布与离散能谱一样，都是和动力对称性群直接联系着的特征，所以能否作经典近似描述的条件，可同时表为

$$\frac{\text{能级间距}}{\text{激发能}} = \frac{1}{m} \approx \left(\frac{1}{|\gamma|}\right)^2 \ll 1 . \tag{9}$$

为了统一讨论具有不同质量的简谐振子，在一开始就用了标度变换．现在要比较研究具有不同质量的简谐振子的量子效应的相对大小，(1)回到原来未作标度变换的表示，(2)在同一未作标度变换的激发能的基础上进行比较研究．由于

$$\text{未作标度变换的激发能} = m(\mu)\hbar\sqrt{\frac{k}{\mu}} = \text{固定值},$$

$$m(\mu) \propto \sqrt{\mu} , \tag{10}$$

故如系统的质量μ愈大，激发量子数$m(\mu)$亦愈大，量子效应就愈小，在极限条件下逼近于零．

现在把简谐振子的量子经典对应的论证的思路概括如下：

刘维定理所表述的系统动力学方程的可积性

→动力对称性与相应的李代数、李群

→由群表示到量子态空间的表示

→由运动学表述到动力学表述

→由孤子般的运动状态的完全描述到平均性质描述

→由经典对应到极限条件下的经典近似描述

而贯穿整个思路的核心概念则是动力对称性群．

4　从简谐振子的量子经典对应到其他可积系统的量子经典对应

前面讨论已明确指出量子经典对应问题的核心概念是动力对称性群的存在．所以要把关于简谐振子的量子经典对应推广到其他可积系统，就必须具体给出所要研究的可积系统的动力对称性群．这种推广包含两个方向：(1)从单个运动自由度的典型可积系统到多个自由度的典型可积系统；(2)从典型可积系统到同类型的其他可积系统．

先讨论从单个运动自由度的简谐振子向三个自由度的球谐振子推广的问题．由于势场的球对称性，它有三个彼此独立的运动积分．其中两个运动积分是角动量和角动量的z轴分量，它们反映了势场的球对称性．故这两个运动积分取确定值的要求，称为动力对称性约束．在动力对称性约束条件下，就只需要考虑径向自由度的运动．通常量子力学教科书中，就是用分离变量方法解径向运动方程，其实这样一种单个运动自由度在确定子空间内的运动，也完全可以像简谐振子那样，运用动力对称性群概念来处理．在目前情形中，不同的是：与径向自由度相应的一对量子泊松括号联系着的厄密共轭的升降算子，与之匹配的作用量，以及它们共同构成的动力对称性群并不清楚，需要通过某种变换才能给出．好在球谐振子问题还可以通过其他途径给出其哈密顿量的解析的本征解，而且前面已指出，对于单个运动自由度的系统或者在动力对称性约束下的单个自由度的子系统，只能有少数几种动力对称性群，故不难通过变换具体给出动力对称性群生成元的显示式，哈密顿量与作用量之间的函数关系也随同给出．具体给出的动力对称性群是$SO(3)\odot SO(2,1)$，其中$SO(3)$反映了势场的球对称约束，而动力对称性群$SO(2,1)$则表述了径向自由度的规则运动．

类氢原子中的电子是在球对称的长程的库仑势作用下运动，同样需要考虑动力对称性约束下的径向自由度的运动，但库仑势作用下的这种运动，既可以是负能量的束缚态，也可以是正能量的束缚态．为了具体考虑负能量束缚态，就应考虑额外的动力对称性约束．根据相应的经典情形，知道尚有额外的运动不变量、伦兹矢量的存在，故应考虑含$SO(3)$的$SO(4)$约束．在这样的考虑下，就可给出类氢原子的动力对称性群$SO(4)\odot SO(2,1)$的具体表述．

概括起来说，向多个运动自由度的典型可积系统的推广，关键在于先解决其动力对称性约束问

题.

由典型可积系统向非典型可积系统的推广是指下述条件下的推广：第一，它们是同一可积系统类的系统，具有相同的动力对称性约束，实际上只要考虑单一运动自由度在相应升降算子所表述的子空间中的运动；第二，典型可积系统的哈密顿量 H_0 只含与这一对升降算子相应的作用量，而同类型的非典型可积系统的哈密顿量 $H(\lambda)=H_0+\lambda\nu$ 还含有升降算子，其中 λ 则表示含有升降算子的那一部分的强度. 这样问题就简化成为从 H_0 向 $H(\lambda)$ 推广的问题. 而 H_0 与 $H(\lambda)$ 的差异必然要在它们的态空间表示中呈现出来，故可以通过拓扑方法研究[9]. 先利用 H_0 的本征矢系来给出 $H(\lambda)$ 的矩阵表示，再通过矩阵对角化，可给出 H_0 与 $H(\lambda)$ 的一一对应的本征矢之间的映射. 因为这种映射是同一单个运动自由度的子空间的不同本征矢系间的映射，必然是可微同胚映射. 这种可微同胚映射，不仅可以给出动力对称性子群的非线性实现方式，还同时给出了 $H(\lambda)$ 与新的作用量的非线性函数关系.

把 2、3 两节的内容结合起来，就相当广泛地对可积系统的量子经典对应问题进行了系统论证. 下一节中将在此基础上，对有关问题作些简明讨论.

5 对一些有关问题的讨论

由于引入了动力对称性群，不仅系统地表述了可积系统规则运动特征，而且进一步论述了它们的量子经典对应，以及量子规则运动在极限条件下近似的作经典描述的可能性. 这与太阳系的行星运动、在一定条件下把行星运动近似地视作质点运动有相似之处. 所以确有理由，可认为量子动力学是更普遍的、更接近实际的对客观事件的描述体系，而经典动力学则是相对而言、比较局限的、比较理想化的. 事实上位置和速度（动量）同时取确定值的问题，在经典系统的剧烈变化着的不规则运动也因为不能运用极限观念而难于实现. 正因为如此，我们能从量子规则运动的类属特征入手去论证量子经典对应，而同时又能从某些量子规则运动的没有经典对应的特殊行为去揭示其特有的量子效应（如零点振荡、势垒穿透等）.

动力对称性群的存在是可积系统的充要条件，关于不可积系统的研究，势必要以动力对称性的破坏为出发点. 动力对称性的破坏有程度之分，故不规则运动有弱混沌运动和强混沌运动之别. 与强混沌运动对应的是动力对称性的剧烈破坏，对于有若干个运动自由度的系统来说，应是它的动力对称性约束的破坏，所以又必然会呈现一种类属特征. 统计规律性正是强混沌运动的类属特征. 统计规律性与动力学规律性一样，也是普遍的自然规律，无论是宏观系统还是微观系统都会呈现出这两种自然规律. 可以预期，通过强混沌运动研究，正可以阐明统计规律与动力学规律间的关系、以及这种关系的量子经典对应. 这又是一个值得受人关注的问题.

参 考 文 献：

[1] Xu Gongou, Yang Yatian, Xing Yongzhong. Dynamical Symmetry, Integrability of Quantum Systems, and General Character of Quantum Regular Motion[J]. Phys Rev, 2000, A61: 042104-1 — 042104-14 ; Xu Gongou, Yang Yatian, Xu Mingjie. Correspondence between Quantum and Classical Dynamics for Integrable Systems[J]. Submitted to Phys Rev Lett.

[2] Dirac P A M. Principles of Quantum Mechanics[M]. Oxford: Oxford Univ Press, 1958, Chapters 1 -5.

[3] 周光召. 回顾与展望——纪念量子论诞生 100 周年[J]. 物理, 2001, 30 (5): 259—264.

[4] Arnold Y L. Mathematical Methods of Classical Mechanics [M]. New York: Springer-Yerlag, 1978, Sections 49—50.

[5] 杨振宁. 对称和物理学[M]. 杨振宁文集. 上海：华东师范大学出版社，1998, 687—704.

[6] Gilmore R. Mathematical Physics[M]. Chicago: Univ Chicago Press, 1985, Chapter 1.

[7] Barut A O. Unified Algebraic Construction of Representations of Compact and Non-compact Lie Algebras and Lie Groups [M]. In Lectures in Theoretical Physics, V9A. In: Britten W F, Barut A O, Guenin M ed. New York: Gordon and Breach, 1967

[8] Husimi K. Some Formal Properties of the Density Matrix[J]. Proc Phys Math Soc Japan, 1940, 22: 264—314, Takahashi K, Saito. Choas and Time Development of Quantum Wave Packet in Husimi Representation[J]. Phys Rev Lett, 1985, 55: 645—648, Takahashi K. Wigner and Husimi Fuctions in Quantum Mechanics[J]. J Phys Soc Japan, 1986, 55: 762 —

779.

[9] Xu Gongou, Xu Mingjie, Xing Yongzhong, *et al.* Dynamical-Symmetry Breaking, Mechanism and Characterization Behavior [J]. Chin Phys Lett, 2001, 18: 625—627.

Quantum-classical Correspondence of Regular Motion of Integrable Systems and Related Problems*

XU Gong-ou[1,2], YANG Ya-tian , XU Ming-jie[4]

(1 *Department of Physics, Nanjing University, Nanjing* 210093, *China*;

2 *Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou, Lanzhou* 730000, *China*;

3 *Department of Physics, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007, *China*;

4 *Department of Earth Science, Nanjing University, Nanjing* 210093, *China*)

Abstract: Based on the dynamical symmetry group characterizing the integrability of classical as well as quantum mechanics, quantum dynamics with proper initial conditions was genuinely formulated, and analytical solutions in the form of soliton-like state evolving around a certain invariant torus were obtained. It has been shown that, in case the intrinsic size of the evolving quantum state is significantly smaller than the extent of its evolving orbit, the motion can be satisfactorily treated with classical approximation. Having demonstrated the quantum-classical correspondence of regular motion, the possibility to study quantum chaos on the basis dynamical symmetry breaking was briefly discussed.

Key words: dynamical symmetry group; quantum regular motion; quantum-classical correspondence

* **Foundation item**: the National Basic Research Project "Nonlinear Science" of China; NSFC(19675019)