

文章编号: 1007-4627(2018)04-0487-06

# 有限玻色子系统中的激发态量子相变

董文婷, 姜鹤, 王晓霞, 张宇<sup>†</sup>

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 辽宁 大连 116029)

**摘要:** 为了探讨原子核系统中存在激发态量子相变的可能性, 在相互作用玻色子模型框架下对有限玻色子系统 中的激发态量子相变现象进行唯象分析, 特别是针对角动量和有限  $N$  效应如何影响  $U(5)$ - $SU(3)$  和  $SU(3)$ - $O(6)$  过渡区中的激发态量子相变行为进行了系统研究。结果表明, 低角动量振动谱中的激发态量子相变特征 在现实玻色子数情况下可以很好地保持, 但随着角动量增加相变特征逐渐消失。

**关键词:** 激发态量子相变; 相互作用玻色子模型; 有限  $N$  效应; 有效序参量

**中图分类号:** O571.42      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.11804/NuclPhysRev.35.04.487

## 1 引言

从形状相变(基态量子相变)角度来认识中重质量原子核结构演化规律得到了核物理学家们的广泛关注<sup>[1]</sup>。尽管量子相变概念严格定义在零温无穷多粒子(大  $N$  极限)系统, 然而已有的研究表明, 相变的主要特征在原子核这样的有限微观系统中可以很好地保持<sup>[2]</sup>。研究原子核形状相变的理论工具包括各种核结构模型方法, 如相互作用玻色子模型<sup>[3]</sup>、玻尔-莫特森集体模型<sup>[4]</sup>、密度泛函理论<sup>[5]</sup>和各种截断壳模型方法<sup>[6-7]</sup>等。最近, 激发态量子相变现象引起理论物理学家们相当程度上的关注<sup>[8]</sup>。与随系统哈密顿量中的控制参数(相互作用强度)改变而发生的基态量子相变不同, 激发态量子相变现象主要表现为系统的激发态性质随激发能增加发生突变<sup>[8]</sup>, 同时系统中的激发态量子相变又深深植根于基态量子相变, 甚至可以看出是基态相变现象在激发态上的延伸。代数方法为研究基态量子相变和激发态量子相变提供了方便的模型框架, 其中最著名的例子就是用来描述原子核集体结构的相互作用玻色子模型<sup>[2]</sup>和描述分子转振激发的振子模型<sup>[9]</sup>。量子多体系统激发态量子相变的首个证据也是在非刚性分子的转振谱中找到的<sup>[10]</sup>。最近研究发现, 稀土区形变核素中可能存在着轴对称到三轴形变的激发态量子相变现象, 称之为雅可比型激发态量子相变<sup>[11]</sup>。另外, 有关相互作用玻色子模型的理论研究也表明, 不同类型基态量子相变在大  $N$  极限下均有与之对应的激发态量子相变<sup>[12]</sup>。鉴于相互作用玻色子模型非常成功地描述了原子核系统中的各种形状相

变现象<sup>[1]</sup>, 因此该模型在大  $N$  极限下表现出的丰富激发态量子相变现象也很可能存在于原子核系统。然而, 由于原子核是一个有限多体系统, 其中的有限  $N$  效应和角动量效应对核结构性质的演化有着非常大的影响, 故在相互作用玻色子模型框架下探讨有限  $N$  效应以及角动量对激发态量子相变的影响是非常必要的。

本文的主要目的就是在相互作用玻色子模型框架下对  $U(5)$ - $SU(3)$  和  $SU(3)$ - $O(6)$  过渡区中的谱性质进行分析, 特别是分析激发态量子相变参数区域中各种力学量(有效序参量)随激发能变化的演化特征, 据此研究角动量和有限  $N$  效应对激发态量子相变现象的影响, 为进一步研究形变偶偶核低激发结构(对应有限玻色子系统)中的激发态量子相变提供唯象理论基础。

## 2 模型哈密顿量与量子相变的平均场分析

相互作用玻色子模型哈密顿量由两类玻色子算符来构造, 即  $J^\pi = 0^+$  的  $s$  玻色子和  $J^\pi = 2^+$  的  $d$  玻色子, 其分别对应原子核中角动量配成 0 和 2 的价核子对<sup>[3]</sup>。我们在本文中考虑常  $Q$  形式哈密顿量<sup>[2]</sup>, 具体形式如下:

$$\hat{H}(\eta, \chi) = \varepsilon \left[ (1-\eta)\hat{n}_d - \frac{\eta}{4N} \hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x \right], \quad (1)$$

其中,

$$\hat{Q}^x = (d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})^{(2)} + \chi (d^\dagger \tilde{d})^{(2)} \quad (2)$$

是四极算符;  $\eta$  和  $\chi$  为控制参数, 其取值范围分别为  $\eta \in [0, 1]$  以及  $\chi \in [-\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2]$ ; 另外,  $\varepsilon$  为整体标

收稿日期: 2018-10-09; 修改日期: 2018-11-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11875158, 11375005)

作者简介: 董文婷(1992-), 女, 山东济南人, 硕士研究生, 从事原子核结构研究; E-mail: [wenting\\_physics@163.com](mailto:wenting_physics@163.com)

<sup>†</sup> 通信作者: 张宇, E-mail: [dlzhangyu\\_physics@163.com](mailto:dlzhangyu_physics@163.com)

度参数, 为了方便讨论, 我们在具体计算中选取  $\varepsilon=1$ . 容易证明<sup>[12]</sup>, 系统哈密顿量 (1) 式在  $\eta=0$  时具有  $U(5)$  动力学对称性, 即系统处于  $U(5)$  对称性极限; 当  $\eta=1$  以及  $\chi=0$  时, 系统处于  $O(6)$  对称性极限; 当  $\eta=1$  以及  $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$  时, 系统处于  $SU(3)$  极限; 当  $\eta = 1$  以及  $\chi = \frac{\sqrt{7}}{2}$  时, 系统处于  $\overline{SU(3)}$  极限. 这些动力学对称性极限分别对应不同原子核形状 (形变)<sup>[3]</sup>. 具体来说,  $U(5)$  对应球形,  $SU(3)$  和  $\overline{SU(3)}$  分别对应长椭球和扁椭球, 而  $O(6)$  则对应轴不稳定形状 (三轴形变). 为了对相互作用玻色子模型中的基态量子相变类型进行分类和定义, 需要对哈密顿量所对应的经典势能位形进行平均场分析. 因此, 需要引进所谓相干态函数<sup>[3]</sup>

$$|\beta, \gamma, N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!(1+\beta^2)^N}} [s^\dagger + \beta \cos \gamma d_0^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma (d_2^\dagger + d_{-2}^\dagger)]^N |0\rangle. \quad (3)$$

其中:  $\beta$  与  $\gamma$  对应于传统上描述原子核四极形变的形变参数<sup>[3]</sup>. 进一步可以计算与式 (1) 中的哈密顿量所对应的单玻色子势能面, 具体计算结果如下:

$$V_s(\eta, \chi, \beta, \gamma) = \frac{1}{N} \langle \beta, \gamma, N | H | \beta, \gamma, N \rangle_{N \rightarrow \infty} \quad (4)$$

$$= (1-\eta) \frac{\beta^2}{1+\beta^2} - \frac{\eta}{4(1+\beta^2)^2} \times [4\beta^2 - 4\sqrt{\frac{2}{7}} \chi \beta^3 \cos 3\gamma + \frac{2}{7} \chi^2 \beta^4].$$

为了确定系统基态对应的四极形变, 需要求解在给定的参数  $\eta$  和  $\chi$  时势能函数极小值点所对应的形变参数  $\beta$  和  $\gamma$  的值, 表示为  $\beta_e$  和  $\gamma_e$ , 进而单玻色子基态能则定义为  $E_g = V_s(\eta, \chi, \beta_e, \gamma_e)$ . 可以证明, 式 (4) 中的势能函数只会生成两种极值情形, 分别对应于  $\gamma_e = 0^\circ$  和  $\gamma_e = 60^\circ$ , 其中  $\gamma_e = 60^\circ$  情形可以用  $\gamma_e = 0^\circ$  且  $\beta = -\beta_e$  来等价描述, 因此后面仅选取  $\gamma = 0^\circ$  以方便统一表述. 在该条件下,  $\beta_e = 0$ ,  $\beta_e > 0$  和  $\beta_e < 0$  分别对应球形、长椭球和扁椭球形状; 而轴不稳定形状 (三轴形变) 则对应具有两个简并势能极小值情形, 即  $E_g(\beta_e) = E_g(-\beta_e)$ .

上面这些对应从平均场层面回答了为什么相互作用玻色子模型中的不同对称性极限对应不同的四极形变. 例如, 当势能函数式 (4) 在控制参数定在  $\eta = 1$  且  $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$  时 (对应  $SU(3)$  极限), 可以求解出系统的基态位于长椭球形变点 ( $\gamma_e = 0^\circ$ ,  $\beta_e > 0$ ). 因此,  $\beta_e$  可以作为经典序参量来特征原子核的不同形状以及相应形状相变. 此外, 也可以从基态能角度来鉴别不同级次形状相变. 如假设  $x$  代表哈密顿量的控制参数, 对于二

级相变, 系统的基态能  $E_g$  及其一阶导数  $\frac{\partial E_g}{\partial x}$  随  $x$  变化是连续的, 而二阶导数  $\frac{\partial^2 E_g}{\partial x^2}$  是不连续的; 对于一级形变, 基态能本身是  $x$  的连续函数, 而一阶导数  $\frac{\partial E_g}{\partial x}$  是不连续的<sup>[2]</sup>. 基于这样的标准, 可以证明哈密顿量 (1) 描述的系统分别在  $\eta$  和  $\chi$  两个参数变化方向存在着一级相变<sup>[13]</sup>. 其中, 沿着  $\eta$  方向的一阶相变临界点在大  $N$  极限下可以表示为

$$\eta_c = \frac{14}{28 + \chi^2}, \quad (5)$$

这里  $\chi \in [-\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2]$ ; 而沿着  $\chi$  方向的一阶相变临界点可以表示为  $\chi_c = 0$ , 其中  $\eta \in (0.5, 1]$ . 值得提及的是,  $U(5)$ - $O(6)$  相变是唯一一个由哈密顿量 (1) 来描述的二阶量子相变, 该相变临界点 ( $\eta_c = 0.5, \chi = 0$ ) 同时对应长椭球、扁椭球和球形三相共存点<sup>[13]</sup>. 上述这些形状相和相应形状相变对应的二维参数空间可以映射成所谓扩展的 Casten 三角形形状相图 (如图 1 所示). 其中, 三角形的三个顶点代表精确的动力学对称性极限, 进而对应球形、长椭球和扁椭球三种典型原子核形状; 三角形的三条边对应不同形状之间的量子相变, 而三角形中线对应球形到轴不稳定形状相变 ( $U(5)$ - $O(6)$  相变); 三角形内部代表着各种动力学对称性混合, 进而对应着多种形状相竞争和共存情形. 由于势能函数式 (4) 具有  $Z_2$  对称性<sup>[2]</sup>, 即

$$V_s(\eta, \chi, \beta, \gamma) = V_s(\eta, -\chi, -\beta, \gamma), \quad (6)$$

因此, 后面仅针对  $\chi < 0$  的情形进行详细讨论.

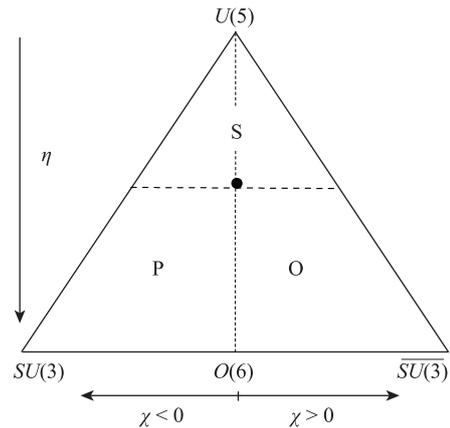


图 1 扩展的 Casten 三角形相图  
其中虚线代表一级相变点, 而 S, P 和 O 分别代表着球形、长椭和扁椭球, 黑点代表三相点 (Triple point)。

已有分析表明<sup>[8, 12]</sup>, 相互作用玻色子模型中的不同类型基态量子相变在大  $N$  极限下均有与之对应的激发态量子相变, 而出现激发态量子相变的参数区域与形状相图中的形变区对应的参数区域 (标记为 P 和 O 的

区域)是重合的。从上面的讨论中可以看到,利用相干态方法在平均场层面相对容易对基态量子相变进行分类,但对激发态量子相变进行分类则需要借助复杂的半经典分析<sup>[8, 14-16]</sup>。除了利用势能分析,人们还可以借助分析对相变敏感的物理量—有效序参量的演化行为来讨论系统的量子相变现象<sup>[2]</sup>。我们在本文中主要采用有效序参量方法来探讨激发态量子相变,据此讨论其中的角动量效应和有限  $N$  效应。我们将针对  $U(5)$ - $SU(3)$  和  $SU(3)$ - $O(6)$  两个过渡区中的激发态量子相变进行讨论。其中,  $U(5)$ - $SU(3)$  过渡区对应的控制参数取值为  $\chi = \sqrt{7}/2$  以及  $\eta \in [0, 1]$ , 而  $SU(3)$ - $O(6)$  过渡区对应的参数取值为  $\eta = 1$  以及  $\chi \in [-\sqrt{7}, 0]$ 。为了方便标记和区分这两个过渡区中的激发态量子相变,下面分别称之为  $U(5)$ - $SU(3)$  激发态量子相变和  $SU(3)$ - $O(6)$  激发态量子相变。需要指出,大  $N$  极限(经典极限)下的  $U(5)$ - $SU(3)$  相变为一级量子相变,而  $SU(3)$ - $O(6)$  相变仅为两相之间的过渡演化(Crossover)。

从平均场的角度来看<sup>[11-12]</sup>,激发态量子相变主要源于势能结构突变。这里的势能结构突变指的是势能函数中存在着鞍点<sup>[11]</sup>,束缚在鞍点能以下的激发态具有稳定的性质,而鞍点能以上的势阱宽度突然增加,导致激发态的性质突变,即激发态量子相变,进而鞍点能也就可以定义为相变临界能。值得提及的是,基态相变点势能面的鞍点能附近存在球形极小值点,进而可能出现两相共存现象。可以推得,具有突变结构的势能函数只有当控制参数位于相变点后的形变区时才出现<sup>[12]</sup>。有关激发态量子相变定义以及激发态相变与基态相变关联的全面信息可以参考文献<sup>[8, 12]</sup>。原则上可以根据方程(4)中的势能函数推算出鞍点能与控制参数的关系,进而计算出经典极限下激发态量子相变发生的临界激发能的位置。根据文献<sup>[12]</sup>中的推导,可以得到大  $N$  极限下  $U(5)$ - $SU(3)$  激发态量子相变的临界激发能与控制参数之间的函数关系为

$$f_{\eta}^b = \frac{\tilde{\beta}^2(16\eta + 9\eta\tilde{\beta}^2 + 4\sqrt{2}\eta\tilde{\beta} - 8\tilde{\beta}^2 - 8)}{8(1 + \tilde{\beta}^2)^2}, \quad \eta_c < \eta \leq 1, \quad (7)$$

其中  $\tilde{\beta}$  由方程

$$\eta = \frac{4\tilde{\beta}^2 + 4}{\tilde{\beta}^2 + 3\sqrt{2}\tilde{\beta} + 8 - \sqrt{2}\tilde{\beta}^3} \quad (8)$$

来决定;而  $SU(3)$ - $O(6)$  激发态量子相变临界激发能可以类似得到:

$$f_{\chi}^c = \frac{-\chi\sqrt{14+\chi^2}}{14}, \quad -\frac{\sqrt{7}}{2} \leq \chi \leq 0. \quad (9)$$

因此,当参数  $\eta$  和  $\chi$  的值一定时,临界激发能  $f_{\eta}^b$  和  $f_{\chi}^c$  的值也随之由式(7)和(9)给定。平均场分析的结果告诉我们,临界能以下的激发态动力学特征在大  $N$  极限下<sup>[12]</sup>应该与临界能以上的激发态特征完全不同,而激发态量子相变就表现为具有不同动力学特征的激发态之间的演化。接下来,我们将进一步分析这两个过渡区中的激发态量子相变的有限  $N$  修正和角动量效应,同时检验平均场给出的大  $N$  极限下的临界激发能式(7)和(9)的准确性。

### 3 $U(5)$ - $SU(3)$ 激发态量子相变

对于相互作用玻色子模型,  $d$  玻色子占有率(对应四极价核子对占有率)常用来作为有效序参量来检验系统中的量子相变<sup>[2, 8, 12]</sup>。对于给定角动量  $L$  的激发态,  $d$  玻色子占有率定义为

$$\rho = \frac{\langle L | \hat{n}_d | L \rangle}{N}. \quad (10)$$

我们选取  $\eta = 0.7$  以及  $N = 15$  的参数情形作为例子来检验  $U(5)$ - $SU(3)$  激发态量子相变中的有效序参量  $\rho$  的演化行为。从图 2(a) 中可以看到,  $\rho$  在  $L = 0$  的振动谱中随激发能演化的行为清晰地展现出激发态量子相变特征。这里的振动能谱指的是具有相同角动量激发态能谱。具体来说,有效序参量  $\rho$  随着激发能增加呈现出一个震荡的演化行为,但其整体变化趋势在低激发能时是递减的,而当越过临界激发能  $f_{\eta}^b$  后,  $\rho$  的演化行为迅速转变为整体上升。这样一个随激发能增加突变的演化行为正是系统激发态量子相变的体现。同时可以看到,平均场预言的临界激发能准确地标记了激发态量子相变的位置。这意味着与形状相变(基态量子相变)一样<sup>[2]</sup>,激发态量子相变的主要特征即使在有限玻色子系统 ( $N \sim 15$ ) 中也能够很好地保持。从图 2(b) 和图 2(c) 可以进一步看到,  $L = 4$  的振动谱中激发态量子相变特征也是非常明显的,但当  $L = 10$  时,其振动激发谱中的激发态量子相变特征明显减弱,体现了角动量效应对  $U(5)$ - $SU(3)$  激发态量子相变的影响。

上面的分析证实了  $d$  玻色子占有率确实可以用来鉴别有限玻色子系统中的激发态量子相变。为了进一步检验  $U(5)$ - $SU(3)$  激发态量子相变中的不同激发态类型,我们接下来考虑几个与转动带结构相关的力学量的演化特征<sup>[17]</sup>。转动惯量  $J$  在  $\beta$  振动带中与带内激发能的关系可以表示为

$$E(L) - E(0) = \frac{L(L+1)}{2J}. \quad (11)$$

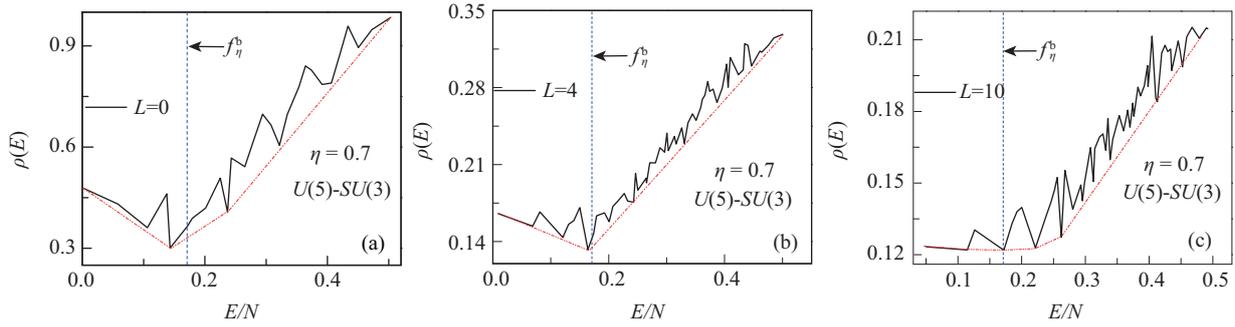


图 2 给定角动量振动谱中  $d$  玻色子占有率  $\rho$  随激发能演化的行为  
其中  $\rho$  值涨落的最低点连线 (虚线) 用于展示  $\rho$  的整体演化趋势, 而竖直虚线标记由方程 (7) 求解出的大  $N$  极限下临界激发能的位置。

因此, 当  $L = 2$  和  $L = 4$  时可以得到转动惯量的表达式

$$J_2^\beta(i) = \frac{3}{E(2_j) - E(0_i)}, \quad J_4^\beta(i) = \frac{10}{E(4_k) - E(0_i)}, \quad (12)$$

其中  $i, j, k = 1, 2, 3, \dots$ , 而  $E(L_{i'})$  代表第  $i'$  个角动量为  $L$  的激发态能级, 且这些能级均属于建立在第  $i$  个  $L = 0$  态上的  $\beta$  振动带。同理, 可以类似定义  $\gamma$  振动带中的转动惯量<sup>[17]</sup>。当  $L = 3$  和  $L = 4$  时可以得到  $\gamma$  振动带中的转动惯量的表示式为

$$J_3^\gamma(i) = \frac{3}{E(3_j) - E(2_i)}, \quad J_4^\gamma(i) = \frac{10}{E(4_k) - E(2_i)}, \quad (13)$$

其中各个能级  $E(L_{j'})$  均属于建立在第  $i$  个  $L = 2$  态上的  $\gamma$  振动带。我们还可以相应地定义典型能级比

$$R_{4/2}^\beta = \frac{E(4_k) - E(0_i)}{E(2_j) - E(0_i)}, \quad R_{4/3}^\gamma = \frac{E(4_k) - E(2_i)}{E(3_j) - E(2_i)}. \quad (14)$$

在上面转动惯量和能级比的定义中, 对同一转动带的能级挑选主要考虑同一带内相邻转动态之间具有较强的电四极跃迁几率这一依据。对于理想轴对称转动结构, 同一带内转动惯量为常数, 且转动能满足  $L(L+1)$  规律。

容易得到, 理想转动结构中有  $J_2^\beta = J_4^\beta$  和  $J_3^\gamma = J_4^\gamma$ , 并且有  $R_{4/2}^\beta = 3.33$  以及  $R_{4/3}^\gamma = 2.33$ 。这些特征可以用来表征  $U(5)$ - $SU(3)$  激发态量子相变中的  $SU(3)$  准动力学对称性的保持和破坏程度<sup>[18]</sup>。

基于前面这些定义, 本文计算了激发态量子相变中转动惯量和能级比随激发能的演化行为。从图 3(a) 和图 3(b) 中可以看到, 低激发态时 ( $E/N < 0.1$ ) 近似关系  $J_2^\beta \approx J_4^\beta$  和  $J_3^\gamma \approx J_4^\gamma$  确实成立, 而在高激发态这种近似关系式明显破坏。这意味低激发态时体系保持着近理想的轴对称转动带结构, 其对应  $SU(3)$  准动力学对称性。这种近似的理想轴对称转动带结构可以由图 3(c) 中低激发态能级比关系  $R_{4/2}^\beta \approx 3.33$  以及  $R_{4/3}^\gamma \approx 2.33$  进一步肯定。与之比较, 高激发态时 ( $E/N > E_c = f_\eta^b$ ) 上述这些近似关系不再成立, 意味着  $SU(3)$  准动力学对称性明显破坏。这些结果一定程度上表明  $U(5)$ - $SU(3)$  激发态量子相变可以描述为轴对称结构到三轴形变结构的激发态量子相变。需要指出的是, 系统哈密顿量 ( $\eta = 0.7$ ) 已经明确偏离  $SU(3)$  极限, 所以激发态量子相变中低激发态中的轴对称性结构是由  $SU(3)$  准动力学对称性来保证的, 而高激发态中的三轴结构则对应着  $SU(3)$  和  $U(5)$  动力学对称性混合<sup>[11]</sup>。

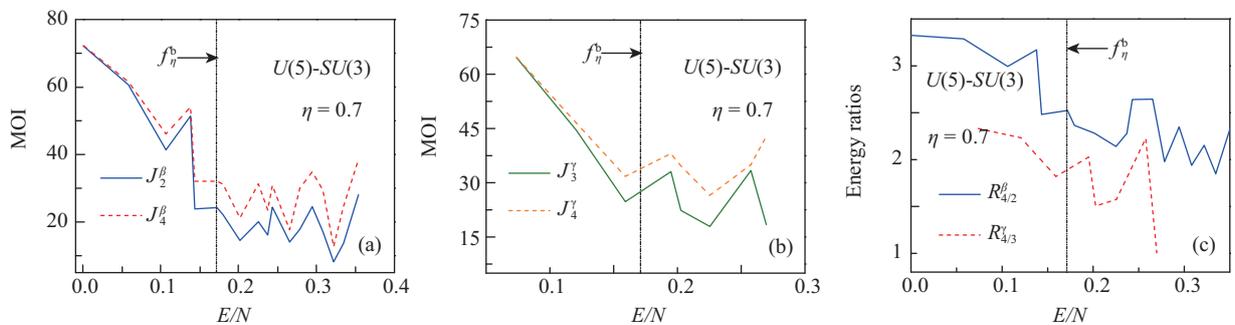


图 3 (在线彩图) 转动惯量及相关能级比随激发能的演化  
其中, 竖直虚线标记由方程 (7) 求解出的大  $N$  极限下临界激发能的位置。(a) 转动惯量 (MOI)  $J_2^\beta$  和  $J_4^\beta$  随激发能演化的行为; (b)  $J_3^\gamma$  和  $J_4^\gamma$  随激发能演化的行为; (c) 能级比  $R_{4/2}^\beta$  以及  $R_{4/3}^\gamma$  随激发能演化的行为。

### 4 $SU(3)-O(6)$ 激发态量子相变

下面我们选取参数点  $\chi = -0.6$  作为例子来讨论  $SU(3)-O(6)$  激发态量子相变。我们首先计算了有效序参量  $\rho$  随激发能的演化行为。从图 4 中可以看到, 有效序参量  $\rho$  的演化行为表明  $L = 0$  的振动激发态在临

界能  $E/N = f_\chi^c$  附近发生了激发态量子相变, 但与  $U(5)-SU(3)$  激发态量子相变相比,  $SU(3)-O(6)$  激发态量子相变特征明显减弱, 并且随着角动量增加, 激发态量子相变特征迅速消失(参看图 4(c)  $L=10$  情形), 这一点可能与经典极限下  $SU(3)-O(6)$  基态演化本身就是一个 Crossover 有关<sup>[11]</sup>。

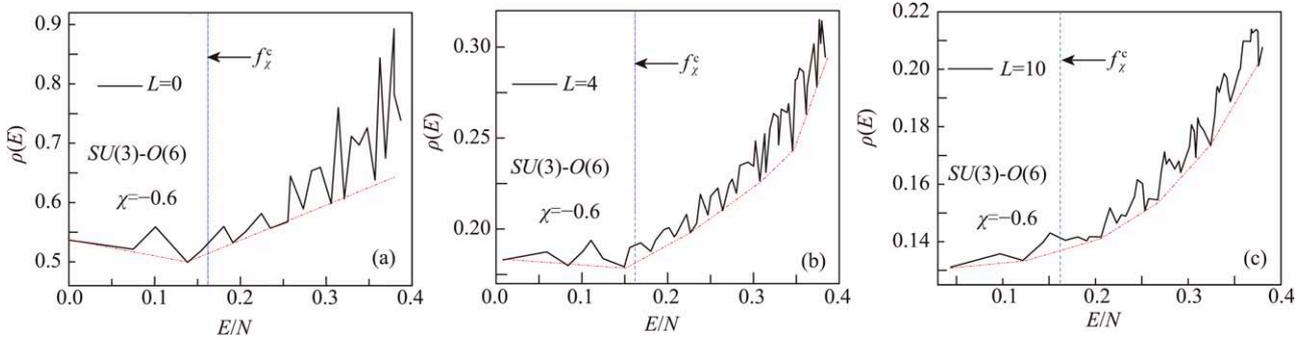


图 4 给定角动量振动谱中  $d$  玻色子占有率  $\rho$  随激发能演化的行为  
其中  $\rho$  值涨落的最低点连线(虚线)用于展示  $\rho$  的整体演化趋势, 而竖直虚线标记由方程 (9) 求解出的大  $N$  极限下临界激发能的位置。

为了进一步考察  $SU(3)-O(6)$  激发态量子相变中的不同激发态类型, 我们同样分析了上一节定义的转动惯量和典型能级比随振动激发能的演化行为。从图 5 中可以看到,  $J_2^\beta \approx J_4^\beta$  和  $J_3^\gamma \approx J_4^\gamma$  的近似关系式在低激发态时 ( $E/N < f_\chi^c$ ) 同样成立, 同时有  $R_{4/2}^\beta \approx 3.33$  以及  $R_{4/3}^\gamma \approx 2.33$ , 但上述关系式在较高激发态时迅速破坏。这表明该类型激发态量子相变中的低激发态同样地保持着很好的  $SU(3)$  准动力学对称性, 进而对应较为理想的轴对称转动带结构, 而随着激发能增加, 激发

态中的轴对称转动结构转变成三轴转动。这里的三轴转动指的是系统对  $SU(3)$  准动力学对称性的偏离, 这种偏离主要由与  $\gamma$  不稳定转动(三轴转动)对应的  $O(5)$  动力学对称性带来的, 而  $O(5)$  对称性作为子动力学对称性包含在  $U(5)$  和  $O(6)$  对称性极限中。所以,  $SU(3)-O(6)$  和  $U(5)-SU(3)$  过渡区中高激发态的三轴结构分别由  $O(6)$  和  $U(5)$  动力学成分的混入带来的。此外, 三轴转动的几何图像也可以从与势能函数对应的二维  $(\beta, \gamma)$  关联图中看出, 这一点可以参考文献<sup>[11]</sup>。

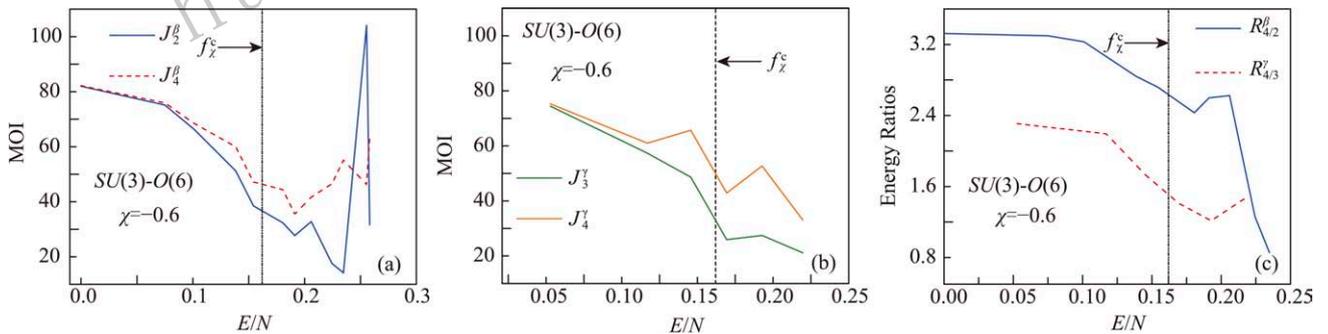


图 5 转动惯量及相关能级随激发能的演化  
其中, 竖直虚线标记由方程 (7) 求解出的大  $N$  极限下临界激发能的位置。(a) 转动惯量(MOI)  $J_2^\beta$  和  $J_4^\beta$  随激发能演化的行为; (b)  $J_3^\gamma$  和  $J_4^\gamma$  随激发能演化的行为; (c) 能级比  $R_{4/2}^\beta$  以及  $R_{4/3}^\gamma$  随激发能演化的行为。

### 5 结论

原子核形状(基态)相变是近年来核结构研究的热点问题, 无论相关理论研究还是实验研究均得到了较为广泛的关注<sup>[1]</sup>。然而, 与原子核形状相变紧密联系的激发态量子相变现象的相关研究仍有待深入开展, 特别是相关理论研究已经表明各种形状相变均有与之对应的激发

态量子相变<sup>[8, 12]</sup>。本文在相互作用玻色子模型框架下对  $U(5)-SU(3)$  和  $SU(3)-O(6)$  两个过渡区中的激发态量子相变展开讨论, 着重分析了角动量效应和有限  $N$  效应对激发态量子相变的影响。结果表明,  $d$  玻色子占有率、有效转动惯量以及相关能级随激发能的演化行为都肯定了这两个过渡区中存在着轴对称转动结构到三轴

转动结构的激发态量子相变, 且相变的主要特征在低角动量振动谱中即使在现实玻色子数情况下 ( $N \sim 15$ ) 仍然能很好地保持, 但随着角动量增加则迅速变弱甚至消失。之前研究揭示了稀土区形变核的晕带转动谱中普遍存在着雅可比型激发态量子相变现象<sup>[11]</sup>, 而本文的理论分析表明原子核系统振动激发谱中也非常可能存在着丰富的激发态量子相变现象。同时, 可以看到鉴别激发态量子相变涉及到较多的集体激发态结构, 进而找到容易观测且对激发态量子相变更为敏感的有效序参量是非常重要的。另外, 有关原子核激发态量子相变的微观模型分析仍有待开展。

#### 参考文献:

- [1] CEJNAR P, JOLIE J, CASTEN R F. *Reviews of Modern Physics*, 2010, **82**: 2155.
- [2] IACHELLO F, ZAMFIR N V. *Physical Review Letter*, 2004, **92**: 212501.
- [3] IACHELLO F, ARIMA A. *The Interacting Boson Model*[M]. Cambridge, Cambridge University Press, 1987.
- [4] GREINER W, MARUHN J A. *Nuclear Models*[M]. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [5] LI Z P, NIKSIC T, VRETENAR D, *et al.* *Physical Review C*, 2009, **80**: 061301(R).
- [6] LUO Y A, ZHANG Y, MENG X F, *et al.* *Physical Review C*, 2009, **80**: 014311.
- [7] SUN Y, WALKER P M, XU F R, *et al.* *Physics Letter B*, 2008, **659**: 165.
- [8] CAPRIO M A, CEJNAR P, IACHELLO F. *Annals of Physics*, 2008, **323**: 1106.
- [9] IACHELLO F, LEVINE R D. *Algebraic Theory of Molecules*[M]. Oxford: Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [10] LARESE D, IACHELLO F. *Journal of Molecular Structure*, 2011, **1006**: 611.
- [11] ZHANG Y, IACHELLO F. *Physical Review C*, 2017, **95**: 061304(R).
- [12] ZHANG Y, ZUO Y, PAN F, *et al.* *Physical Review C*, 2016, **93**: 044302.
- [13] JOLIE J, CEJNAR P, CASTEN R F, *et al.* *Physical Review Letter*, 2002, **89**: 182502.
- [14] CEJNAR P, STRANSKY P. *Physical Review E*, 2008, **78**: 031130.
- [15] STRANSKY P, MACEK M, CEJNAR P. *Annals of Physics*, 2014, **345**: 73.
- [16] STRANSKY P, MACEK M, LEVIATAN A, *et al.* *Annals of Physics*, 2015, **356**: 57.
- [17] MACEK M, DOBES J, CEJNAR P. *Physical Review C*, 2010, **82**: 014308.
- [18] MACEK M, DOBES J, CEJNAR P. *Physical Review C*, 2009, **80**: 014319.

## Excited-state Quantum Phase Transitions in the Finite- $N$ Boson System

DONG Wenting, JIANG He, WANG Xiaoxia, ZHANG Yu<sup>†</sup>

(*Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, Liaoning, China*)

**Abstract:** In this work, a phenomenological analysis of the excited-state quantum phase transitions (ESQPTs) in the finite- $N$  boson system has been carried out within the interacting boson model in order to reveal the possibility of finding ESQPTs in nuclear systems. Particularly, the angular momentum and finite- $N$  effects on the ESQPTs in the  $U(5)$ - $SU(3)$  and  $SU(3)$ - $O(6)$  transitional regions have been systematically investigated. The results indicate that the main features of ESQPTs can be well preserved even at a realistic boson number for small angular momentum but will gradually disappear as the angular momentum increases.

**Key words:** excited-state quantum phase transition; interacting boson model; finite- $N$  effect; effective order parameter

**Received date:** 9 Oct. 2018; **Revised date:** 20 Nov. 2018

**Foundation item:** National Natural Science Foundation of China(11875158,11375005)

<sup>†</sup> **Corresponding author:** ZHANG Yu, E-mail: [dlzhangyu\\_physics@163.com](mailto:dlzhangyu_physics@163.com).