



胶球的格点QCD研究

苏玥 桂龙成 梁剑

The Study of Glueball in Lattice QCD

SU Yue, GUI Longcheng, LIANG Jian

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.11804/NuclPhysRev.40.2022094>

引用格式:

苏玥, 桂龙成, 梁剑. 胶球的格点QCD研究[J]. *原子核物理评论*, 2023, 40(2):198–206. doi: 10.11804/NuclPhysRev.40.2022094

SU Yue, GUI Longcheng, LIANG Jian. The Study of Glueball in Lattice QCD[J]. *Nuclear Physics Review*, 2023, 40(2):198–206. doi: 10.11804/NuclPhysRev.40.2022094

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

利用格点量子色动力学研究手征平滑过渡温度和手征相变温度

Chiral Crossover and Chiral Phase Transition Temperatures from Lattice QCD

原子核物理评论. 2020, 37(3): 674–678 <https://doi.org/10.11804/NuclPhysRev.37.2019CNPC65>

格点QCD组态产生研究

Generate Configurations for Lattice QCD Study

原子核物理评论. 2021, 38(2): 129–135 <https://doi.org/10.11804/NuclPhysRev.38.2021022>

格点QCD中有限体积下形状因子的内插计算

Lattice QCD Calculation of the Form Factor by Interpolation within Finite Volume

原子核物理评论. 2021, 38(2): 136–146 <https://doi.org/10.11804/NuclPhysRev.38.2021010>

格点核子-核子势在核物质中的相对论效应(英文)

Relativistic Effects in Nuclear Matter with Lattice NN Potential

原子核物理评论. 2017, 34(3): 505–508 <https://doi.org/10.11804/NuclPhysRev.34.03.505>

通过基矢光前量子化方法研究K介子

A Study of the Kaon from the Basis Light-Front Quantization Approach

原子核物理评论. 2020, 37(3): 470–477 <https://doi.org/10.11804/NuclPhysRev.37.2019CNPC31>

基于PACS的直流/脉冲双模式工作点调节软件开发与验证

Development and Validation of Lattice Adjustment Application Based on PACS under DC/Pulse Dual-mode

原子核物理评论. 2020, 37(4): 842–847 <https://doi.org/10.11804/NuclPhysRev.37.2019057>

文章编号: 1007-4627(2023)02-0198-09

胶球的格点 QCD 研究

苏玥¹, 桂龙成^{1,†}, 梁剑^{2,3}

(1. 湖南师范大学物理系, 长沙 410000;

2. 华南师范大学量子物质研究院, 广东省核物质科学与技术重点实验室, 广州 510006;

3. 华南师范大学南方核科学计算中心, 粤港量子物质联合实验室, 广州 510006)

摘要: 胶球是强子物理的重要研究对象, 也是我国北京谱仪 (BESIII) 实验寻找的重要物理目标。格点量子色动力学作为从第一性原理出发的研究强相互作用非微扰特性的方法, 是研究胶球问题的重要理论工具。本文介绍了近年来格点量子色动力学理论对胶球性质的一些研究进展, 并讨论实验上发现的若干共振态作为胶球的可能性。另外, 规范场拓扑荷密度在纯规范理论中可以作为内插场算符来研究赝标量胶球性质, 但在具有 u, d, s 动力学海夸克组态上的拓扑荷密度算符的关联函数中, 只观察到轻赝标量介子 η 和 η' 的贡献。这启示我们在具有动力学海夸克的情形下, 需要构造多种形式的内插场算符来研究赝标量胶球。

关键词: 格点量子色动力学; 胶球; 拓扑荷; 味道单态赝标量介子

中图分类号: O571.53

文献标志码: A

DOI: 10.11804/NuclPhysRev.40.2022094

0 简介

量子色动力学 (QCD) 是描述强相互作用的基本理论, 其基本自由度为夸克场及胶子场。QCD 是非阿贝尔量子规范理论, 在低能区具有渐近自由的特性, 在高能区则有色禁闭特性, 即不存在自由的胶子和夸克态。因此实验中直接探测到的强相互作用物质是由夸克和胶子构成的色单态体系——强子。夸克模型将强子分类为由正反夸克构成的介子和由三个夸克构成的重子。与阿贝尔规范理论 (如量子电动力学) 的媒介粒子 (如光子) 不同, 胶子携带色荷并存在自相互作用, 因此也可以像夸克一样参与强子构成。一般的唯象理论认为存在纯粹由胶子构成的束缚态, 称作胶球。寻找和研究胶球成为强子物理的一个重要研究问题。关于胶球性质的研究有助于更深入地理解强相互作用的低能性质。

在量子色动力学发展早期, 便涌现出多种理论开展了关于胶球性质的研究, 如 MIT 袋模型^[1-2], 组分胶子模型^[3-4], QCD 求和规则^[5-9] 和格点 QCD 等。格点量子色动力学 (Lattice QCD) 作为 QCD 理论的非微扰求解方法, 在研究胶球问题上有着独特的优势。淬火近似下的格点 QCD 计算给出了最轻胶球的质量, 其中标量

胶球 1.5~1.7 GeV, 张量胶球 2.2~2.4 GeV, 及赝标量胶球约 2.6 GeV^[10-11]。除此之外, 实验上也给出了一些胶球的候选者。例如, 在标量区域存在着三个同位旋单态粒子 $f_0(1370)$, $f_0(1500)$, $f_0(1710)$, 如果将质量接近的其它标量粒子排入介子八重态和单态, 还多出了一个同位旋单态的粒子。一个自然的解释, 这个多出来的粒子可能是胶球, 不过对于哪个粒子对应着胶球, 存在着较大的争议^[12-14]。在赝标量道也有类似的情形, 对于质量接近的同位旋单态赝标量粒子 $\eta(1405)$, $\eta(1475)$, $\eta(1760)$, 也存在着额外的可能是赝标胶球的粒子, 然而这些粒子的质量与格点 QCD 理论预言的赝标量胶球的质量差距较大。文献^[15]考虑了赝标介子与赝标胶球混合的情况, 发现混合后的胶球质量仍大于 2 GeV。文献^[16]则是认为 $\eta(1405)$ 和 $\eta(1475)$ 其实是同一个态, 只是在不同衰变道的不同体现而已, 如此一来, 在该能量区域也就并不存在额外的粒子, 格点预言的赝标量胶球与实验并不矛盾。此外, 我国北京谱仪 (BESIII) 在 J/ψ 到 $\gamma\eta\eta$, γKK 等过程陆续发现了一些同位旋单态赝标量粒子, 如 $X(2370)$ ^[17-18], $X(2500)$ ^[19] 以及最近刚刚发布的 $X(2600)$ ^[20]。这些粒子质量与格点 QCD 预言的赝标量胶球质量接近, 值得关注它们作为赝标量胶球

收稿日期: 2022-09-07; 修改日期: 2022-10-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (12175036, 12175073); 广东省基础与应用基础研究重大项目 (2020B0301030008); 湖南省教育厅重点项目 (20A310)

作者简介: 苏玥 (1998-), 女, 辽宁北票人, 硕士研究生, 从事格点 QCD 研究; E-mail: suyue@hunnu.edu.cn

† 通信作者: 桂龙成, E-mail: guilongcheng@hunnu.edu.cn

候选者的可能性。对于张量道， $f_2(2340)$ ^[21]是可能的张量胶球候选者，此处不做过多探讨。除此之外，具有奇特量子数，即普通 $q\bar{q}$ 介子不具备的量子数的胶球态也被一些合作组^[22]提出并研究，这也是寻找胶球的一个重要方向。

总体来说，尽管胶球作为一种奇特强子一直受到粒子物理学界的关注，想要将其从普通介子中分辨出来仍然十分困难，这需要实验家与理论家二者的共同努力。本工作将基于格点 QCD 理论，介绍该领域对胶球的一些研究进展，特别是中国格点组在该方面的一些研究成果，在最后也将讨论与赝标量胶球具有相同量子数的拓扑荷密度算符的相关计算。

1 格点 QCD 理论简介

首先，我们对格点 QCD 理论做一个简单的介绍，更详细的了解可以参考专门的著作^[23]。格点 QCD 从 QCD 的路径积分形式出发，通过 Wick 转动到欧氏时空，闵氏场论中的生成泛函可视为统计系统的配分函数，算符的真空期望值转化为系综的平均值；再经过四维欧氏时空的离散化，使得自由度有限可数，格点 QCD 研究就可以进行数值模拟计算。在格点 QCD 理论中，费米场定义在时空格点上，而传递相互作用的规范场 $A_\mu(x)$ 是通过指数映射 $U_\mu(n) = e^{ia_\mu A_\mu(n)}$ 定义为连接相邻时空点的链，称为规范链变量。系统的配分函数可写为

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-(S_g[U] + S_f[\bar{\psi}, \psi, U])} \\ &= \int \mathcal{D}U \det M(U) e^{-S_g[U]}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $[DU]$ 代表着每个链变量的积分； $S_g[U]$ 为规范场作用量部分 (威尔逊规范场作用量)，该作用量在 $a \rightarrow 0$ 时，回到连续时空下的作用量。

$$S_g[U] = \frac{\beta}{3} \sum_P \text{Re}[\text{Tr}(1 - U_P)], \quad (2)$$

这里 $U_P = U_\mu(n)U_\nu(n+\mu)U_\mu^\dagger(n+\nu)U_\nu^\dagger(n)$ ，代表着由四条邻近规范链构成的小方格； μ, ν 为沿 x, y, z, t 的方向指标； n 为四维离散欧氏时空坐标点。式 (1) 的第二步将费米场积分成费米子行列式，从而整个配分函数都是关于规范场的积分。可以通过蒙特卡罗的方式产生一系列的满足该配分函数的组态，所有物理相关的期望值变为在该系综下的平均值

$$\langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi O(U, \bar{\psi}, \psi) e^{-S[U, \bar{\psi}, \psi]}}{\mathcal{Z}} = E(O), \quad (3)$$

其中 O 为物理观测量所对应的算符。于是与物理相关的

信息，就可以从各类关联函数中得到。例如通过计算两点关联函数并插入哈密顿量本征态的完备集，可从中抽取出物理态的质量信息

$$\begin{aligned} \langle O_G(t_f, \mathbf{p}) O_G^\dagger(t_0, \mathbf{p}) \rangle &= \sum_i \langle \Omega | O_G(t_f, \mathbf{p}) | n_i \rangle \langle n_i | O_G^\dagger(t_0, \mathbf{p}) | \Omega \rangle \\ &= \sum_i \langle \Omega | e^{\hat{H}(t_f - t_0)} O_G(t_0, \mathbf{p}) \times \\ &\quad e^{-\hat{H}(t_f - t_0)} | n_i \rangle \langle n_i | O_G^\dagger(t_0, \mathbf{p}) | \Omega \rangle \\ &= \sum_i | \langle n_i | O_G^\dagger(t_0, \mathbf{p}) | \Omega \rangle |^2 e^{-E_i(t_f - t_0)}, \end{aligned} \quad (4)$$

Ω 为相互作用真空； H 为系统哈密顿量； $|n_i\rangle$ 为哈密顿量的本征态； E_i 为第 i 个态的能量； $t_0(t_f)$ 为产生 (湮灭) 算符所处的时刻。从上述表达式可以看出，当 $t_f - t_0$ 足够大时，关联函数将由基态强子主导，选取合适的时间间隔进行拟合可得到与算符 O 具有相同量子数的基态强子态质量。

由于胶球主要由胶子构成，一般采用纯规范场来构造胶球算符，以此来计算胶球质量谱。在格点上用规范链替代了规范场，因此可以通过由规范链组成的规范不变量——威尔逊圈来构成胶球算符，图 1 列出了一些威尔逊圈的构型^[11]。通过对不同形状的威尔逊圈做 O 群的转动来构建一定数目的胶子算符，再将这些算符进行线性组合，使得它们满足空间点群的各个不可约表示—— A_1, A_2, E, T_1, T_2 ，并对这些算符做空间反演变换，构造出具有确定 P 宇称的算符；再对这些算符取实部对应着电荷共轭宇称 $C = +$ ，取虚部对应着 $C = -$ ，来给出确定 C 宇称的算符。最终得到属于空间点群各个不可约表示的具有确定 PC 宇称的算符 $O_{A_1, A_2, E, T_1, T_2}^{PC}$ 。当取连续极限 $a \rightarrow 0$ 时，可以对应到具有确定 O_P^{PC} 的算符，它们的一些对应关系见表 1。

例如，我们若采用图 1 中第一种威尔逊圈来构建属于 A_1^{++} 的胶球算符：

$$O_{A_1^{++}} = O_1^{++} + O_2^{++} + O_3^{++}, \quad (5)$$

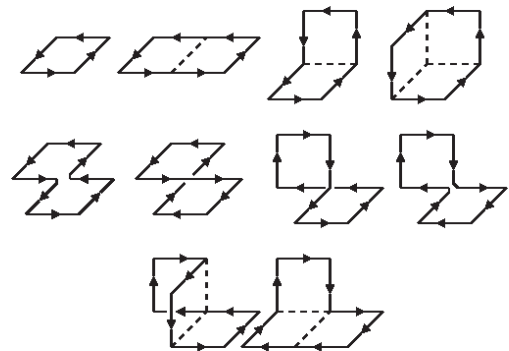


图 1 构造胶球算符所需要的威尔逊圈构型^[11]

表 1 空间点群与连续群的对应关系

J	Λ
0	A_1
1	T_1
2	$E \oplus T_2$
3	$A_2 \oplus T_1 \oplus T_2$
4	$A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2$

这里的 $O_{1,2,3}$ 分别表示三种不同空间取向的威尔逊圈。对于 A_1 表示, 这些算符前面的系数都相同。对其他表示, 算符前的系数可以根据群表示的不可约分解得到。此外, 我们还可以进一步做涂抹^①的操作, 来获得更大的算符集合。对每组量子数构建了 24 种胶球算符, 利用这些胶球算符可以构建出 24×24 的两点关联函数矩阵 $C_2^{ij}(t, \mathbf{P})$, $i, j = 1, 2, \dots, 24$ 。通过求解如下的广义本征值方程:

$$\tilde{C}(t_D) \mathbf{v}^{(R)} = e^{-t_D m(t_D)} \tilde{C}(0) \mathbf{v}^{(R)}, \quad (6)$$

t_D 固定为 1 的优化时间间隔, $\mathbf{v}^{(R)}$ 为各个态的本征矢量。最终将胶球算符集合按本征矢量进行线性组合, 即得到主要投影到第 α 个胶球的优化算符 $O_{\text{opt}}^\alpha = v_i^\alpha O_i$ 。这些优化胶球算符构建的两点关联函数在较小的时间间隔上便以单态贡献为主, 有利于获取较高精度的胶球质量。基于这些优化的胶球算符, 人们可以进一步研究胶球的 Bethe-Salpeter(BS) 波函数、 J/ψ 辐射衰变过程的产率等问题。

2 胶球的格点 QCD 研究进展

如前所述, 在格点 QCD 理论中通常选取格点上的威尔逊圈来构建胶球算符, 注意到威尔逊圈是通过规范链构成的首尾闭合的圈, 因此可视为完全由规范场构成的算符。在淬火近似下, 由于没有海夸克, 纯规范场构成的算符不会与各类介子态耦合, 只耦合到胶球态^[11]。近期也有工作研究了纯 $SU(N)$ 规范理论下胶球的质量, 并给出了胶球质量在 $N \rightarrow \infty$ 下的结果, 该计算结果与其他淬火近似下的结果都比较一致^[24]。随着格点 QCD 发展到非淬火近似计算时期(即产生组态时包含海夸克的贡献), 也有不少工作计算了非淬火近似下的胶球谱^[25-26]。随着国内超算的发展, 中国格点组利用我国的超级计算机, 产生了一批自主的 2 味非对称动力学组态, 并在此基础上开展了胶球谱的研究^[27]。最近他们又基于 RBC 合作组在物理点的 2+1 味动力学组态上,

再次计算了三个最轻胶球的质量^[28]。在这些工作中, 也都是采用纯胶子算符来构建胶球算符, 得到的胶球谱也大体与淬火近似下的相一致。然而在具有海夸克的情形下, 原则上纯胶子算符也可以耦合到各类同位旋单态介子, 但是这些模拟计算结果说明纯胶子算符可能与这些介子态的耦合非常弱, 因此在较短的时间范围内, 主要体现出来的都是胶球态。不过在非淬火近似下仍然会存在胶球算符与普通介子态的混合问题, 特别对于赝标量道, $U_A(1)$ 反常可能增强赝标量介子与赝标量胶球的混合。中国格点组研究了 η 及 η_c 与赝标量胶球的混合问题, 给出了混合角 $\theta_{\eta-G} = 3.47(46)^\circ$ ^[29]。如果要更精确地给出胶球谱, 还应该加入各类夸克场算符, 来构建关联函数矩阵, 采用变分法获取各个态与算符的耦合关系, 从中辨认出胶球, 并给出胶球的谱学信息。文献^[30]首次在标量道, 构建夸克场算符及胶子场算符关联函数矩阵分析了各个算符与态的耦合情况, 然而并没有得到明显的胶球信号, 该问题需要更多的格点 QCD 方面的研究来进行检验。

传统夸克模型中的夸克是唯一意义上的组分夸克。如果也存在类似的组分胶子, 则可以构建组分胶子模型, 将胶球视为在具有色禁闭特征的势场下, 由若干个组分胶子组成的色单态粒子^[3]。在这些组分模型中, 组分夸克或组分胶子的相对波函数描述了整个强子的结构, 对应到场论体系, 可以通过 Bethe-Salpeter 波函数来研究各类强子的内部结构。对于胶球, 格点上的 Bethe-Salpeter 波函数可定义为

$$\Phi_G(r) = \left\langle 0 \left| \sum_{\mu, \nu} \alpha(\mu, \nu) \sum_{|\hat{r}|=r, x} Y_{lm}(\hat{r}) A_\mu(x) A_\nu(x+r) \right| G \right\rangle, \quad (7)$$

\hat{r} 代表了 \mathbf{r} 的方向; $Y_{lm}(\hat{r})$ 提供了两胶子算符的轨道角动量; $\alpha(\mu, \nu)$ 给出了胶球态 $|G\rangle$ 对应的量子数。该波函数 $\Phi(r)$ 可以通过在格点上计算如下两点关联函数并拟合得到

$$\begin{aligned} C_2(t, r) &= \langle 0 | O_A(t, r) O_B(0) | 0 \rangle \\ &= \sum_i \frac{1}{2m_i} \langle 0 | O_A(r) | i \rangle \langle i | O_B | 0 \rangle e^{-m_i t} \\ &= \sum_i \Phi_i(r) e^{-m_i t}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $|i\rangle$ 为插入的中间胶球态; m_i 为第 i 个态的质量; $O_A(t, r)$ 为空间拉开的胶子算符; $O_B(r)$ 为具有特定量子数的优化胶球算符。我们在淬火近似格点 QCD 下, 两组不同格距的格子上模拟计算了标量及张量胶球基态和

① 即将当前的链变量与具有相同起始点的其他链变量进行线性组合来替代原链变量, 该操作相当于减少规范链变量的短程涨落, 从而改善长程相关的物理信号。

第一激发态的 BS 波函数^[31]。计算结果显示，对于基态胶球波函数不会有穿过零点的节点（即基态胶球波函数与 x 轴没有交点），而对第一激发态会存在这样的节点，这与两胶子组分胶球是相符合的。对赝标量胶球，它可能由两个组分胶子构成 P 波态（轨道量子数 $L = 1$ ），也可能由三个胶子构成 S 波态（轨道量子数 $L = 0$ ）。文献^[28]基于两组具有物理 π 介子质量的 2+1 味海夸克组态，计算了标量、张量及赝标量胶球的 BS 波函数，对于赝标量胶球，采用了两胶子算符来计算，得到的 BS 波函数显示出 P 波的特征。未来进一步研究三胶子赝标量算符可以提供更丰富的胶球内部结构信息。

在粲偶素的辐射衰变过程中，正反粲夸克湮灭会产生大量的胶子，被认为是寻找胶球的理想场所。从而理论上提供胶球在粲偶素辐射衰变过程的产率计算，可以为实验上提供寻找和辨认胶球的重要依据。中国格点组分别计算了标量、张量及赝标量胶球在 J/ψ 辐射衰变过程的产率，计算结果表明，标量胶球在 J/ψ 辐射衰变过程的分支比为 $3.8(9) \times 10^{-3}$ ^[32]。目前实验上给出 $f_0(1710)$ 在 J/ψ 的辐射衰变过程中的已测得分支比之和约为 1.7×10^{-3} ，且 $J/\psi \rightarrow \gamma + f_0(1710)$ 的产率比 $J/\psi \rightarrow \gamma f_0(1500)$ 大了差不多一个量级^[33-34]。从这些迹象来看， $f_0(1710)$ 更可能为一个标量胶球，或以标量胶球成分为主。计算给出张量胶球在 J/ψ 辐射衰变过程的分支比为 $1.1(2)(1) \times 10^{-2}$ ^[35]，这是一个很大的分支比。目前 BE-SIII 在 J/ψ 辐射衰变中通过分波分析得到的张量介子 $f_2(2340)$ 的产生性质和这个结果是相容的^[19, 33-34, 36]。另外计算给出赝标量胶球在 J/ψ 辐射衰变过程的分支比为 $2.31(90) \times 10^{-4}$ ^[37]，与实验上测量的 J/ψ 辐射衰变到同位旋单态赝标介子相比，并未有明显增强，这里 $U_A(1)$ 量子反常可能提供了 J/ψ 到赝标量介子的增强。中国格点组计算了 J/ψ 辐射衰变到 η 过程，考虑 $U_A(1)$ 反常带来的混合后，可以得到与实验测量一致的结果^[15]。因此在赝标量道， $U_A(1)$ 反常对赝标量介子及赝标量胶球有着重要的影响，后面我们会进一步讨论与 $U_A(1)$ 反常相关的问题。

3 拓扑荷密度关联函数与 η'

在前一章介绍构建胶球算符，主要通过构建威尔逊圈，并通过线性组合成为空间点群的不可约表示的算符。另外，原则上也可以通过威尔逊圈的线性组合，构成色磁场 \mathbf{B}_c 及色电场 \mathbf{E}_c ，然后根据连续空间下常见的标量胶球 $S(x)$ ，赝标量胶球 $P(x)$ 以及张量胶球 $\Theta_{ij}(x)$ 的算符关系：

$$\begin{aligned} S(x) &= 2g^2 \text{Tr} [\mathbf{B}(x)^2 + \mathbf{E}(x)^2], \\ P(x) &= 8g^2 \text{Tr} [\mathbf{E}(x) \cdot \mathbf{B}(x)], \\ \Theta_{ij}(x) &= 2g^2 \text{Tr} [\theta_{ij}^B(x) - \theta_{ij}^E(x)], \end{aligned} \quad (9)$$

其中 g 为规范耦合常数， $\theta_{ij}^E, \theta_{ij}^B$ 定义为

$$\begin{aligned} \theta_{ij}^E &= \text{Tr} E_i E_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{Tr} \mathbf{E}^2, \\ \theta_{ij}^B &= \text{Tr} B_i B_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{Tr} \mathbf{B}^2, \end{aligned} \quad (10)$$

来构建胶球算符。实际上在淬火近似下采用该方式也同样可以得到与前一章相同的胶球谱。然而值得注意的是，根据味单态的轴矢流瓦德恒等式 (Axial Ward Identities):

$$\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + m \bar{\psi} \gamma_5 \psi, \quad (11)$$

$F_{\mu\nu}$ 表示胶子场的场强张量，该式表明了拓扑荷密度算符 $q(x) = \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ 在存在海夸克的情形下，与同位旋单态的赝标量介子算符 $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ 存在联系，从而该算符可能会与同位旋单态赝标量介子存在耦合，那么此时采用该算符来计算赝标量胶球可能不合适（原则上，由于 $F_{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量， $F_{0i} = -E_i$ ； $F_{\mu\nu}$ 的 ij 分量， $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$ ， $i, j, k = 1, 2, 3$ ，则拓扑荷算符 $q(x)$ 正比于 $\mathbf{E}(x) \cdot \mathbf{B}(x)$ 。与式(9)对比，赝标胶球算符 $P(x)$ 也就正比于规范场的拓扑荷密度算符 $q(x)$ ）。

当前已有一些工作关注了这个问题，文献^[27, 38-39]发现与色电磁型算符耦合到赝标量胶球的不同：拓扑荷型的算符主要耦合到质量更轻的介子，如 η' 。由于文献^[27]中采用的组态只包含 u, d 海夸克，通过在包含 2+1 味的海夸克组态进行模拟计算，有助于进一步验证该现象。

因此我们采用 RBC 合作组^[40]基于具有良好手征性的畴壁费米子作用量产生的达到物理 π 介子质量的 2+1 味海夸克组态，计算了拓扑荷密度关联函数并抽取出中间粒子的质量。组态参数见表 2。

为了改进离散化误差，我们的计算采用了四叶草 (clover) 型的改进拓扑荷密度算符 $q(x)$ ^[41]:

$$q(x) = c_0 q^{\text{clov}}(x) + c_1 q^{\text{rect}}(x), \quad (12)$$

其中： $\bar{c}_1 = -1/12$ ； $c_0 = 5/3$ 为 Symanzik 树级系数。 $q^{\text{clov}}(x)$ 和 $q^{\text{rect}}(x)$ 具有类似的形式：

表 2 组态参数

$L^3 \times T$	a/fm	$m_{\text{res}}^{(s)} a$	$m_s^{(s)}$	m_π/MeV	N_{cfg}
$48^3 \times 96$	0.114 1(2)	0.000 61(1)	94.9	139	356

$$q(x)^{\text{clov(rect)}} = \frac{1}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{\text{clov(rect)}}(x) F_{\rho\sigma}^{\text{clov(rect)}}(x) \right\}, \quad (13)$$

$q^{\text{clov}}(x)$ 和 $q^{\text{rect}}(x)$ 的不同主要体现在 $F_{\mu\nu}$ 的构造上。clover 型的 $F_{\mu\nu}^{\text{clov}}(x)$ 可以表示为

$$F_{\mu\nu}^{\text{clov}}(x) = \frac{\text{Im}}{4} \left[U_\mu(x) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) + \right. \\ U_\nu(x) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x - a\hat{\mu}) U_\mu(x - a\hat{\mu}) + \\ U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) U_\mu(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) \times \\ U_\nu(x - a\hat{\nu}) + U_\nu^\dagger(x - a\hat{\nu}) U_\mu(x - a\hat{\nu}) \times \\ \left. U_\nu(x + a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) U_\mu^\dagger(x) \right] \quad (14)$$

该形式将传统拓扑荷密度中场强张量 $F_{\mu\nu}^{\text{plaq}}(x) = \text{Im} [U_\mu(x) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x)]$ 的离散化误差改进到 $O(a^4)$ 。 $F_{\mu\nu}^{\text{rect}}$ 类似于 $F_{\mu\nu}^{\text{clov}}(x)$ ，只是使用 1×2 这种小长方形圈来构造。

最终通过计算由拓扑荷密度算符构成的两点关联函数来抽取相应的物理信息：

$$C_2(|r|) = \langle q(y)q(x) \rangle \\ = \sum_{r'} \sum_{r_0} q(r_0 + r') q(r_0), \quad (15)$$

这里 r 为两个时空点 x 、 y 之间距离， r_0, r' 为四维时空点。该两点关联函数在 $r = 0$ 时，即为拓扑磁化率 (topological susceptibility)，因此是一个正的数；而在 $r > 0$ 时，因 $q(x)$ 为一个赝标量的算符，故两点关联函数的符号为负。从数值上来看，两点关联函数会随 r 由一个正数变成负数，并按指数衰减，到达某个最低点后会有上升的趋势。图 2 展示了两点函数的这种行为。理论上讲， $C_2(r)$ 在大 r 区域的行为来自赝标量粒子的贡献。根据欧氏空间玻色子传播函数的性质，一个质量为 M 的赝标量介子的传播子对欧氏距离 r 的函数关系为

$$C_2(r) \sim \frac{M}{r} K_1(Mr), \quad (16)$$

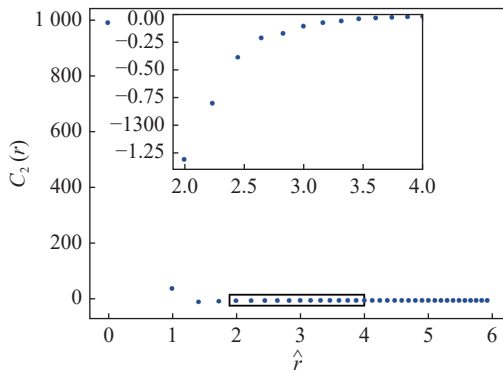


图 2 拓扑荷密度算符两点关联函数 $C_2(r)$ 随 \hat{r} 的变化， \hat{r} 为格点上无量纲的时空距离 (在线彩图)

这里 $K_1(x)$ 为修正的贝塞尔函数。因此可以通过拟合两点关联函数来得到中间的赝标量粒子的质量。

然而如图 3 所示，由式 (12) 定义的 $q(x)$ 直接计算的 $C_2(r)$ 在 r 比较大时统计噪音太大，得不到有统计意义的信号。文献 [38] 指出，对规范场做威尔逊流变换 (Wilson flow)，能有效改进拓扑荷密度算符关联函数的信号。威尔逊流 B_μ (Wilson flow) 最早由 Lüscher 提出 [42]，定义为规范场做如下形式的变换：

$$\dot{B}_\mu = D_\nu G_{\nu\mu}, \\ B_\mu|_{t=0} = A_\mu, \quad (17)$$

其中

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu], \\ D_\mu = \partial_\mu + [B_\mu, \cdot], \quad (18)$$

$$\frac{dB_\mu}{dt} = -g_0^2 \frac{\partial S_{\text{Wilson}}(t_f)}{\partial A_\mu} = D_\nu G_{\nu\mu}, \quad (19)$$

这里的 t_f 称为流时间 (flow time)，是一个用来描述规范场变换的参数； \cdot 为流时间的微分； S_{Wilson} 为威尔逊作用量。随着 t_f 增加，规范场会向着作用量 S_{Wilson} 最陡下降的方向进行变换。随着这样的流变化，规范场相当于以 $\sqrt{8t_f}$ 的半径进行涂抹 (smearing) 操作。因此进行威尔逊流变换，也相当于在对规范场做涂抹操作，降低规范场的涨落。我们计算了在不同流时间 t_f 下的两点关联函数，结果见图 4。此外，采用对数坐标下的 $-C_2(r)$ ，结果见图 5。

从这两张图中可见，随着流时间 t_f 增大，在大 r 的信号会增强，两点函数由正变负的位置也会后移，这源于涂抹操作会将原本的局域 δ 函数扩展为非局域的函数。不过当 $r > 6$ 时，不同流时间的两点函数的衰减行为类似，表明此时都以相近的质量衰减。

为了从两点关联函数中拟合出质量，需要选择合适的拟合区间。为此，我们定义如下的有效质量：对

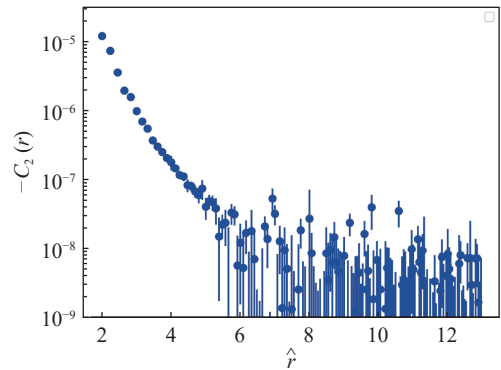


图 3 对数坐标下拓扑荷密度算符的两点关联函数 (在线彩图)

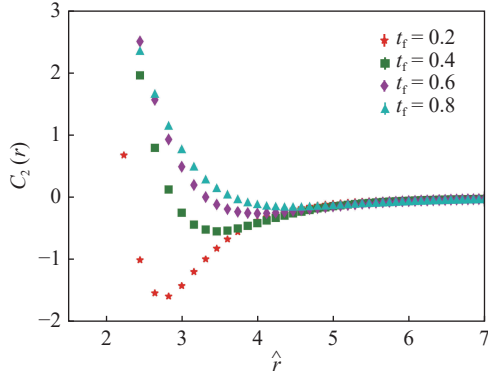


图 4 不同威尔逊流时间下，拓扑荷密度算符两点关联函数 $C_2(r)$ 随 \hat{r} 的变化 (在线彩图)

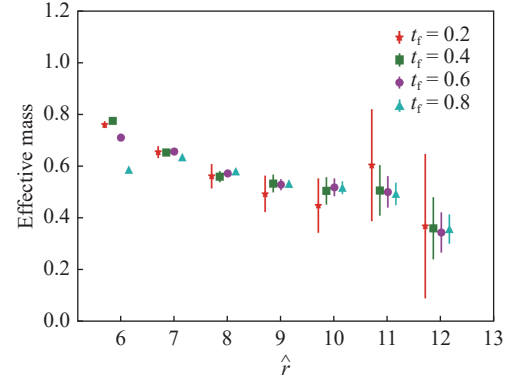


图 6 不同威尔逊流时间的有效质量，为了方便区分，对相同 \hat{r} 的点做了平移 (在线彩图)

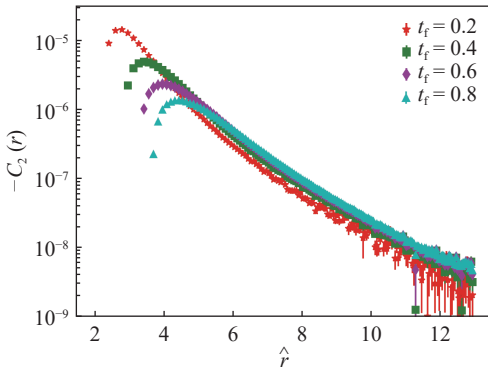


图 5 对数坐标下，不同威尔逊流时间的拓扑荷密度算符两点关联函数 (在线彩图)

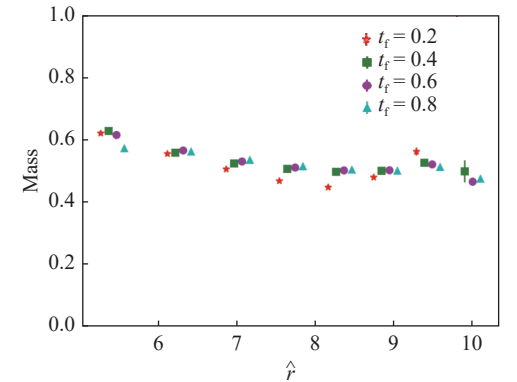


图 7 不同威尔逊流时间下的 η' 拟合质量随拟合起点 \hat{r} 值的变化，拟合终点为 10.5 (在线彩图)

$[r, r + \Delta r]$ 区间内的两点函数取平均值 $\bar{C}_2(r) = \sum_{\Delta r} C_2(r + \Delta r) / \Delta r$ 。在该区间的有效质量由以下方程求解得到

$$\frac{f[r + \Delta r, m_{\text{eff}}(r)]}{f[r, m_{\text{eff}}(r)]} = \frac{C_2(r + \Delta r)}{C_2(r)}, \quad (20)$$

其中

$$f(r, m) = A \frac{K_1(m|r)}{|r|}. \quad (21)$$

我们选取 $\Delta r = 1$ 的结果见图 6。有效质量的结果可以帮助我们大体选定拟合范围。从图中可以看出，在 $r > 11$ 之后的点误差已经变得较大，因此，我们限定 r 的拟合上限为 10.5。对于选取不同拟合起点的得到的质量如图 7 所示。

因在不同梯度流时间 t_f 下的两点函数在 r 较大时给出相似的质量平台，故我们选择了信号较好的 $t_f = 0.6$ 来拟合赝标介子质量。其他不同流时间的计算结果视为由于 t_f 的选择而带来的系统误差。我们选取的拟合函数为式 (21) 的形式。由图 7 的结果可以看出，从 $r = 7$ 开始，拟合的结果达到一个平台。此时拟合的 $\chi^2/\text{dof} = 0.44$ ，因此，我们选取拟合区间为 $7 \sim 10.5$ 。最终通过单质量项形式给出的拟合结果为 $m = 920(5)(10) \text{ MeV}$ ，误差依

次为拟合误差和系统误差。该结果与文献 [38] 的结果一致，且与实验值 $m_{\eta'} = 957.78(6) \text{ MeV}$ [43] 在误差范围内相符合。

拓扑荷密度算符主要通过轴矢流部分守恒关系与同位旋单态的赝标量介子耦合。而考虑到 η' 和 η 都会具有同位旋单态 η_1 的成分，我们应该可以从拓扑荷密度算符两点关联函数中看到这两个态。因此，我们进一步修改拟合函数，采用两个质量项来拟合。拟合函数形式与文献 [38] 中的类似：

$$\frac{A}{r} K_1(m_\eta r) \rightarrow \frac{A_1}{r} e^{2m_\eta' t} m_\eta' K_1(m_\eta' r) + \frac{A_2}{r} e^{2m_\eta^2 t} m_\eta K_1(m_\eta r), \quad (22)$$

其中： m_η 为 η 介子质量； $e^{2m_\eta' t}$ 和 $e^{2m_\eta^2 t}$ 因子来自于威尔逊梯度流的影响。

该混合机制也可以解释我们采用单质量项拟合时，随起始 r 选取的越大，拟合质量降低的现象。在 r 较小时，与 η' 耦合的权重大于与 η 耦合的权重，质量偏高；在 r 较大时，与 η 耦合的权重大于与 η' 耦合的权重，质量偏低。由于两者的混合，也就可以很好地解释拟合出

的 η' 质量会呈现出整体比实验数据低的现象。另外，式 (22) 中的参数 A_1 和 A_2 的物理含义也是清楚的。考虑到质量本征态 η 和 η' 是味道八重态 η_8 和单态 η_1 的混合，即 $|\eta\rangle = \cos\theta|\eta_8\rangle - \sin\theta|\eta_1\rangle$ ， $|\eta'\rangle = \sin\theta|\eta_8\rangle + \cos\theta|\eta_1\rangle$ ，其中 θ 是 $\eta - \eta'$ 的混合角。令 $\langle 0|q(0)|\eta_1\rangle = Z$ 并且考虑 $\langle 0|q(0)|\eta_8\rangle = 0$ ，从理论上讲我们有 $A_1 = Z^2 \cos^2\theta$ 和 $A_2 = Z^2 \sin^2\theta$ ，即 $\tan^2\theta = A_2/A_1$ 。文献 [38] 的做法是通过理论模型估计 η 的质量，然后对给定的一些混合角 θ 在 $0^\circ \sim 30^\circ$ 的条件下利用式 (22) 来判断混合角的合适取值并拟合 $m_{\eta'}$ 。我们这里将这个约束放开，通过拟合出 A_1, A_2 来直接给出 η', η 的混合角的估计。我们采用单态拟合给出的 η' 的信息作为先验，来进行两态拟合，对于不同的梯度流动时间 t_f ，不同拟合起点的 A_1, A_2, η', η 拟合结果如图 8 和图 9。在梯度流时间 $t_f = 0.6$ 时，拟合区间 r 点定为 11~12.6，我们的拟合结果给出最轻的态的质量为 $m_\eta = 615(95)$ MeV，与实验上 η 质量 547.86(1) MeV 接近；激发态的质量为 $m_{\eta'} = 918(160)$ MeV，与 η' 介子质量是相容的，这里拟合的 χ^2/dof 为 0.68。根据拟合得到的 A_1 和 A_2 ，我们也可以估计 $|\theta|$ 的取值范围(这里只能得到绝对值)，即

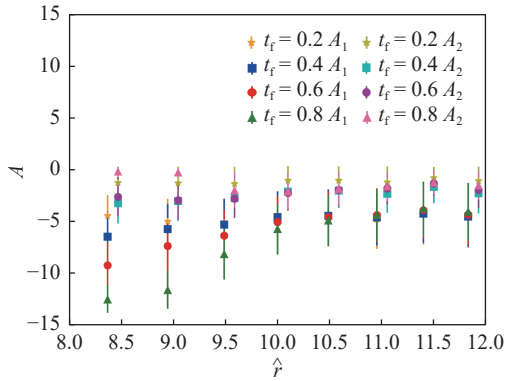


图 8 不同威尔逊流时间下的 A_1, A_2 拟合起点 \hat{r} 值的变化，拟合终点为 12.6(在线彩图)

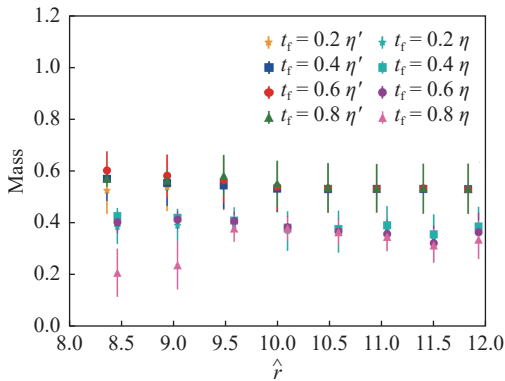


图 9 不同威尔逊流时间下的 η', η 拟合质量随拟合起点 \hat{r} 值的变化，拟合终点为 12.6(在线彩图)

$$|\tan\theta| = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}. \quad (23)$$

由不同的拟合结果得到的 $|\theta|$ 估计值见图 10。尽管这种方式得到的混合角误差较大，但中心值基本上在 $20^\circ \sim 30^\circ$ 之间，和基于 Gell-Mann-Okubo 线性质量关系得到的混合角 $\theta_{\text{lin}} = 24.5^\circ$ [43] 是符合的。考虑到 A_1, A_2 物理含义为

$$\begin{aligned} A_1 &\propto |\langle 0|q(0)|\eta'\rangle|^2, \\ A_2 &\propto |\langle 0|q(0)|\eta\rangle|^2, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\langle 0|q(0)|\eta\rangle$ 为拓扑荷密度算符在赝标量介子态与真空态之间的矩阵元，式 (23) 中 $|\tan\theta|$ 的定义和文献 [44] 中的定义是一致的，而我们的结果 $|\theta| \sim (20^\circ \sim 30^\circ)$ 和该文献的结果 $|\theta| = 24(4)^\circ$ 是相容的。

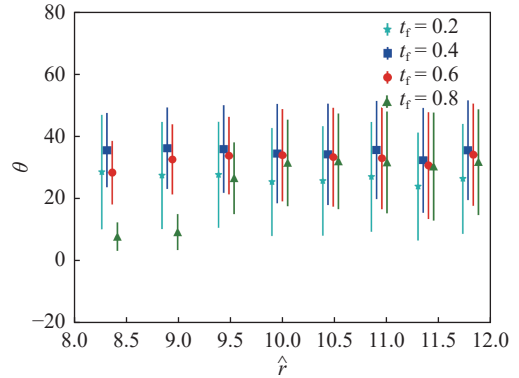


图 10 不同威尔逊流时间下的混和角 $|\theta|$ 随拟合起点 \hat{r} 值的变化，拟合终点为 12.6(在线彩图)

通过以上的计算表明，在存在动力学夸克的组态上，采用拓扑荷密度算符得到的粒子的质量与 η, η' 接近，与淬火近似下的赝标量胶球的质量差别较大。在研究赝标量胶球的相关性质时，我们应该采用格点上更常见的威尔逊圈的组合方式来进行。当然根据拓扑荷密度算符与赝标量介子的关系，也为我们提供了计算 η, η' 粒子相关性质的新方法。

4 总结

本工作介绍了格点 QCD 在研究胶球相关性质方面的一些进展，特别是中国格点组在这一领域取得的一些成果。基于当前的格点 QCD 研究结果，结合实验上的测量信息，我们认为 $f_0(1710)$ 更可能是一个标量胶球，或以标量胶球成分为主。为了得到更确定性的结果，一方面需要格点 QCD 上对轻介子性质进行全面和细致的研究，另一方面也需要实验上开展更精确的实验测量。另外，我们基于具有物理 π 介子质量的 $2+1$ 味动力学夸克的组态，分析了拓扑荷密度的两点关联函数，发现拓

扑荷密度算符关联函数通过单质量项拟合给出中间玻色子质量为 920(5)(10) MeV。通过两质量项拟合给出质量分别为 615(95) MeV, 918(160) MeV, 与物理的 η , η' 质量接近, 所得到的 η - η' 混合角 $|\theta| \sim (20^\circ \sim 30^\circ)$ 也在合理范围。我们的计算验证了在具有动力学夸克的组态上, 拓扑荷密度算符会耦合到 η 、 η' , 而不能直接给出赝标量胶球。因此, 为了在具有动力学夸克的格点 QCD 下研究和计算赝标量胶球, 需要构建单介子算符、介子-介子算符及纯胶子算符的算符集合, 通过对算符集合做变分法, 得到赝标量道的整体谱学信息。从各个态与算符的耦合情况来分析和判别赝标量胶球, 这也是我们即将开展的研究工作。

参考文献:

- [1] JAFFE R L, JOHNSON K. *Phys Lett B*, 1976, 60: 201.
- [2] CARLSON C E, HANSSON T H, PETERSON C. *Phys Rev D*, 1983, 27: 1556.
- [3] CORNWALL J M, SONI A. *Phys Lett B*, 1983, 120: 431.
- [4] HOU W S, SONI A. *Phys Rev D*, 1984, 29: 101.
- [5] NARISON S. *Z Phys C*, 1984, 26: 209.
- [6] FORKEL H. *Phys Rev D*, 2005, 71: 054008.
- [7] NARISON S. *Phys Rev D*, 2006, 73: 114024.
- [8] PIMIKOV A, LEE H J, KOICHELEV N, et al. *Phys Rev D*, 2017, 96(11): 114024.
- [9] PIMIKOV A, LEE H J, KOICHELEV N, et al. *Phys Rev D*, 2017, 95(7): 071501.
- [10] MORNINGSTAR C J, PEARDON M. *Phys Rev D*, 1999, 60: 034509.
- [11] CHEN Y, ALEXANDRU A, DONG S J, et al. *Phys Rev D*, 2006, 73: 014516.
- [12] CLOSE F E, ZHAO Q. *Phys Rev D*, 2005, 71: 094022.
- [13] GIACOSA F, GUTSCHE T, LYUBOVITSKIJ V E, et al. *Phys Rev D*, 2005, 72: 094006.
- [14] CHENG H Y, CHUA C K, LIU K F. *Phys Rev D*, 2006, 74: 094005.
- [15] ZHANG R, SUN W, CHEN Y, et al. *Phys Lett B*, 2022, 827: 136960.
- [16] WU X G, WU J J, ZHAO Q, et al. *Phys Rev D*, 2013, 87(1): 014023.
- [17] ABLIKIM M, ACHASOV M N, AN L, et al. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 072002.
- [18] ABLIKIM M, ACHASOV M N, ADLARSON P, et al. *Eur Phys J C*, 2020, 80(8): 746.
- [19] ABLIKIM M, ACHASOV M N, AI X C, et al. *Phys Rev D*, 2016, 93(11): 112011.
- [20] ABLIKIM M, ACHASOV M N, ADLARSON P, et al. *Phys Rev Lett*, 2022, 129(4): 042001.
- [21] ABLIKIM M, ACHASOV M N, ADLARSON P, et al. *Chin Phys C*, 2020, 44(4): 040001.
- [22] ABAZOV V M, ABBOTT B, ACHARYA B S, et al. *Phys Rev Lett*, 2021, 127(6): 062003.
- [23] GATTRINGER C, LANG C B. *Quantum Chromodynamics on the Lattice: Volume 788[M]*. Berlin: Springer, 2010.
- [24] ATHENODOROU A, TEPER M. *JHEP*, 2021, 12: 082.
- [25] BALI G S, BOLDER B, EICKER N, et al. *Phys Rev D*, 2000, 62: 054503.
- [26] RICHARDS C M, IRVING A C, GREGORY E B, et al. *Phys Rev D*, 2010, 82: 034501.
- [27] SUN W, GUI L C, CHEN Y, et al. *Chin Phys C*, 2018, 42(9): 093103.
- [28] CHEN F, JIANG X, CHEN Y, et al. arXiv: 2111.11929, 2021.
- [29] JIANG X, SUN W, CHEN F, et al. arXiv: 2205.12541, 2022.
- [30] BRETT R, BULAVA J, DARVISH D, et al. *AIP Conf Proc*, 2020, 2249(1): 030032.
- [31] LIANG J, CHEN Y, CHIU W F, et al. *Phys Rev D*, 2015, 91(5): 054513.
- [32] GUI L C, CHEN Y, LI G, et al. *Phys Rev Lett*, 2013, 110(2): 021601.
- [33] ABLIKIM M, ACHASOV M N, ALBAYRAK O, et al. *Phys Rev D*, 2013, 87(9): 092009.
- [34] ABLIKIM M, ACHASOV M N, AHMED S, et al. *Phys Rev D*, 2018, 98(7): 072003.
- [35] YANG Y B, GUI L C, CHEN Y, et al. *Phys Rev Lett*, 2013, 111(9): 091601.
- [36] ABLIKIM M, ACHASOV M N, ADLARSON P, et al. *Phys Rev D*, 2022, 105(7): 072002.
- [37] GUI L C, DONG J M, CHEN Y, et al. *Phys Rev D*, 2019, 100(5): 054511.
- [38] FUKAYA H, AOKI S, COSSU G, et al. *Phys Rev D*, 2015, 92(11): 111501.
- [39] DIMOPOULOS P, HELMES C, JOST C, et al. *Phys Rev D*, 2019, 99(3): 034511.
- [40] BLUM T, BOYLE P A, CHRIST N H, et al. *Phys Rev D*, 2016, 93(7): 074505.
- [41] ALEXANDROU C, ATHENODOROU A, JANSEN K. *Phys Rev D*, 2015, 92(12): 125014.
- [42] LÜSCHER M. *JHEP*, 2010, 08: 071.
- [43] ZYLA P, BARNETT R M, BERINGER J, et al. *PTEP*, 2020, 2020(8): 083C01.
- [44] BALI G S, BRAUN V, COLLINS S, et al. *JHEP*, 2021, 08: 137.

The Study of Glueball in Lattice QCD

SU Yue¹, GUI Longcheng^{1,†}, LIANG Jian^{2,3}

(1. Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410000, China;

2. Guangdong Provincial Key Laboratory of Nuclear Science, Institute of Quantum Matter,
South China Normal University, Guangzhou 510006, China;

3. Guangdong-Hong Kong Joint Laboratory of Quantum Matter, Southern Nuclear Science Computing Center,
South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The study of glueballs is an important topic in hadron physics, and the search for glueball states is one of the major goal of the Beijing Spectrometer III(BESIII) experiment. Lattice quantum chromodynamics, as a first-principle approach to examine the non-perturbative characteristics of the strong interaction, is an essential theoretical tool to investigate the glueball problem. Recent development of lattice studies on glueballs and possible experimental candidates are reviewed in this article. In addition, the topological charge density of the gauge field can be used as an interpolation field operator to study the properties of pure-gauge pseudoscalar glueball, but only the contributions of the light pseudoscalar mesons η and η' are observed in the correlation function of topological charge density operator on gauge configurations with dynamical sea quarks u, d and s . Our result implies that, in the presence of dynamical sea quarks, one needs to construct more different types of operators to study the pseudoscalar glueball.

Key words: lattice QCD; glueball; topological charge; flavor singlet pseudoscalar meson

Received date: 07 Sep. 2022; **Revised date:** 27 Oct. 2022

Foundation item: National Natural Science Foundation of China(12175036, 12175073); Guangdong Major Project of Basic and Applied Basic Research, China(2020B0301030008); Foundation of Hunan Provincial Department of Education(20A310)

† **Corresponding author:** GUI Longcheng, E-mail: guilongcheng@hunnu.edu.cn