

文章编号: 1007-4627(2016)01-0019-06

# 统一流体力学模型与BNL-RHIC低能量区 重离子碰撞中的赝快度分布

姜志进, 黄艳, 王杰

(上海理工大学理学院, 上海 200093)

**摘要:** 重离子碰撞产生的高温高密度物质假设按照统一流体力学模型的规律进行时空演化, 并最终经由一固有时为  $\tau_{FO}$  的类空超曲面冻结为带电粒子。统一流体力学模型是一种将 Landau 与 Hwa-Bjorken 两著名流体力学模型结合在一起的模型, 是一种少有的可精确求解的理论之一。研究表明: BNL-RHIC 低能量区重离子碰撞中带电粒子的赝快度分布可由统一流体力学模型很好地描述。这与高能区的情况不同, 除了流体外, 还需考虑领头粒子的贡献。产生这一差异的原因在于: 低能情况下领头粒子的穿透力较弱, 领头粒子被流体的贡献所掩盖。

**关键词:** 统一流体力学模型; 常用快度; 时空快度; 赝快度

**中图分类号:** O572.2    **文献标志码:** A    **DOI:** 10.11804/NuclPhysRev.33.01.019

## 1 引言

相对论流体力学在高能物理中的应用可追溯到 Landau 在 1953 年开创性的研究工作<sup>[1]</sup>。近年来, 这方面研究工作所取得的最重要的成就之一是发现高能粒子或重离子碰撞产物的强作用集体流的特点<sup>[2-6]</sup>, 且其粘滞系数非常小, 膨胀过程极近理想流体<sup>[7-27]</sup>。

由于相对论流体力学方程高度的非线性与耦合性, 它的精确求解一直是横亘在人们面前的一个巨大的难题。这也就是为什么从 Landau 时代到现在, 对该问题的处理一般仅限于满足简单状态方程的理想流体的 1+1 维膨胀, 高维或包含粘滞效应流体方程的精确求解问题讨论得很少, 其一般解析解还远远没有得到。目前对这类问题的处理一般都是采用蒙特卡罗模拟的方法。蒙特卡罗模拟除了需要强大的计算系统外, 还需要娴熟的规避微分方程求解过程的不稳定性, 且其结果产自于人造的、不透明的软件系统, 与运动方程的联系不是那么直接、明了。相反, 精确解, 通过理想化的近似处理, 关注的是物理现象最本质的东西, 考虑的是影响物理过程最重要的因素, 反映的是物理系统最基本的运动规律, 且解析解的简单与明了性是蒙特卡罗模拟方法所无法比拟的。所以, 相对论流体力学方程的精确求解虽然困难重重, 但一直是人们不懈追求的目标之一, 是高能物理

的一个重要的研究领域。

第一个相对论流体力学方程的精确解是由 Khalatnikov<sup>[28]</sup>于 1954 年给出的, 该解是关于初态静止且作加速膨胀的零质量理想流体, 其形式是复杂的积分式。后来 Landau 将该解用于他的流体力学模型研究中<sup>[29]</sup>, 并设法得到了带电粒子的快度分布, 该分布在定性上与实验测量相一致<sup>[30-32]</sup>, 使人们首次认识到高能碰撞产物极近理想流体的特点。

第二个相对论流体力学方程的精确解是于 1974 年由 Hwa<sup>[33]</sup>给出, 该解是关于匀速膨胀且具有洛伦兹不变初始条件的理想流体, 其形式解析且简单。后来, Bjorken<sup>[34]</sup>采用该解得到了高能碰撞产物能量密度的计算公式, 使其变得可由实验测量了。这是第一个也是到目前为止唯一的一个被广泛认可的确定该能量密度的理论公式, 因此备受关注。这也就是为什么通常将 Hwa 理论称为 Hwa-Bjorken 流体力学模型的原因。当然, 由于公式中的自由参数一直没有很好地确定, 碰撞产物能量密度的确定问题, 无论在理论上还是在实验上至今仍然没有得到很好的解决。另外, 该模型所给出的带电粒子快度分布的平台结构也与实验测得的高斯型分布形式相悖。理论上, 这样的快度分布只是入射能量  $\rightarrow \infty$  时的极限。

近年来, 随着 BNL-RHIC 及后来 CERN-LHC 的

收稿日期: 2015-11-02; 修改日期: 2016-01-04

基金项目: 沪江基金(B14004); 上海市现代光学系统重点实验室项目

作者简介: 姜志进(1960-), 男, 山东乳山人, 教授, 主要从事重离子核物理理论研究, E-mail: Jzj265@163.com。

投入运行, 相对论流体力学模型的研究进入了一个非常活跃的时期, 成为目前最热门的研究领域之一。也就是在这一时期, 碰撞产物的二阶与高阶谐波流及脊状结构在实验上被观察到<sup>[2-6]</sup>, 使人们认识到碰撞产物强作用的极近理想流体的特点。在这同一时期, 相对论流体力学模型的解析研究也进入了其发展的黄金阶段, 出现了一批很好的研究成果<sup>[7-15]</sup>。例如: 通过推广的快度与时空快度间的关系, 文献 [7] 将 Landau 与 Hwa-Bjorken 两模型统一在一起, 成为统一流体力学模型, 并给出了一组严格解。采用传统的 Khalatnikov 势方法, 文献 [8] 对状态方程满足一般线性关系的理想流体的运动方程做了解析求解, 得到了一组精确解。考虑到流体元间的功效应, 文献 [9-10] 将匀速膨胀流体的 Hwa-Bjorken 模型推广到加速膨胀流体的情况, 得到了一组严格解。

在我们的前期工作中<sup>[16]</sup>, 在考虑到带头粒子的效应后, 曾采用统一流体力学模型对 BNL-RHIC 高能区及 CERN-LHC 能区重离子碰撞中带电粒子的赝快度分布给出了很好的描述。弄清楚该模型是否适用于 BNL-RHIC 低能区的情况是本文的主题。

本文采用的是自然单位制, 结构如下: 第二节列出了统一流体力学模型的主要内容; 第三节将理论结果与 BNL-RHIC 上的 PHOBOS 合作组在  $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 19.6$  GeV 的 Au-Au 碰撞及  $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 22.4$  GeV 的 Cu-Cu 碰撞中的实验测量相比较; 第四节是结论。

## 2 统一流体力学模型简介

统一流体力学模型<sup>[7,16]</sup>的主要内容如下。

(1) 产生于碰撞过程的高温高密度物质被看作理想流体, 满足线性状态方程

$$\varepsilon = gp, \quad (1)$$

其中:  $\varepsilon$  为流体的能量密度;  $p$  为压强;  $1/\sqrt{g} = c_s$  是声速。方程 (1) 使得流体沿两核对撞轴, 即纵向  $z$  轴的膨胀满足形式

$$\begin{aligned} & \frac{e^{2y}-1}{2}(g+1)\partial_+p + e^{2y}(g+1)p\partial_+y + \frac{1-e^{-2y}}{2} \times \\ & (g+1)\partial_-p + e^{-2y}(g+1)p\partial_-y + \partial_+p - \partial_-p = 0, \\ & \frac{e^{2y}+1}{2}(g+1)\partial_+p + e^{2y}(g+1)p\partial_+y + \frac{1+e^{-2y}}{2} \times \\ & (g+1)\partial_-p - e^{-2y}(g+1)p\partial_-y - \partial_+p - \partial_-p = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $y$  是常用快度,  $\partial_+$  与  $\partial_-$  是关于光锥变量  $z_{\pm} = t \pm z = \tau e^{\pm\eta_s}$  偏微分的缩写形式,  $\eta_s$  是时空快度,  $\tau = \sqrt{z_+z_-}$  为固有时。

(2) 方程 (2) 是一高度非线性、变量间相互耦合在一起的复杂的微分方程组, 为了求解它, 将快度  $y$  与时空快度  $\eta_s$  的关系写成一般形式<sup>[7,16]</sup>

$$2y = \ln u_+ - \ln u_- = \ln F_+(z_+) - \ln F_-(z_-), \quad (3)$$

其中:  $u_{\pm} = e^{\pm y}$  是流体四维速度的光锥分量;  $F_{\pm}(z_{\pm})$  是任意函数。在  $F_{\pm}(z_{\pm}) = z_{\pm}$  的情况下, 式 (3) 变为  $y = \eta_s$ , 回到了洛伦兹不变的 Hwa-Bjorken 情况。反之, 方程 (3) 描述的是非洛伦兹不变的 Landau 模型中的关系。这样, 方程 (3) 将 Hwa-Bjorken 与 Landau 两流体力学模型统一了起来, 在二者间起到了一种桥梁的作用。

利用关系 (3), 方程 (2) 变为

$$\begin{aligned} g\partial_+ \ln p &= -\frac{(g+1)^2}{4} \frac{f'_+}{f_+} + \frac{g^2-1}{4} \frac{f'_-}{f_-}, \\ g\partial_- \ln p &= -\frac{(g+1)^2}{4} \frac{f'_-}{f_-} + \frac{g^2-1}{4} \frac{f'_+}{f_+}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $f_{\pm} = F_{\pm}/H$ ,  $H$  是一任意常数。经过上述处理, 方程 (4) 变得可求解了, 其解为<sup>[7,16]</sup>

$$\begin{aligned} s(z_+, z_-) &= s_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{g}{g+1}} = \\ & s_0 \exp \left[ -\frac{g+1}{4} (l_+^2 - l_-^2) + \frac{g-1}{2} l_+ l_- \right], \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $s$  为流体的熵密度,

$$\begin{aligned} l_{\pm}(z_{\pm}) &= \sqrt{\ln f_{\pm}}, \quad y(z_+, z_-) = \frac{1}{2} (l_+^2 - l_-^2) \\ z_{\pm} &= 2h \int_0^{l_{\pm}} e^{u^2} du, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $h = H/A$ ,  $A$  为任一常数。

(3) 当流体膨胀至固有时  $\tau_{\text{FO}}$  时, 其时空演化过程将终止并冷却为各种可测量的带电粒子。考虑到带电粒子数与流体的熵成正比, 利用解 (5) 可得到带电粒子的快度密度

$$\begin{aligned} \frac{dN(b, \sqrt{s_{\text{NN}}}, y)}{dy} &= C(b, \sqrt{s_{\text{NN}}}) e^{-(g-1)(l_+ - l_-)^2/4} \times \\ & \left. \frac{\partial_+ \phi e^y + \partial_- \phi e^{-y}}{\partial_+ \phi l_- e^y + \partial_- \phi l_+ e^{-y}} \right|_{\tau_{\text{FO}}}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $C$  是一正规化常数,  $\phi$  是任一类空超曲面。

(4) 上式中的右边是在固有时为  $\tau_{\text{FO}}$  的类空超曲面上取值, 该超曲面可取为

$$\phi(z_+, z_-) = \tau_{\text{FO}}^2 = z_+ z_- = C, \quad (8)$$

其中  $C$  为任意常数, 则

$$\partial_{\pm} \phi = z_{\mp}, \quad (9)$$

这样方程(7)变为

$$\frac{dN(b, \sqrt{s_{NN}}, y)}{dy} = C(b, \sqrt{s_{NN}}) e^{-(g-1)(l_+ - l_-)^2/4} \times \frac{z_- e^y + z_+ e^{-y}}{z_- l_- e^y + z_+ l_+ e^{-y}} \quad (10)$$

### 3 与实验测量的比较

有了快度分布(10), 赝快度分布可由下式给出<sup>[35]</sup>

$$\frac{dN(b, \sqrt{s_{NN}}, \eta)}{d\eta} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{m_T^2 \cosh^2 y}} \frac{dN(b, \sqrt{s_{NN}}, y)}{dy} \quad (11)$$

其中:  $m_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$  为横质量;  $p_T$  为横动量。上述变换的完成还需要关系

$$y = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{p_T^2 \cosh^2 \eta + m^2} + p_T \sinh \eta}{\sqrt{p_T^2 \cosh^2 \eta + m^2} - p_T \sinh \eta} \right] \quad (12)$$

将式(10)代入式(11)即可得到带电粒子的赝快度分布, 图1和2分别给出了  $\sqrt{s_{NN}} = 19.6$  GeV 的 Au-Au 与  $\sqrt{s_{NN}} = 22.4$  GeV 的 Cu-Cu 各不同对心度碰撞中的相应分布, 图中的实点是BNL-RHIC-PHOBOS合作组给出的实验测量<sup>[36]</sup>, 实线是统一流体力学模型(10)式的结果。计算中, 式(1)中的声速取值  $c_s = 1/\sqrt{g} = 0.35$ <sup>[37]</sup>, 对于 Au-Au 碰撞, 式(11)与(12)中的  $m$  与  $p_T$  分别取值 0.28 GeV 与 0.48 GeV/c, 对于 Cu-Cu 碰撞, 两者分别取值 0.25 GeV 与 0.45 GeV/c。

由图1和2可以看出, 理论与实验结果符合得很好。这与BNL-RHIC高能区及CERN-LHC能区的情况不同<sup>[16]</sup>, 在那里, 带电粒子赝快度分布的合理描述, 除了统一流体力学模型外, 还需要考虑带头粒子的贡献。出现这种差异的原因可能源于不同能量下两核中参与者的不同穿透性。入射能量越高, 核的穿透力越强, 透明度越高, 带头粒子的速度越大。例如由文献<sup>[38]</sup>知,

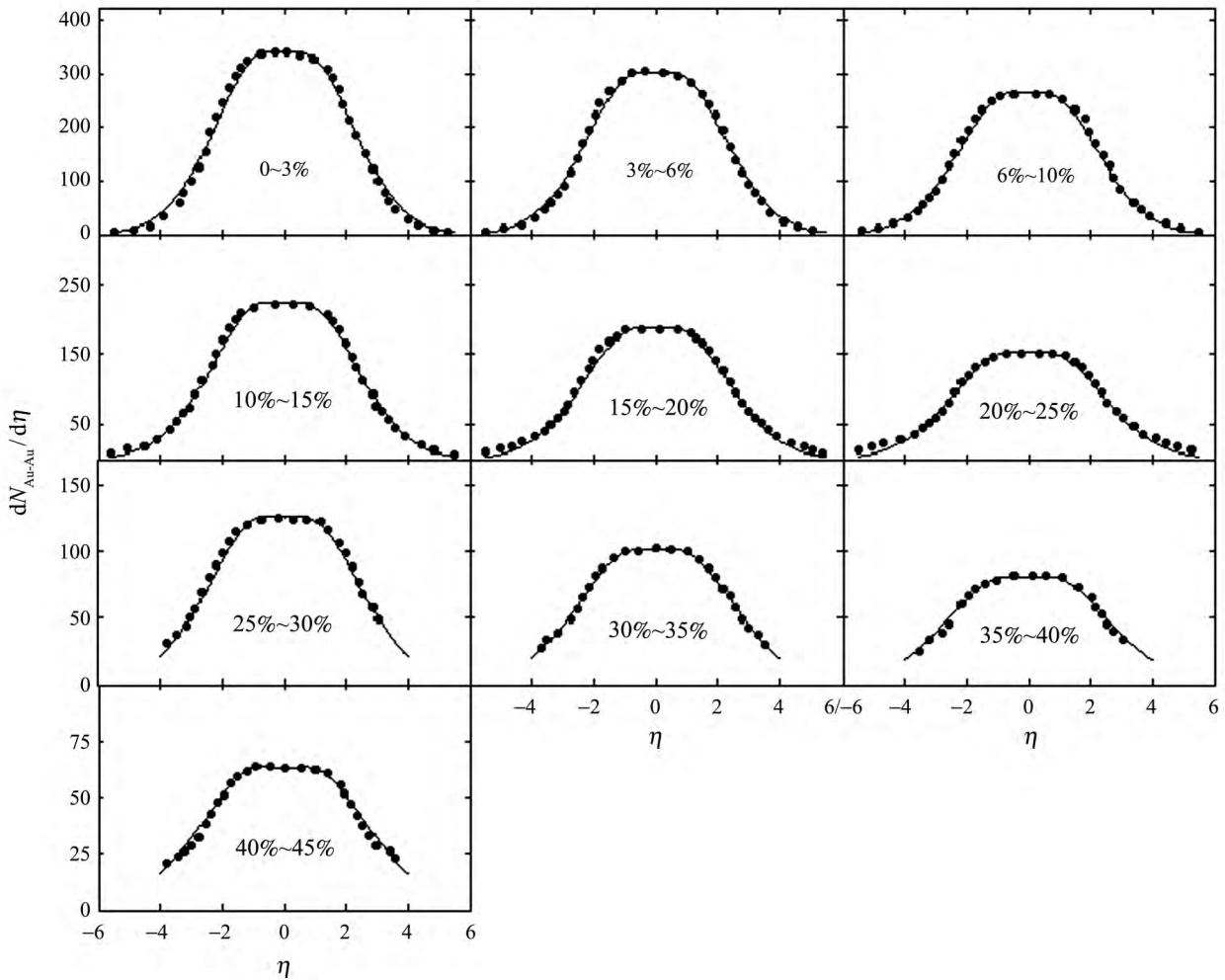


图1  $\sqrt{s_{NN}} = 19.6$  GeV 的 Au-Au 各不同对心度碰撞中带电粒子的赝快度分布  
实点为实验数据<sup>[36]</sup>, 实线是统一流体力学模型式(10)的结果。

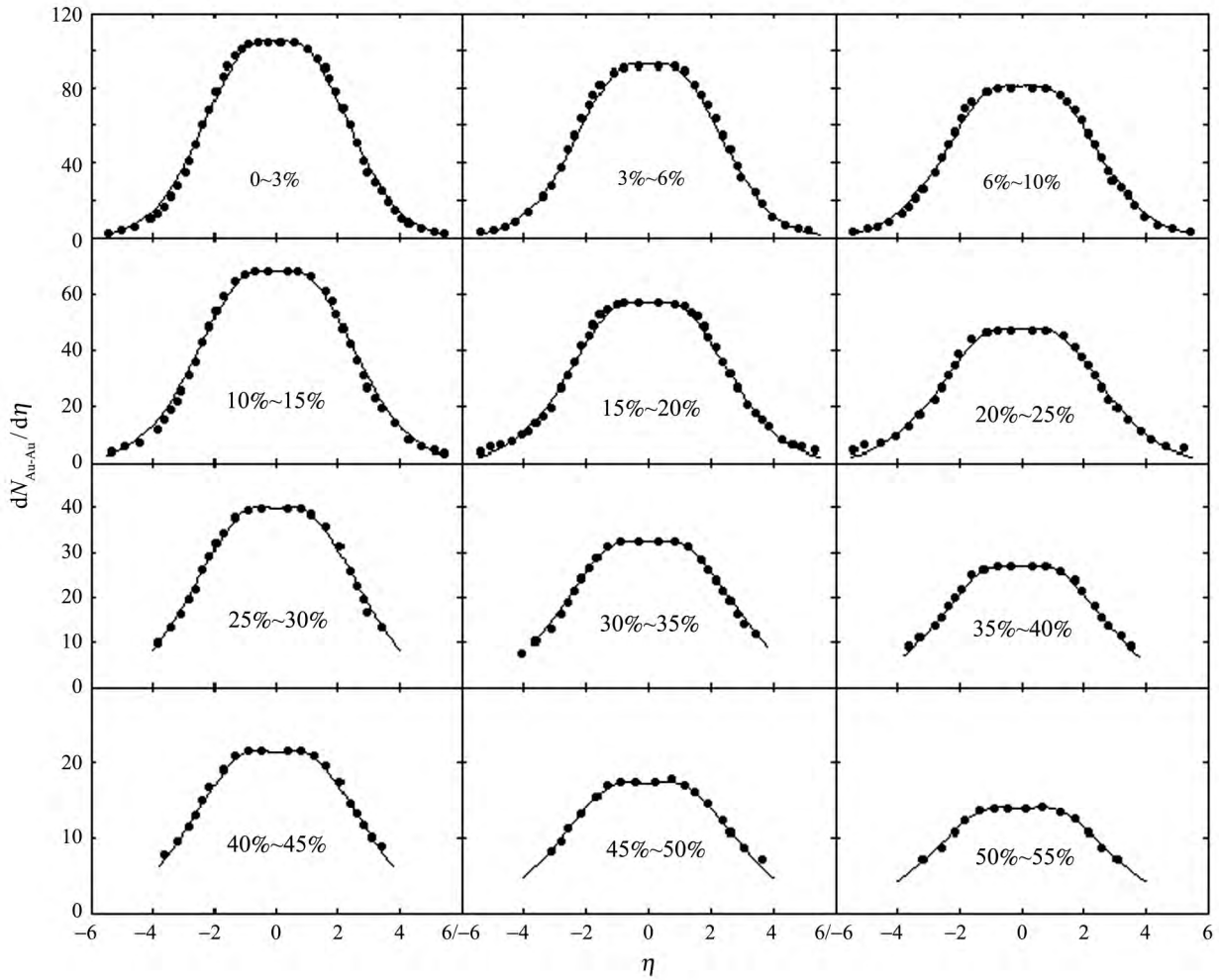


图 2  $\sqrt{s_{NN}} = 22.4$  GeV 的 Cu-Cu 各不同对心度碰撞中带电粒子的赝快度分布  
 实点为实验数据<sup>[36]</sup>, 实线是统一流体力学模型式(10)的结果。

对于  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV、对心度为 5% 的 Au-Au 碰撞, 参与者的快度损失为  $\langle \delta y \rangle \approx 2.45$ , 则带头粒子的快度为

$$y_0 = y_{\text{beam}} - \langle \delta y \rangle = 5.36 - 2.45 = 2.91。$$

在这样的高快度区域内, 由流体冻析产生的带电粒子较少, 带头粒子的贡献变得相对明显而重要, 需要单独考虑。相反, 在低能情况下, 参与者的快度损失为  $\langle \delta y \rangle \approx 0.85 y_{\text{beam}}$ , 这样, 带头粒子的快度为

$$y_0 = y_{\text{beam}} - \langle \delta y \rangle = 0.42 y_{\text{beam}} = \begin{cases} 1.28, & (\sqrt{s_{NN}} = 19.6 \text{ GeV}), \\ 1.33, & (\sqrt{s_{NN}} = 22.4 \text{ GeV}). \end{cases} \quad (13)$$

这样的位置很接近中心快度区, 而该区域正是流体冻析产生的带电粒子集中的地方, 由于这部分粒子在数量上远大带头粒子, 所以带头粒子的贡献将被淹没掉而无需

单独考虑。

## 4 结论

重离子碰撞中产生的高温高密度物质假设按照统一流体力学模型的规律膨胀, 并最终经由一固有时为  $\tau_{FO}$  的类空超曲面冻析为带电粒子。统一流体力学模型的典型特点有二: 一是经由推广的快度与时空快度间的关系, Hwa-Bjorken 与 Landau 两著名流体力学模型被连结了在一起, 成为统一流体力学模型的两种极限情况。二是对于状态方程满足一般线性关系的理想流体, 该理论模型可以精确求解。由于低能情况下两碰撞核内参与者较弱的穿透性, 带头粒子效应不需单独考虑。与 BNL-RHIC-PHOBOS 合作组在能量分别为  $\sqrt{s_{NN}} = 19.6$  与  $22.4$  GeV 的 Au-Au 与 Cu-Cu 各不同对心度碰撞中所做的实验测量相比较知, 统一流体力学模型与实验结果符合得很好。

## 参考文献:

- [1] LANDAU L D. Izvestiya Akademii Nauk SSSR, 1953, **17**: 51. (in Russian)
- [2] ADLER S S, AFANASIEV S, AIDALA C, *et al* (PHENIX Collaboration). Phys Rev Lett, 2003, **91**: 182301.
- [3] AAMODT K, ABELEV B I, REICHER M, *et al* (ALICE Collaboration). Phys Rev Lett, 2011, **107**: 032301.
- [4] CHATRCHYAN S, KHACHATRYAN V, SIRUNYAN A M, *et al* (CMS Collaboration). Phys Rev C, 2013, **87**: 014902.
- [5] KHACHATRYAN V, SIRUNYAN A M, TUMASYAN A, *et al* (CMS Collaboration). J High Energy Phys, 2010, **9**: 091.
- [6] AGGARWAL M, AHAMMED Z, ALAKHVERDYANTS A V, *et al* (STAR Collaboration). Phys Rev C, 2011, **83**: 064905.
- [7] BIALAS A, JANIK R A, PESCHANSKI R. Phys Rev C, 2007, **76**: 054901.
- [8] BEUF G, PESCHANSKI R, SARIDAKIS E N. Phys Rev C, 2008, **78**: 064909.
- [9] CSÖRGÖT, NAGY M I, CSANÁD M. Phys Lett B, 2008, **663**: 306.
- [10] NAGY M I, CSÖRGÖT, CSANÁD M. Phys Rev C, 2008, **77**: 024908.
- [11] WONG C Y, SEN A, GERHARD J, TORRIERI G, READ K. Phys Rev C, 2014, **90**: 064907.
- [12] BORSHCH M S, ZHDANOV V I. SIGMA, 2007, **3**: 116.
- [13] CSANÁDM, NAGY M I, LÖKÖS S. Eur Phys J A, 2012, **48**: 173.
- [14] MIZOGUCHI T, MIYAZAWA H, BIYAJIMA M. Eur Phys J A, 2009, **40**: 99.
- [15] SUZUKI N. Phys Rev C, 2010, **81**: 044911.
- [16] JIANG Z J, WANG J, MA K, ZHANG H L. Adv High Ener Phys, 2015, **2015**: 430606.
- [17] JIANG Z J, ZHANG Y, ZHANG H L, DENG H P. Nucl Phys A, 2015, **941**: 188.
- [18] HEINZ U, SNELLINGS R A. Rev Nucl Part Sci, 2013, **63**: 123.
- [19] GALE G, JEON S, SCHENKE B. Int J Mod Phys A, 2013, **28**: 1340011.
- [20] SARKISYAN E K G, SAKHAROV A S. Eur Phys J C, 2010, **70**: 533.
- [21] MISHRA A N, SAHOO R, SARKISYAN E K G, SAKHAROV A S. Eur Phys J C, 2014, **74**: 3147.
- [22] KALAYDZHYAN T, SHURYAK E. Phys Rev C, 2015, **91**: 054913.
- [23] HIRONO Y, SHURYAK E. Phys Rev C, 2015, **91**: 054915.
- [24] JIANG Z J, MA K, ZHANG H L, CAI L M. Chin Phys C, 2014, **38**: 084103.
- [25] JIANG Z J, ZHANG H L, MA K, WANG J. Chin Phys C, 2015, **39**: 044102.
- [26] JIANG Z J, LI Q G, ZHANG H L. Nucl Phys Rev, 2013, **30**: 26. (in Chinese)  
(姜志进, 李庆广, 张海利. 原子核物理评论, 2013, **30**: 26.)
- [27] ZHANG H L, JIANG Z J. Nucl Phys Rev, 2014, **31**: 8. (in Chinese)  
(张海利, 姜志进. 原子核物理评论, 2014, **31**(1): 8.)
- [28] KHALATNIKOV I M. J Exp Theor Phys, 1954, **27**: 529. (in Russian)
- [29] BELENKIJ S Z, LANDAU L D. Usp Fiz Nauk, 1955, **56**: 309. (in Russian)
- [30] MURRAY M (for BRAHMS Collaboration). J Phys G: Nucl Part Phys, 2004, **30**: 667.
- [31] MURRAY M (for BRAHMS Collaboration). J Phys G: Nucl Part Phys, 2008, **35**: 044015.
- [32] BEARDEN I G, BEAVIS D, BESLIU C *et al* (BRAHMS Collaboration). Phys Rev Lett, 2005, **94**: 162301.
- [33] HWA R C. Phys Rev D, 1974, **10**: 2260.
- [34] BJORKEN J D. Phys Rev D, 1983, **27**: 140.
- [35] WONG C Y. Introduction to High Energy Heavy Ion Collisions [M]. Harbin: Press of Harbin Technology University, 2002: 16. (in Chinese)  
(黄卓然. 高能重离子碰撞导论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2002: 16.)
- [36] ALVER B, BACK B, BAKER M, *et al* (PHOBOS Collaboration). Phys Rev C, 2011, **83**: 024913.
- [37] ADARE A, AFANASIEV S, AIDALA C, *et al* (PHENIX Collaboration). Phys Rev Lett, 2007, **98**: 162301.
- [38] BEARDEN I G, BEAVIS D, BESLIU C, *et al* (BRAHMS Collaboration). Phys Rev Lett, 2004, **93**: 102301.

## Unified Hydro Model and the Pseudorapidity Distributions in Heavy Ion Collisions at Low BNL-RHIC Energy Region

JIANG Zhijin, HUANG Yan, WANG Jie

(*College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;*)

**Abstract:** The hot and dense matter created in heavy ion collisions is supposed to have spatiotemporal evolution according to unified hydro model, and finally freeze out into the charged particles *via* a space-like hypersurface at a proper time  $\tau_{FO}$ . The unified hydro model is a model which integrates Landau and Hwa-Bjorken two famous hydro models together. It is one of few hydro models which can be solved exactly. Shown from the investigations in this paper, the pseudorapidity distribution of charged particles in heavy ion collisions at low BNL-RHIC energies can be well described by the unified hydro model. This is different from that at high energies, where, besides the fluid, the contribution from leading particles should be taken into account. The difference is considered due to the weaker penetration of the leading particles, leading to the leading particles being blanketed by the fluid contribution, at lower collision energies.

**Key words:** unified hydro model; ordinary rapidity; space-time rapidity; pseudorapidity

---

**Received date:** 2 Nov. 2015; **Revised date:** 4 Jan. 2016

**Foundation item:** Hujiang Foundation of China (B14004); Project of Shanghai Key Lab of Modern Optical System

1) E-mail: jzj265@163.com.