文章编号: 1007-4627(2000)01-0039-04

用杨立铭方法估算大于 126 的幻数*

李先卉, 周治宁, 钟毓澍, 杨泽森
(北京大学物理系, 北京 100871)

摘　要: 采用 Woods-Saxon 形成的密度函数, 按照杨立铭方法以及稍微修改的方法进行估算都得出, 紧接 126 的幻数应该接近于 184.

关 键 词: 超重核幻数; 杨立铭方法; Thomas-Fermi 近似
中图分类号: O571.21　　　文献标识码: A

1　引言

对于超重核的预测和探索, 早已成为核结构理论和实验研究的重要课题[1~6]. 首先遇到的问题之一是在 126 之后的幻数是什么? 经过许多人的计算和分析, 近乎一致的预言是下一个幻数的值等于 184, 这种预言涉及许多复杂因素, 特别是单粒子能级的次序和分组情况, 因此可靠性难于分析. 如果有更为简明的理论观点作为估算的依据, 将是十分有意义的. 众所周知, Fermi 曾经用 Thomas-Fermi 近似方法很好地解释了原子中电子壳层的一些特点[7], 杨立铭教授在 1950 年将这一方法加以推广[8], 用于计算原子核中的幻数, 并取得令人瞩目的成功. 这种方法基于在核内居极重要地位的独立粒子运动模式以及基于 Thomas-Fermi 近似, 所需要的是一般的知识以及具有合理形状和适当参量的核密度函数, 而且原则上对于较重的核会得出较满意的结果. 因此, 本文将用这种方法估算新的大幻数.

2　新幻数的估算

对于原子中的电子或者原子核中的中子或质子, 在 Thomas-Fermi 近似下, 由局域 Fermi 动量 $P(r)$ 决定的 $rP(r)$ 的最大值与没有粒子携带的最小角动量量子数 l 满足如下的关系式:

$$[rP(r)]_{\max} = (l + 1/2)\hbar . \tag{1}$$

其中右边的$(l+1/2)$是考虑到类经典波函数的对称性而用来代替$[l(l+1)]^{1/2}$的, 左边是粒子角动量的最大值, 如果它小于右边, 当然没有粒子能够携带高达 l 的角动量量子数. 在一般情形下, 角动量量子数等于 l 的粒子数 n_l 正比于

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r \left| [P(r)]^2 - \frac{(l+1/2)^2\hbar^2}{r^2} \right|^{1/2} \cdot \eta \left| [P(r)]^2 - \frac{(l+1/2)^2\hbar^2}{r^2} \right| ,$$

其中

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

因此当(1)式满足时, n_l 仍然等于零.

在中性原子的情形, 通过求解 Thomas-Fermi 方程, 可以根据(1)式确定使 l 成为没有电子携带的最小角动量量子数的电子数 Z:

$$Z = x(2l + 1)^3 , \tag{2}$$

其中 x 是常数, 在较早的文献[7]中求出的值是 0.155, 后来修改为 0.17[9], 我们计算的更为精确的结果是

$$0.1608 \leqslant x \leqslant 0.1615 .$$

由此求得相应于 l 等于 2, 3, 4 的 Z 值如下:

收稿日期: 1999-11-25
* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 19875002
作者简介: 李先卉 (1944-), 女, 副教授, 从事原子核理论研究.

l	2	3	4
Z	~ 20.14	~ 55.27	~ 117.48
Z_{even}	20	56	118

这仍然能够满意地说明, 第一个 d 电子出现于第 21 号元素, 而且也非常接近第一个 f 电子出现于第 58 号元素的事实. 与原子中电子能级系统对比还可以看到, 第 20 号和第 56 号元素都是由满壳层和两个 s 电子组成的, 118 可能也十分接近于一个"幻数". 对于原子核, 杨立铭教授在文献[8]中根据(1)式以及唯象引进的密度函数, 也求出了如同(2)式的公式. 其中中子、质子密度设为

$$\rho_n(r) = \frac{N}{A}\rho(r), \quad \rho_p(r) = \frac{Z}{A}\rho(r).$$

而

$$\rho(r) = \rho_0 f_Y\left(\frac{r-R_0}{a}\right),$$

其中

$$f_Y\left(\frac{r-R_0}{a}\right) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{r-R_0}{a}\right)^2\right), & \text{当 } r > R_0 \\ 1, & \text{当 } r < R_0 \end{cases}$$

R_0 与 a 是参量. 我们也不必限于采用这种密度函数, 这里一般地将其写作

$$\rho(r) = \rho_0 f\left(\frac{r-R}{b}\right).$$

考虑一种核子, 例如中子, 根据局域 Fermi 动量与密度的关系

$$\rho_n(r) = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}[P_n(r)]^3,$$

有

$$[rP_n(r)]^3_{max} = 3\pi^2\hbar^3\frac{N}{A}[r^3\rho(r)]_{max}. \quad (3)$$

设 $r^3\rho(r)$ 在 r_m 处达到最大值, 于是

$$3r_m^2\rho(r_m) + r_m^3\rho'(r_m) = 0,$$

即

$$3 + r_m\left(\frac{d}{dr}\ln f\left(\frac{r-R}{b}\right)\right)\bigg|_{r=r_m} = 0, \quad (4)$$

这样就可确定 r_m/b 作为 R/b 的函数. 由此以及(3)式可将(1)式改写为

$$3\pi^2 N r_m^3 f\left(\frac{r_m-R}{b}\right)\frac{\rho_0}{A} = \left(l+\frac{1}{2}\right)^3,$$

密度函数的归一条件给出

$$\frac{A}{\rho_0} = 4\pi\int_0^\infty f\left(\frac{r-R}{b}\right)r^2 dr,$$

故由上式得到中子数为

$$N = F\left(l+\frac{1}{2}\right)^3, \quad (5)$$

其中

$$F = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{1}{r_m}\right)^3[f(r_m)]^{-1}\int_0^\infty f\left(\frac{r-R}{b}\right)r^2 dr. \quad (6)$$

式中的积分代表$(A/4\pi\rho_0)$, 其主要项应为 $R^3/3$, 修正因子是 R/b 的函数.

与原子的情形不同, 现在无法事先算出 F, 因此不知道与整数 l 值相应的 N 值. 但是, 杨先生找到了一个重要的经验规则, 即较大的幻数 28, 50, 82 和 126 的立方根近似地符合等差关系:

$(50)^{1/3}-(28)^{1/3}$	$(82)^{1/3}-(50)^{1/3}$	$(126)^{1/3}-(82)^{1/3}$
0.647	0.661	0.669

所以期待密度函数保证 $F^{1/3}$ 的值在 2/3 附近(在文献[8]中取为 0.66), 并且能够利用公式(5)计算出这些幻数见(表 1).

表 1　取 $F^{1/3}$ 的值为 0.668 时不同 l 下的 N 值

l	4	5	6	7	8
N	27.2	49.6	81.8	125.7	183.0
N_{even}	28	50	82	126	184

这样估算的新幻数是 184.

将这样计算出来的 N 值设想是幻数. 当中子或质子依次填充能级而形成满壳层时, 紧接着的下一个壳层的最低能级的轨道角动量量子数正好是没有粒子携带的最小 l 值. 不过, 这应该认为是用 Thomas-Fermi 近似计算幻数的一种简单模型.

我们还注意到, 与这些幻数有简单联系的另一组数 20, 40, 70 和 112 的立方根符合更精确的等差关系:

$(40)^{1/3}-(20)^{1/3}$	$(70)^{1/3}-(40)^{1/3}$	$(112)^{1/3}-(70)^{1/3}$
0.706	0.701	0.699

因此可以期待密度函数在另一种参量值下保证 $F^{1/3}$ 的值在 0.70 附近, 并且能够利用公式(5) 计算出这些数以及预言新的幻数. 这里, 设想这种等差关系对应着另一种模型, 当能级依次被填充而中子数达到这个等差序列中的一个数时, 正好使一个壳层的最高能级空着, 而且此空能级自旋朝上, 轨道角动量量子数正好是没有粒子携带的最小 l 值. 所以当中子数是 20 时, 紧接着的是空能级 $f_{7/2}$, 在这个能级也被完全填充之后, 就达到幻数 28. 一般地, 当中子总数从序列中的一个数增加达到下一个数时, 紧接着的空能级的 l 值增加 1, 将序列中的一个数与 $2(l+1/2)$ 相加就得出一个幻数. 有趣的是这种设想与核内单粒子能级系统的已知部分很好地相符. 需要注意的是, 在(5) 式中令 $F^{1/3}$ 等于 0.70, 计算与 N 等于 20 相应的 l 值, 结果近似地为 3.38, 弃去 0.38 后才是所期待的 3. 为了扣除 $l=3$ 引起的这个误差, 更好地重现从 $(20)^{1/3}$ 开始的这个等差序列, 应当将(5) 式修改成

$$N^{1/3} = (20)^{1/3} + F^{1/3}(l-3) . \tag{7}$$

当密度函数保证 $F^{1/3}$ 的值为 0.70 时, 计算结果如表 2 所示.

表 2　$F^{1/3}$ 的值为 **0.70** 时不同 l 下的 N 值

l	3	4	5	6	7
N	20	39.8	69.7	111.6	167.7
N_{even}	20	40	70	112	168
N_{mag}	28	50	82	126	184

这样估算的新幻数也是 184.

如果采用 $\rho_{\mathrm{Y}}(r)$ 作为密度函数, 则与 $F^{1/3}=0.668$ 相应的 R_0/a 与文献[8] 的情形十分相近. 我们将在下节特别研究 Woods-Saxon 形式的密度函数.

3　Woods-Saxon 形式的密度函数

现在考虑, 对于 Woods-Saxon 形式的密度函数

$$\rho_{\mathrm{WS}}(r) = \rho_0\left[1+\exp\left(\frac{r-R}{b}\right)\right]^{-1},$$

上节提到的 F 值是否对应于合理的 R/b 值. 这里假定 R/b 对于重核和中重核是常数, 从而保证 F 是常数. r_{m}/b 满足的方程式(4) 可写成

$$\exp\left(\frac{R-r_{\mathrm{m}}}{b}\right) - \frac{r_{\mathrm{m}}}{3b} + 1 = 0 , \tag{8}$$

这表明 r_{m}/b 应大于 3. 用 r_{m}/b 表示 R/b 得到

$$\frac{R}{b} = \frac{r_{\mathrm{m}}}{b} + \ln\left(\frac{r_{\mathrm{m}}}{3b} - 1\right) . \tag{9}$$

利用(8) 式可将(6) 式改写成

$$F = \frac{4}{3\pi r_{\mathrm{m}}^3}\left(1-\frac{3b}{r_{\mathrm{m}}}\right)^{-1}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r r^2\left(1+\mathrm{e}^{\frac{r-R}{b}}\right)^{-1} , \tag{10}$$

其中的积分在本文所涉及的范围内可以近似地表示为[10]

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}r r^2\left(1+\mathrm{e}^{\frac{r-R}{b}}\right)^{-1} \approx \frac{R^3}{3}\left[1+\left(\frac{\pi b}{R}\right)^2\right] , \tag{11}$$

因此

$$F \approx \frac{4}{9\pi}\left(\frac{R}{r_{\mathrm{m}}}\right)^3\left(1-\frac{3b}{r_{\mathrm{m}}}\right)^{-1}\left[1+\left(\frac{\pi b}{R}\right)^2\right] . \tag{12}$$

由此式和(8) 式求得与 $F^{1/3}=2/3$, 0.668, 0.700 相应的 R/b 值约为 9.426, 9.337, 6.728, 属于合理的范围. 与之相应的 r_{m}/b 值分别为 8.772, 8.696, 6.557.

4　结论

杨立铭先生在文献[8] 中将公式(5) 与他找出的较大幻数的立方根形成等差序列的经验规则结合起来, 并且借助密度函数来计算(5) 式中的系数 F, 从而构成计算幻数的非常简明而优美的方法. 本文采用 Woods-Saxon 形式的密度函数, 按照杨立铭方法进行估算, 得到紧接 126 的幻数应该接近于 184. 另外还注意到, 与较大的幻数相近的 20, 40, 70 和 112 的立方根形成更为精确的等差序列, 根据这个经验规则和稍微修改的杨立铭方法进行估算也得到 126 后面的幻数是 184.

此文是为祝贺我们的老师杨立铭院士八十华诞而作.

参 考 文 献

[1] Hofmann S, Ninov V, Hessberger F P *et al*. The New Element 112. Z Phys, 1996, A354: 229~ 230.

[2] Lazarev Yu A, Lobanov Yu, Oganessian Yu Ts *et al*. α Decay of ^{273}110: Shell closure at N = 162. Phys Rev, 1996, C54: 620~ 625.

[3] Rutz K, Bender M, Burvenich T *et al*. Superheavy Nuclei in Self-consistent Nuclear Calculations. Phys Rev, 1997, C56: 238~ 243.

[4] Lalazissis G A, Shama M M, Ring P *et al*. Superheavy Nuclei in the Relativistic Mean-field Theory. Nucl Phys, 1996, A608: 202~ 226.

[5] Reinhard P G. Rep Prog Phys, 1989, 52: 439~ 442.

[6] Quentin P, Flocard H. Self-consistent Calculations of Nuclear Properties with Phenomenological Effective Forces. Annu Rev Nucl Part Sci. 1978, 28: 523~ 596.

[7] Fermi E. Eine Statistiche Methode zur Bestimmung Einiger Eigenschaften des Atoms und ihre Anwendung auf die Theorie des Periodischen Systems der Elemente. Z Phys. 1928, 48: 73~ 79.

[8] Yang L M. Nuclear Shell Structure and Nuclear Density. Pro Phys Soc, 1951, A64: 632~ 638.

[9] Landau D, Lifshitz E M. Quatum Mechanics. 3-ed(revised edition), Pergamon Press, 1977, (69~ 70): 235~ 247

[10] Negle J W. Structure of Finite Nuclei in the Local-density Approximation. Phys Rev, 1970, C1: 1 260~ 1 321.

Estimating Magic Number Larger than 126 by Yang Liming Method*

LI Xian-hui, ZHOU Zhi-ning, ZHONG Yu-shu, YANG Ze-sen

(*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

Abstract: Based on Fermi-Yang Liming method and its improved method, magic numbers were calculated by using Woods-Saxon density function. That the magic number next to 126 should be 184 was predicted.

Key words: magic number of superheavy nuclei; Yang Liming method; Thomas-Fermi approximation

* **Foundation item**: NSFC (19875002)