(11) 251—255

第 16 卷 第 4 期
1999 年 12 月

原子核物理评论
Nuclear Physics Review

Vol. 16, No. 4
Dec., 1999

末态粒子集团动量分布维数的计算*

O572.24
O572.3

陈奋策
(福建教育学院数理系 福州 350001)

摘 要 把坐标空间的分形维数计算公式推广到动量空间并用于计算高能强子-强子碰撞非单衍过程产生的中心区末态粒子集团的动量分布的维数. 从理论上和从三火球模型结果出发求得的动量分布的维数都是二维.

关 键 词 高能强子碰撞 动量分维 三火球模型 粒子集团

维数

分 类 号 O572.24

1 引言

近年来, 对高能多重产生末态相空间中有可能存在分形结构的研究引起了广泛的兴趣[1]. 文献[1]假定多重产生的相空间有柱对称, 只讨论纵-横两维相空间, 选取纵、横快度($y_\parallel$、$y_\perp$)为变量, 计算的归一化阶乘矩与实验上测量结果符合, 说明末态粒子的相空间存在二维自仿射分形结构.

三火球模型认为[2], 在强子-强子碰撞非单衍过程中, 入射强子相互穿过, 然后在不同快度区域形成3个粒子源, 与其相应的快度区间被称为中心火球 C* 和侧边火球 P*、T*, 最后这3个火球分别独立地碎裂为末态强子. 在能量守恒和横动量截断的约束下, 每个火球所产生的粒子的动量等几率地分布[2], 或快度等几率地分布. 其分布形式如下:

$$\omega(p_\parallel p_\perp) \propto \frac{\exp(-a p_\perp)}{\sqrt{p_\parallel^2 + p_\perp^2 + m^2}} \cdot \exp(-\sqrt{p_\parallel^2 + p_\perp^2 + m^2}/T) , \tag{1}$$

其中 $p_\parallel$、$p_\perp$分别是粒子的纵、横动量, $\exp(-\alpha p_\perp)$是横动量截断因子(α是常数), T 是配分温度, m 是粒子质量(取为π介子质量). 对3个火球卷积后得到的多重数快度分布与实验符合. 文献[3]在三火球模型中引进了集团机制, 他们假定集团快度等几率(随机)地分布, 且每个集团各向同性衰变, 由此计算了几个固定窗口的情况. 文献[3]不同于文献[4], 假定在能量守恒和横动量截断的约束下, 每个火球所产生的集团快度等几率分布; 模拟结果表明有集团机制时, 对多种窗口的前后关联的计算比无集团机制(文献[2])下的计算结果与实验结果符合得好.

为了探明高能强子-强子碰撞非单衍过程中产生的末态集团在中心区动量分布的动量维数, 在本文第2部分中, 首先把豪斯道夫公式推广到动量空间, 而后从理论上计算动量随机分布系统的维数; 第3部分则利用三火球模型得到的结果以推广到动量空间的平均维数公式计算中心区末态集团动量分布的维数; 第4部分是结论.

2 动量随机分布粒子系统的动量空间维数

2.1 动量空间推广的豪斯道夫维数公式

分形理论中计算坐标空间分形维数的豪斯道夫维数公式[5, 6]为

$$N(r) = c(\Delta r)^{-D_r} \propto (\Delta r)^{-D_r} , \tag{2}$$

收稿日期: 1999-04-15.
* 福建省自然科学基金(项目号 A96025)资助.

其中 Δr 是空间线元，D_r称为豪斯道夫维数．D_r 可以是分数，称为分数维或分维．

我们加以推广，做变量替换：$r\to p$，$\Delta r\to\Delta p$，$N(r)\to N(p)$，$D_r\to D_p$，得动量空间计算动量维数的推广的豪斯道夫维数公式

$$N(p)=c(\Delta p)^{-D_p}\propto(\Delta p)^{-D_p}\ ,\qquad(3)$$

其中 c 是常数．对于一个客体，如果在动量空间量度其动量的单位半径($D_p=1$、2、3时分别为动量半线段长、动量单位圆半径和动量单位球半径)为 Δp，用该单位量度的结果 $N(p)$满足(3)式，则该客体的维数为 D_p，它也可是动量空间的分维数或称为分维．

2.2　动量随机分布系统的动量维数

动量随机分布系统中的 N 个粒子的动量是随机分布的．从统计意义上看，相当于一个作“布朗”运动的粒子在足够长的一段时间内经历了 N 种动量状态(N 步)，该粒子的动量是随机变化的．我们可以用(3)式计算其动量分维数 D_p．

在动量空间取一过动量原点的对称轴．动量随机分布系统中粒子动量分布是关于该对称轴对称的．与之对应的是，运动了 N 步后的布朗粒子所经历过的动量分布，即 N 个动量增量(见下)，是关于该对称轴对称的．

设布朗粒子从动量原点开始运动，运动 N 步后其动量 $\mathbf{P}$ 为

$$\mathbf{P}=\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{p}_i\ ,\qquad(4)$$

式中 $\Delta\boldsymbol{p}_i$ 是第 i 步的动量增量．由于 $\mathbf{P}$ 的方向是任意的，对于轴对称系统，有统计平均值$\langle\mathbf{P}\rangle=0$，因此用$\langle\mathbf{P}^2\rangle$来量度布朗粒子的动量轨迹的大小

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{P}^2\rangle&=\langle(\Delta\boldsymbol{p}_1+\Delta\boldsymbol{p}_2+\cdots\cdots+\Delta\boldsymbol{p}_N)\cdot(\Delta\boldsymbol{p}_1+\Delta\boldsymbol{p}_2+\cdots\cdots+\Delta\boldsymbol{p}_N)\rangle\\&=\langle\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{p}_i\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i\rangle+\langle\sum_{i\neq j}\Delta\boldsymbol{p}_i\cdot\Delta\boldsymbol{p}_j\rangle\ ,\end{aligned}\qquad(5)$$

假设每“步长”(平均步长度)为 Δp，由于每步都是随意的、独立的，故第 i 步和 j 步是完全不相干的；另外如前所述，布朗粒子的动量增量矢量 $\Delta\boldsymbol{p}_i(\Delta\boldsymbol{p}_j)$是关于对称轴和原点对称分布的，并且在各个方向上的取值概率是相同的，所以(5)式中第二项为零．故

$$\langle P^2\rangle=\langle\mathbf{P}^2\rangle=N(\Delta p)^2\ .\qquad(6)$$

随着时间增大，N 增大，$\langle P^2\rangle$越大．(6)式可写成

$$N=\langle P^2\rangle(\Delta p)^{-2}\propto(\Delta p)^{-2}\ .\qquad(7)$$

对比(3)式，可看出 $D_p=2$，即动量随机分布系统的动量分维数

$$D_p=2\ .\qquad(8)$$

从另一角度看．由(7)式，有

$$N\propto\langle P^2\rangle\ ,\qquad(9)$$

对比文献[3]在坐标空间的布朗粒子关系

$$N(r)\propto[\langle r^2\rangle^{1/2}]^{D_r}\ ,\qquad(10)$$

作推广($r\to p$)，得

$$N(p)\propto[\langle P^2\rangle^{1/2}]^{D_p}\ ,\qquad(11)$$

正是与(6)、(9)式相似，所以 $D_p=2$．

2.3　末态集团的动量分布维数

首先分析对应于某碰撞参数事例下，高能强子碰撞非单衍过程产生的末态集团的动量分布．由于入射强子的大纵动量和碰撞前后的能量守恒、动量守恒和角动量守恒的制约，该事例中的末态集团的动量主要分布在入射面上且纵动量大于横动量；对不同碰撞参数的所有状态取系综平均后，末态粒子的动量分布呈圆柱形对称分布(以两入射强子对心碰撞时入射方向连线为对称轴)，这正是实验上观察到的2N 个末态粒子(N 是在某质心系能量 E_{cm}下，所有不同碰撞参数事例产

生的末态集团数的总和）和文献[1]假定的（见上述）动量圆柱形对称分布.

文献[2]实指每个火球以至中心区末态集团的动量是随机分布的[4]. 正如公式(1)所表示，这就表示了这样的图象：在动量空间，不同碰撞参数事例产生的所有中心区末态集团（总和为 N，对应于2.2部分中的 N 个粒子系统）的动量分布是关于动量原点和以两入射强子对心碰撞时动量连线为对称轴对称分布的. 由2.2部分的讨论可知，(8)式是中心区末态集团动量分布的维数，即中心区末态集团的等效动量空间是二维的.

3　利用三火球模型结果计算中心区末态集团的动量分布维数

3.1　推广到动量空间的区域分维计算式和平均维数计算式

在分形理论中，计算分维的方法除了(2)式外还有多种. 其中一种计算分形体某一小区域的分维 η_{L_i} 的式子[7,8]

$$\eta_{L_i} = \lim_{L_i \to 0} \frac{\ln W_i}{\ln L_i}\ , \quad i = 1, 2, \cdots n \qquad (12)$$

和整个分形体的平均分维数

$$\bar{\eta}_L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_{L_i}\ . \qquad (13)$$

(12)式中 L_i 是第 i 次测量时空间被测点附近的被测量小区域的线度大小，W_i 是 L_i 内分形体分布（或生长）几率，η_{L_i} 是表征被测点附近 L_i 内分形体的分维，若实验上测出几率 W_i，就可从(12)式求出对应小区域 L_i 内的分维 η_{L_i}.

我们做动量空间的推广（或变换）：$L_i \to \Delta p_i$，$W_i \to W_i(p)$，$\eta_{L_i} \to \eta_{p_i}$，$\bar{\eta}_L \to \bar{\eta}_p$. 则动量空间被测量点 p_i 附近小区域 $\Delta p_i(\Delta p_i \to 0)$ 内的分形体的分维计算式表示为

$$\eta_{p_i} = \lim_{\Delta p_i \to 0} \frac{\ln W_i(p)}{\ln \Delta p_i}\ , \quad i = 1, 2, \cdots n \qquad (14)$$

分形体的平均分维

$$\bar{\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_{p_i}\ . \qquad (15)$$

(14)式中 $W_i(p)$ 是分形体在被测点 p 附近 Δp_i 小区域内的分布几率.

3.2　利用三火球模型的结果对末态集团动量分布维数的计算

首先，象几何模型[9]一样，在两个入射强子的某一质心系能量 E_{cm} 下，随机地选取若干个在中心区的末态集团的能量 $\varepsilon_i(i = 1, 2, \cdots 7)$，作为在同一 E_{cm} 下不同碰撞事例的代表点；i 碰撞事例产生的末态集团在中心区的动量分布以(1)式代替，而分布式中的相应量以 ε_i 处的值代替. 这样，i 事例中中心区末态集团分布几率为

$$\begin{aligned} W(p_i) &= \omega(p_i)\mathrm{d}p_i \\ &= \frac{\mathrm{d}p_i}{\varepsilon_i}\exp(-ap_{i\perp})\ \cdot \\ &\quad \exp(-\varepsilon_i/T_c)\ . \end{aligned} \qquad (16)$$

其中取[9]

$$ap_{i\perp} = 2.2\ . \qquad (17)$$

T_c 是中心区配分温度，ε_i 取集团平均能量（由文献[4]知，每个集团平均衰变成两个粒子），即

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= (p_{i\parallel}{}^2 + \bar{p}_{i\perp}{}^2 + m^2)^{1/2} \\ &\approx (p_{i\parallel}{}^2 + 2\bar{p}_\perp{}^2 + 2m_\pi^2)^{1/2}\ . \end{aligned} \qquad (18)$$

式中，m 为末态粒子质量，m_π 是 π 介子质量，$p_{i\parallel}$ 是集团纵动量，集团平均横动量的平方 $\bar{p}_{i\perp}{}^2$ 用末态粒子平均横动量的平方 $\bar{p}_\perp{}^2$ 表示. (16)式中的动量体积元

$$\mathrm{d}p_i = 2\pi p_{i\parallel}\mathrm{d}p_{i\parallel}\mathrm{d}p_{i\perp}\ . \qquad (19)$$

前面已提到，某一碰撞事例 i 产生的末态粒子的动量主要分布在入射面内，厚度为 $p_{i\perp}$ 的薄圆盘形状分布；实验上测得 $\bar{p}_{i\perp}$、$\bar{p}_\perp$ 是小量，取近似

$$\mathrm{d}p_{i\perp} \sim \bar{p}_{i\perp}\,,\quad \mathrm{d}p_{i\parallel} \sim \bar{p}_{i\perp}\,,$$
$$\Delta p_i \sim \bar{p}_\perp\,,\quad \bar{p}_{i\perp}^{\,2} \sim 2\bar{p}_\perp^{\,2}\,. \tag{20}$$

则由(14)～(20)式，有

$$W_i(p) = 4\pi\bar{p}_\perp^{\,2}p_{i\parallel}\exp(-2.2)\cdot \exp(-\varepsilon_i/T_c)/\varepsilon_i \tag{21}$$

和

$$\eta_{p_i} = \frac{\ln[4\pi\bar{p}_\perp^{\,2}(\varepsilon_i^2 - 2\bar{p}_\perp^{\,2} - 2m_\pi^2)^{1/2}]}{\ln\bar{p}_\perp} - \frac{\ln[\exp(-2.2)\exp(-\varepsilon_i/T_c)/\varepsilon_i]}{\ln\bar{p}_\perp}, \tag{22}$$

$$\bar{\eta}_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_{p_i}\,,\quad i = 1,2,\cdots n = 7 \tag{23}$$

(22)式中不同 E_{cm} 下的 T_c 取值取自文献[2，4]：当 $E_{cm}=200$ GeV 时，$T_c=4$ GeV；$E_{cm}=540$ GeV 时，$T_c=8$ GeV；$E_{cm}=900$ GeV 时，$T_c=10.5$ GeV．不同 E_{cm} 下 $\bar{p}_\perp$ 取值取自文献[10]引用实验值；ε_i 是随机地取得的值，见表1；以不同 E_{cm} 下相应值代入(22)和(23)式计算，得到的结果列入表1中．

从表1看到，在 $E_{cm}=200$～900 GeV 时，几率分布(21)式以及(16)式的动量空间的维数为2．

表1　不同 E_{cm} 下中心区末态集团的动量分布维数

E_{cm}/GeV	$i=$	1	2	3	4	5	6	7	$\bar{\eta}$	$\bar{p}_\perp$/GeV
200	ε_i/GeV	0.85	1.07	1.13	1.34	1.73	2.21	3.36		0.39
	η_i	1.94	1.91	1.91	1.92	1.96	2.03	2.21	2.0	
540	ε_i/GeV	1.0	1.6	2.1	2.2	2.6	3.4	4.4		0.425
	η_i	1.91	1.94	2.02	2.02	2.07	2.18	2.33	2.0	
900	ε_i/GeV	1.0	2.17	2.78	2.94	3.49	4.52	5.75		0.446
	η_i	1.87	1.9	1.96	1.98	2.05	2.17	2.33	2.0	

4　结论

本文推广到动量空间的豪斯道夫维数公式(3)计算高能强子碰撞非单衍过程产生的末态集团的动量空间维数，在末态集团动量是随机且对称分布下，从理论上求得其动量空间是二维的(或等效二维)．又以推广到动量空间的小区域分维公式(14)和平均分维公式(15)，利用三火球模型给出的中心末态集团动量分布和配分温度 T_c 的取值，算得的中心区末态集团动量分布也是二维的(或等效二维)．

我们从分析末态集团动量分布的角度出发，得出结论：高能强子碰撞非单衍过程产生的中心区末态集团的统计系综动量空间是二维的．

参　考　文　献

1　吴元芳，刘连寿．自仿射分形在高能碰撞多重产生中的应用．高能物理与核物理，1994，18：433～437

2　Liu Lianshou，Qin Lihong，Zhuang Pengfei．Multiplicity Dependence of Rapidity Distributions and Stochastic Nature of Nondiffractive Processes．Scientia Sinica，1986，A29：1 063～1 072

3　Cai Xu，Chao Weiqin，Meng Tachung．Statistical Approach to Nodiffractive Hadron-hadron Collisions：Multiplicity distributions and correlations in different rapidity intervals．Phys Rev，1986，D33：1 287～1 299；Chao Weiqin，Meng Tachung，Pan Jicai．Rapidity Dependence of Multiplicity Distributions and Reaction Mechanisms of Multiparticle Production Processes. Phys Rev, 1987, D35: 152～157

4 张 阳，刘连寿. 高能 p$\bar{p}$ 碰撞末态粒子的结团产生和前后关联. 高能物理与核物理，1994, 18: 326～333

5 杨展如. 分形物理学. 上海：上海科技教育出版社，1996, 2～3; 17～18

6 李后强，汪富泉. 分形理论及其在分子科学中的应用. 北京：科学出版社，1993, 6～8

7 吴敏金. 分形信息导论. 上海：上海科学技术文献出版社，1994, 115～117

8 辛厚文. 分形理论及其应用. 合肥：中国科学技术大学出版社，1993, 125～128

9 Chou T T, Yang Chenning, Yen E. Single-particle Momentum Distribution at High Energies and Concept of Partition Temperature. Phys Rev Lett, 1985, 54: 510～513; Chou T T, Yang Chenning. Geometrical Model of Multiparticle Production in Hadron-hadron Collisons. Phys Rev, 1985, D32: 1 692～1 698

10 陈奋策. 夸克-胶子等离子体对高能 p$\bar{p}$(p) 碰撞多重产生的可能描述. 高能物理与核物理，1995, 19: 637～645

Calculation of Dimension of Momentum Distribution of Final-state Clusters

Chen Fence

(*Department of Mathematics and Physics, Fujian Education Institute, Fuzhou* 350001)

Abstract The formula of fractal dimension in coordinate space is extended to the momentum space. The fractal dimension of the momentum distribution of final-state clusters in center region produced by nondiffraction processes of high-energy hadronic collisions is calculated based on the Three Fire-Ball Model and is found to be 2.

Key words high-energy hadronic collision　momentum fractal dimension　Three Fire-Ball Model　partical cluster

Classifying number O572.24