

文章编号: 1007-4627(2017)03-0575-05

# 改进的 PNJL 模型下 QCD 的相图

唐占铎, 邵国运, 高雪艳, 高宁, 贺伟博

(西安交通大学理学院, 西安 710049)

**摘要:** Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio(PNJL) 模型是研究强相互作用物质性质的使用最为广泛的有效模型之一。在 PNJL 模型的基础上考虑了手征凝聚和 Polyakov 圈之间的纠缠作用, 并且引入了化学势修正的 Polyakov 有效势, 由此得到了化学势依赖的 entangled PNJL ( $\mu$ EPNJL) 模型。在平均场框架下的计算结果表明: 相较于原始的 PNJL 模型, 由  $\mu$ EPNJL 模型计算得到的临界点 (CEP) 朝着温度更高、化学势更小处移动, 并且手征对称性恢复相变和退禁闭相变在较大的化学势范围内都重合得很好。通过与 STAR 合作组在相对论重离子对撞机 (RHIC) 上进行的净质子数分布的测量结果相比, 可以发现, 通过适当的参数调节, 由  $\mu$ EPNJL 模型计算得到的 CEP 更加靠近实验预言的 CEP 可能存在的区域。

**关键词:** 强相互作用物质; 相图; 手征对称性恢复相变; 退禁闭相变; 临界点

**中图分类号:** O572.24<sup>+</sup>3      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.11804/NuclPhysRev.34.03.575

## 1 引言

近几十年来, 对强相互作用物质相图的探索一直是一个热点问题, 大量高能重离子碰撞实验已经在相对论重离子对撞机 (RHIC) 和大型强子对撞机 (LHC) 等大型粒子对撞机上实施。RHIC 的能量扫描已经暗示强相互作用物质相图上的临界点可能存在于 7.7 到 27 GeV 碰撞能量范围内<sup>[1]</sup>。未来几年中, 相关实验会进一步地探索临界点 (CEP) 的位置和相变边界, 比如在 RHIC 上进行的第二阶段能量扫描<sup>[2]</sup> 和在 NICA/FAIR/J-PARC<sup>[3]</sup> 上实施的一些实验项目等等。

理论上, 格点 QCD 是计算强相互作用物质最基本、最准确的方法, 它能很好地描述小化学势区域强相互作用物质的性质, 但是在高化学势处, 格点 QCD 会遇到费米子行列式的符号问题而导致其失效<sup>[4-6]</sup>。所以, 为了描述高化学势处强相互作用物质的性质, 文献中通常会使用一些有效模型。由于这些有效模型在形式上比较简单, 又包含 QCD 基本的对称性, 所以它们被广泛使用。其中, Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型<sup>[7,8]</sup>、Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) 模型<sup>[9,10]</sup> 和夸克介子耦合 (PQM) 模型<sup>[11,12]</sup> 是最成功的几种模型。

PNJL 模型是基于夸克自由度的有效模型, 它能描述 QCD 最主要的两种性质: 手征对称性破缺(恢复)效应和色禁闭(退禁闭)效应。包括 Witten 和 Coleman 在

内的一些研究者认为, 手征对称性恢复和退禁闭这两种现象有着共同的起源<sup>[13]</sup>, 也就是说这两种相变应该是重合的, 并且格点 QCD 在零化学势<sup>[14,15]</sup> 和虚化学势<sup>[16,17]</sup>, 实数<sup>[18]</sup> 和虚数同位旋化学势<sup>[19]</sup> 这些不存在符号问题的区域也证实了这两种相变的重合。然而在原始的 PNJL 模型中, 夸克手征凝聚和 Polyakov 圈之间的相互关联较弱, 导致两种相变温度差异比较大。另一方面, PNJL 模型中的 Polyakov 有效势模拟的是纯胶子场的贡献, 它是提取了零化学势下的纯杨-米尔斯格点模拟, 然而当存在动力学夸克时, PNJL 模型中的 Polyakov 有效势却没有考虑物质的贡献和其对于胶子的量子反作用。

在本文中, 我们从两方面对 PNJL 模型做出修正和改进, 建立化学势依赖的 entangled PNJL ( $\mu$ EPNJL) 模型, 并且利用  $\mu$ EPNJL 模型给出修正后的强相互作用物质相图并加以讨论。

## 2 模型介绍

我们使用  $\mu$ EPNJL 模型来描述夸克物质。首先, 我们介绍一下标准的 PNJL 模型, 有关 PNJL 模型的细节可以参考文献<sup>[9,10]</sup>。两味 PNJL 模型的拉格朗日量为

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}_0)q + G \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau q)^2 \right] - \mathcal{U}(\Phi[A], \bar{\Phi}[A], T), \quad (1)$$

收稿日期: 2016-11-10; 修改日期: 2017-05-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11305121); 高等学校博士学科点专项科研基金 (20130201120046); 陕西省自然科学基金基础研究计划 (2014JQ1012)

作者简介: 唐占铎(1992-), 男, 甘肃临夏人, 在读硕士, 从事理论物理研究, E-mail: [ttt1992@stu.xjtu.edu.cn](mailto:ttt1992@stu.xjtu.edu.cn)。

其中  $q$  表示两味三色夸克场  $u$  和  $d$ ;  $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_u, m_d)$  为味空间的对角矩阵; 协变导数定义为  $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu - i\mu_q \delta_\mu^0$ ; 胶子背景场  $A_\mu = \delta_\mu^0 A_0$  被假设为是均匀、静态的, 其中  $A_0 = gA_0^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2}$ ,  $\frac{\lambda^\alpha}{2}$  是  $SU(3)$  色生成元。

$\mathcal{U}[\Phi[A], \bar{\Phi}[A], T)$  为 Polyakov 有效势, 它是  $\Phi = (\text{Tr}_c L)/N_C$ ,  $\bar{\Phi} = (\text{Tr}_c L^\dagger)/N_C$  和温度  $T$  的函数, 其中  $L$  是一个色空间的矩阵

$$L(\mathbf{x}) = \mathcal{P} \exp \left[ i \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau A_4(\mathbf{x}, \tau) \right], \quad (2)$$

其中,  $A_4 = iA_0$ 。方便起见, 本文中一律把对  $L$  求迹之后得到的  $\Phi$  和  $\bar{\Phi}$  叫做 Polyakov 圈。根据文献[20], Polyakov 有效势  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T)$  可以采用如下形式:

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T, \mu)}{T^4} = -\frac{a(T)}{2} \bar{\Phi} \Phi + b(T) \ln [1 - 6\bar{\Phi} \Phi + 4(\bar{\Phi}^3 + \Phi^3) - 3(\bar{\Phi} \Phi)^2], \quad (3)$$

其中

$$a(T) = a_0 + a_1 \left( \frac{T_0}{T} \right) + a_2 \left( \frac{T_0}{T} \right)^2, \quad b(T) = b_3 \left( \frac{T_0}{T} \right)^3. \quad (4)$$

参数值设定为  $a_0=3.51$ ,  $a_1 = -2.47$ ,  $a_2=15.2$ ,  $b_3 = -1.75$  来还原纯规范区域格点 QCD 的计算结果[20]。

PNJL 模型中通常选取  $T_0 = 210 \text{ MeV}$ , 由此计算出零化学势处发生手征对称性恢复平滑过渡(crossover, 一种连续相变)和退禁闭平滑过渡的温度分别为  $T_\phi = 205.1 \text{ MeV}$  和  $T_\Phi = 172.7 \text{ MeV}$ [21], 而根据 Coleman-Witten 猜想, 这两种相变应该是重合的, 并且格点 QCD 的结果也显示了在零化学势处  $T_\phi \approx T_\Phi \approx (173 \pm 8) \text{ MeV}$ 。为了修正 PNJL 模型中两种相变不重合的缺陷, 文献[22]引入了依赖于 Polyakov 圈  $\Phi$  和  $\bar{\Phi}$  的有效四夸克顶点  $G(\Phi)$ :

$$G(\Phi) = G[1 - \alpha_1 \Phi \bar{\Phi} - \alpha_2 (\Phi^3 + \bar{\Phi}^3)], \quad (5)$$

这种形式保留了体系的手征对称性和拓展的  $\mathbb{Z}_3$  对称性。

这种考虑了上述的手征凝聚和 Polyakov 圈之间纠缠效应的模型叫做 EPNJL 模型。我们只需要用  $G(\Phi)$  来替换公式(1)中的  $G$  就可以把 PNJL 模型改进为 EPNJL 模型。文献[22]和我们之前的研究[21]表明, 若采用参数:  $T_0 = 190.4 \text{ MeV}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.2$ , 则该模型可以还原出零化学势下格点 QCD 给出的两种相变重合的结果和虚化学势下 RW 端点(Roberge-Weiss endpoint)的阶数对夸克质量的依赖性, 所以在本篇文章中我们仍然使用相同的参数。

另一方面,  $T_0 = 270 \text{ MeV}$  是由纯杨-米尔斯理论描述的在零化学势处发生退禁闭相变的温度, 然而当存在动力学夸克时, 我们就需要考虑物质区域对胶子区域的量子反作用, 这就会导致相变温度  $T_0(N_f, \mu)$  依赖于夸克的味和化学势(对于同位旋对称夸克物质来说  $\mu = \mu_u = \mu_d$ )。文献[23]通过使用泛函重整化群理论给出了  $T_0(N_f, \mu)$  的形式:

$$T_0(N_f, \mu) = T_\tau e^{-1/(\alpha_0 b(N_f, \mu))}, \quad (6)$$

$$b(N_f, \mu) = \frac{11N_c - 2N_f}{6\pi} - \beta \frac{16N_f}{\pi} \frac{\mu^2}{T_\tau^2}. \quad (7)$$

参数设置为  $\alpha_0 = 0.304$ ,  $T_\tau = 1.781 \text{ GeV}$ , 以此来还原  $N_f = 0$ ,  $\mu = 0$  时由纯规范场计算出的退禁闭相变温度  $T_0 = 270 \text{ MeV}$ 。当存在两味夸克场时, 零化学势处的  $T_0$  就被重新标度到了  $210 \text{ MeV}$ 。对于 EPNJL 模型, 我们将  $T_\tau$  重新标度到  $1.615 \text{ GeV}$ , 由此得到零化学势处  $T_0 = 190.4 \text{ MeV}$ , 如此便可与 EPNJL 模型中的参数对应起来。对于 PNJL 模型和 EPNJL 模型两种情况,  $T_0(N_f, \mu)$  都在零化学势处还原为  $T_0$ 。公式(7)中的  $\beta$  控制着作为夸克化学势的函数  $T_0(\mu)$  的曲率, 详细可见我们之前的研究[24]。

上述这种采用了化学势依赖的 Polyakov 有效势的模型叫做  $\mu$ PNJL 模型, 只需要用  $T_0(N_f, \mu)$  来替代公式(4)中的  $T_0$  就可以把 PNJL 模型修正为  $\mu$ PNJL 模型。

在本研究中, 我们同时考虑了 Polyakov 圈和手征凝聚之间的纠缠相互作用, 以及对 Polyakov 有效势的修正, 由此得到的模型我们称之为  $\mu$ EPNJL 模型。由  $\mu$ EPNJL 模型计算出的在平均场近似下的热力学势为  $\Omega$ , 序参量  $\phi_u$ ,  $\phi_d$ ,  $\Phi$  和  $\bar{\Phi}$  的值可以通过求解使得热力学势取得极小值的方程组得到:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \phi_u} = \frac{\partial \Omega}{\partial \phi_d} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\Phi}} = 0. \quad (8)$$

夸克物质所有的宏观热力学量都可以由热力学势求出。注意, 本文中我们设定压强和能量密度的真空值为零。

$\Lambda$  是为了防止积分发散设置的动量空间的截断。  $\Lambda = 651 \text{ MeV}$ ,  $G = 5.04 \text{ GeV}^{-2}$ ,  $m_{u,d} = 5.5 \text{ MeV}$  这些参数是根据  $\pi$  介子衰变常数  $f_\pi = 92.3 \text{ MeV}$  和  $\pi$  介子质量  $m_\pi = 139.3 \text{ MeV}$  这些实验值来确定的。

## 3 数值结果和讨论

### 3.1 强相互作用物质的相图

为了说明两种相变之间的纠缠效应和化学势修正效应, 我们在这里采取四组参数, 如表 1 所列。

表 1 本文中采用的四组参数

No.	$T_0/\text{MeV}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta$	Model
I	210	0	0	0	PNJL
II	190.4	0.2	0.2	0	EPNJL
III	190.4	0.2	0.2	0.25	$\mu$ EPNJL (A)
IV	190.4	0.2	0.2	0.5	$\mu$ EPNJL (B)

图 1 给出了利用参数组 I~IV 画出的温度-化学势相图, 其中虚线和实线分别代表手征平滑过渡和手征一阶相变, 点线代表退禁闭平滑过渡, 实心点代表临界点 CEP。同文献[25], 我们把  $(\Phi + \bar{\Phi})/2=0.5$  时的温度定义为退禁闭平滑过渡的温度, 因为在化学势较大处  $\Phi$  和  $\bar{\Phi}$  变化率的峰会变得很宽, 很难去定义其最大值的位置。对于原始的 PNJL 模型(参数组 I)来说, 两种相变之间基本不存在一致性, 然而, 如果考虑纠缠相互作用的话(参数组 II), 两种相变可以在低化学势处重合, 这部分细节可以参考我们之前的研究[21]。此外, 随着化学势修正效应的增强, 也就是  $\beta$  值的增加, 两种相变之间的重合度也越来越高, 即使在化学势较大处两者依然是重合的。经过分析, 造成这种现象的原因是: 在任意固定化学势处,  $\beta$  越大,  $\Phi$  和  $\bar{\Phi}$  随温度的变化也越剧烈, 其数值也越大, 而这就造成  $G(\Phi)$  与  $G$  的差别较大(见公式(5)), 也就意味着两种相变之间的纠缠相互作用也越强。

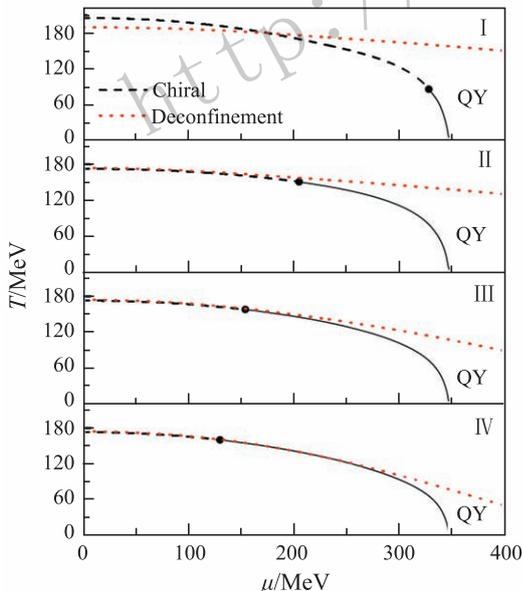


图 1 (在线彩图) 四组参数下手征相变和退禁闭相变在温度-化学势平面的相图

由公式(3)可以看出  $T = 0 \text{ MeV}$  时 Polyakov 有效势  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T, \mu)$  等于 0, 并且由公式(6)和(7)可以看出在  $\mu = 0 \text{ MeV}$  时,  $T_0(N_f, \mu)$  退化为  $T_0$ , 所以我们看到

利用参数组 II~IV 画出的手征相变曲线在零温或零化学势处并无区别。

Quarkyonic 物质指的是手征对称性已经恢复, 但仍处于色禁闭的一种高密夸克物质, 这只是理论预言可能存在的一种相, 存在与否及其区域大小目前尚无定论, 具体可参考文献[26]。图 1 中的 QY 指的就是 quarkyonic 存在的区域, 可以看出, 纠缠相互作用和化学势修正效应会导致 quarkyonic 相区域的缩小, 这也是两种相变之间重合度增强的必然结果。

### 3.2 与实验结果的对比

STAR 合作组在 RHIC 上进行的净质子数分布的测量结果表明, 相变的临界点可能存在于碰撞能量  $\sqrt{s_{\text{NN}}}$  在 7.7 GeV 到 27 GeV 这一段范围之内[1]。为了将相图和实验结果进行对比, 我们可以采用一套参数化的方法画出化学冻结曲线[27], 如图 2 所示。

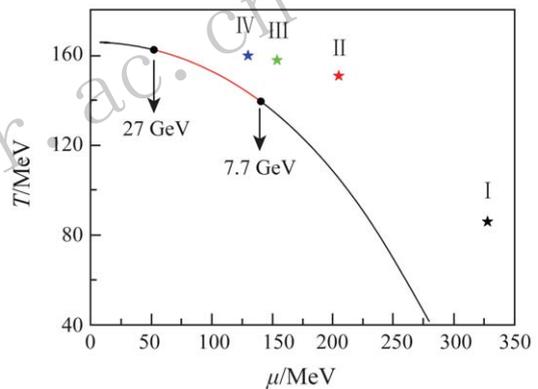


图 2 (在线彩图) 化学冻结曲线及不同模型参数下 CEP 的位置

图中红色部分表示 STAR 合作组通过对 RHIC 上进行的净质子数分布测量得到的可能存在临界点的碰撞能量区域[1], 但是需要强调的一点是, 化学冻结曲线是由碰撞生成的夸克胶子等离子体经过膨胀和冷却重新强子化之后经由测量粒子产率确定的, 所以真正的相变曲线应该位于化学冻结曲线右上方一定范围之内, 相应地, 临界点真正存在的区域也应该位于红色曲线右上方一小段范围之内。我们同样把参数组 I~IV 计算出的临界点展示在了图 2 中。可以看到, 由 PNJL 模型(I)计算的临界点距离实验预言区域很远, 而由 EPNJL 模型(II), 特别是  $\mu$ EPNJL 模型(III, IV)计算出的临界点则相对比较接近预言区域, 从这一点上来说, 相较于其他 PNJL 类模型,  $\mu$ EPNJL 模型与当前的实验数据符合得更好。然而, 纠缠相互作用和化学势修正效应的强度, 也就是参量  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  和  $\beta$  的大小还是不确定的, 希望通过更多、更精确的实验数据来进一步对模型参数进行限

制。在此方面，我们会持续密切关注未来几年内的相关实验，比如 RHIC 上进行的第二阶段能量扫描，以及在 NICA/FAIR/J-PARC 上进行的一些项目等等。

#### 4 结论

通过引入了手征对称性恢复相变和退禁闭相变之间的纠缠效应以及化学势修正效应，我们分别从两方面对 PNJL 模型进行了修正，得到了  $\mu$ EPNJL 模型。通过与标准的 PNJL 对比，我们发现在  $\mu$ EPNJL 模型中，手征对称性恢复相变和退禁闭相变之间的纠缠效应更强，即使在化学势较大处二者依旧重合得很好，从而导致理论预言可能存在的 quarkyonic 相的区域减小。另一方面，通过与在相对论重离子对撞机上的实验结果进行对比，我们发现由  $\mu$ EPNJL 模型计算出的临界点更加靠近实验预言的临界点可能存在的范围。

#### 参考文献：

- [1] ADAMCZYK L, ADKINS J K, AGAKISHIEV G, *et al.* Physical Review Letters, 2014, **112**(3): 032302.
- [2] ODYNYEC G. Journal of Physics: Conference Series, 2013, **455**(1): 012037.
- [3] SCHAEFER B J. Physics of Atomic Nuclei, 2012, **75**(6): 741.
- [4] BORÁNYI S, FODOR Z, HOELBLING C, *et al.* Journal of High Energy Physics, 2010, **2010**(9): 1.
- [5] AOKI Y, BORSÁNYI S, DÜRR S, *et al.* Journal of High Energy Physics, 2009, **2009**(06): 088.
- [6] CHENG M, CHRIST N H, DATTA S, *et al.* Physical Review D, 2006, **74**(5): 054507.
- [7] HATSUDA T, KUNIHITO T. Physics Letters B, 1984, **145**(1): 7.
- [8] REHBERG P, KLEVANSKY S P, HÜFNER J. Physical Review C, 1996, **53**(1): 410.
- [9] FUKUSHIMA K. Physics Letters B, 2004, **591**(3): 277.
- [10] COSTA P, RUIVO M C, DE SOUSA C A, *et al.* Symmetry, 2010, **2**(3): 1338.
- [11] LOIZIDES C. The European Physical Journal C, 2007, **49**(1): 339.
- [12] SKOKOV V, FRIMAN B, REDLICH K. Physical Review C, 2011, **83**(5): 054904.
- [13] COLEMAN S, WITTEN E. Physical Review Letters, 1980, **45**(2): 100.
- [14] KARSCH F, LAERMANN E. Physical Review D, 1994, **50**(11): 6954.
- [15] KACZMAREK O, ZANTOW F. Physical Review D, 2005, **71**(11): 114510.
- [16] DE FORCRAND P, PHILIPSEN O. Nuclear Physics B, 2002, **642**(1): 290.
- [17] D'ELIA M, SANFILIPPO F. Physical Review D, 2009, **80**(11): 111501.
- [18] KOGUT J B, SINCLAIR D K. Physical Review D, 2004, **70**(9): 094501.
- [19] D'ELIA M, SANFILIPPO F. Physical Review D, 2009, **80**(1): 014502.
- [20] ROESSNER S, RATTI C, WEISE W. Physical Review D, 2007, **75**(3): 034007.
- [21] SHAO G Y, TANG Z D, DI TORO M, *et al.* Physical Review D, 2015, **92**(11): 114027.
- [22] SAKAI Y, SASAKI T, KOUNO H, *et al.* Physical Review D, 2010, **82**(7): 076003.
- [23] SCHAEFER B J, PAWLOWSKI J M, WAMBACH J. Physical Review D, 2007, **76**(7): 074023.
- [24] SHAO G Y, TANG Z D, DI TORO M, *et al.* Physical Review D, 2016, **94**(1): 014008.
- [25] FUKUSHIMA K. Physical Review D, 2008, **77**(11): 114028.
- [26] MCLERRAN L, PISARSKI R D. Nuclear Physics A, 2007, **796**(1): 83.
- [27] FUKUSHIMA K. Physical Review C, 2015, **91**(4): 044910.

## QCD Phase Diagram in the Improved PNJL Model

TANG Zhanduo<sup>1)</sup>, SHAO Guoyun, GAO Xueyan, GAO Ning, HE Weibo

(*Department of Applied Physics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

**Abstract:** Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) model is one of the most popular effective quark models to investigate the properties of strongly interacting matter. Based on the PNJL model, we consider the entanglement interactions between the chiral condensate and Polyakov-loop, as well as the chemical potential modification of Polyakov-loop potential simultaneously, which is named  $\mu$ EPNJL model. Compared with the original PNJL model, the calculations in the mean field approximation show that the critical end point (CEP) given in the  $\mu$ EPNJL model moves towards higher temperature and smaller chemical potential in the  $T - \mu$  phase diagram. Besides, the chiral symmetry restoration and deconfinement phase transition coincide well in a wide range of chemical potential. Comparing our calculations with the measurement of the moments of net-proton multiplicity distributions at Relativistic Heavy-Ion Collider (RHIC) by STAR Collaboration, we find that the CEP given by  $\mu$ EPNJL model can be closer to the range predicted by the experiment through appropriate parameter adjustment.

**Key words:** strongly interacting matter; phase diagram; phase transition of chiral symmetry restoration; deconfinement phase transition; critical end point

<http://www.npr.ac.cn>

---

**Received date:** 10 Nov. 2016; **Revised date:** 19 May 2017

**Foundation item:** National Natural Science Foundation of China (11305121); Specialized Research Fund for Doctoral Program of Higher Education (20130201120046); Natural Science Basic Research Plan in Shaanxi Province of China(2014JQ1012)

1) E-mail: [ttt1992@stu.xjtu.edu.cn](mailto:ttt1992@stu.xjtu.edu.cn).