

文章编号: 1007-4627(2011)04-0454-05

# 周期弯晶作为束流控制元件的动力学稳定性<sup>\*</sup>

李洪涛, 罗诗裕<sup>#</sup>, 邵明珠

(东莞理工学院电子工程学院, 广东 东莞 523106)

**摘要:** 在经典力学框架内和偶极近似下, 引入正弦平方势, 把粒子运动方程化为具有阻尼项和受迫项的广义摆方程。利用 Melnikov 方法讨论了沟道运动次谐分叉及其稳定性, 导出了周期弯晶的临界条件和退道长度。结果表明, 要试图获得高的引出效率, 除了要求弯晶长度必须小于退道长度外, 还必须保证沟道粒子的运动是稳定的。对临界条件的分析表明, 系统的稳定性与它的参数有关, 只须适当调节系统参数, 就可以保证周期弯晶作为引出元件的稳定性。

**关键词:** 加速器; 弯晶; 束流控制; 引出效率

**中图分类号:** TL1; TL5      **文献标志码:** A

## 1 引言

近年来, 弯晶的束流控制技术得到了迅速发展<sup>[1-5]</sup>。早在 1989 年, 前苏联的高能物理研究所 (IHEP) 就把这一技术纳入了它的中长期科学发展规划, 并在 1996 年, 成功地引出了能量为 70 GeV 的质子束, 引出效率达到了 85%, 而束流强度也达到  $4 \times 10^{12}$  particles/s; 同年, 欧洲核子中心 (CERN) 也实现了对能量为 120<sup>[6]</sup> 和 450 GeV 质子束的偏转<sup>[7-8]</sup>; 而美国费米国家实验室 (Fermilab) 则实现了更高能量 (900 GeV) 的质子束控制<sup>[9]</sup>。CERN 大型粒子加速器 LHC 也试图采用这一引出技术<sup>[10]</sup>。事实证明, 利用弯晶控制正的带电粒子是非常有效的, 只需在束流通道上放上一定长度的常曲率弯晶或变曲率弯晶即可实现对束流的准直、切割、偏转和引出等。

弯晶的束流控制很大程度上决定于粒子的退道长度, 而粒子的退道长度与粒子的能量 (相对论因子  $\gamma$ ) 成正比, 能量越高退道长度越长, 而且要求晶体长度必须小于退道长度。值得注意的是, 这个条件还只是一个必要条件, 而且当沟道粒子运动的稳定性得到充分保证时, 弯晶才可能成功作为束流控制元件。本文的目的就是试图引入正弦平方势对变

曲率弯晶的束流控制做一解析描述。首先, 假设已经用声学方法将晶体周期弯曲, 并在经典力学框架内和偶极近似下, 把粒子运动方程化为具有阻尼项和受迫项的广义摆方程。利用 Melnikov 方法讨论了沟道运动次谐分叉及其稳定性, 导出了系统的临界条件和变曲率弯晶的退道长度。结果表明, 要试图获得高的引出效率, 除了要求弯晶长度必须小于退道长度外, 还必须保证沟道粒子的运动是稳定的。临界条件的分析表明, 系统的稳定性与它的参数有关, 只须适当调节系统参数, 就可以保证周期弯晶作为引出元件的稳定性。

## 2 运动方程

设  $(y, z)$  平面是晶体未弯曲情况下的中心平面, 相邻晶面间距为  $d$ 。在直角坐标系中,  $x$  轴垂直中心平面向上,  $y$  轴和  $z$  轴位于中心平面内, 且  $z$  轴沿着束流方向,  $y$  轴与晶面平行。假设用声学方法已将晶体做了如下形式

$$x(z) = a \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda_u}\right) \quad (1)$$

的周期弯曲, 其中:  $a$  是“振幅”;  $\lambda_u$  是周期变化的晶体摆动场“波长”。如果用机械方法再将它做常曲率

\* 收稿日期: 2010-08-02; 修改日期: 2010-09-08

\* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10947140); 广东省自然科学基金资助项目 (8151170003000010); 东莞市科技计划项目 (2008108101002, 200918140471)

作者简介: 李洪涛 (1964—), 男, 湖北洪湖人, 副教授, 从事光信息和粒子束方面的研究。

# 通讯联系人: 罗诗裕, E-mail: bgluoshy@dgut.edu.cn.

弯曲，结果如图 1(a)所示，沟道中心平面同时具有了这两种弯曲形式。如果常曲率弯曲的曲率不大，粒子的横向坐标可近似表示为

$$r(t) = \langle R \rangle + x(t), \quad (2)$$

其中： $\langle R \rangle$ 是弯晶的平均曲率半径； $x(t)$ 是粒子离开平衡轨道的距离。

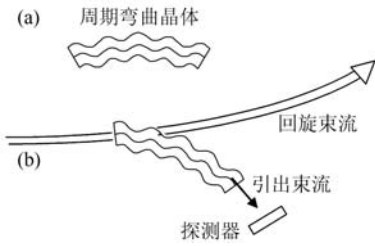


图 1 弯晶的环形束流引出示意图

(a)为周期弯曲晶体，(b)为周期弯曲晶体作为引出元件及相对配置。

注意到在图 1(a)所示弯晶沟道中运动的粒子，除了受到晶格场作用外，还将受到晶格热振动、电子多重散射等因素引起的阻尼作用，以及晶体弯曲产生的离心力和周期力作用。在偶极近似下，粒子的横向运动  $x(t)$  可以用经典方法来描述。根据牛顿第二定律， $x(t)$  满足方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\mu_0 \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dx} V(x) = p v [\kappa_0 + \kappa(z)], \quad (3)$$

其中： $\kappa_0 = 1/\langle R \rangle$ ，右端第一项是常曲率弯晶产生的离心力，第二项是晶体周期弯曲产生的受迫力； $V(x)$ 是粒子-晶体相互作用势， $p$ 是粒子动量， $v$ 是粒子速度，在超相对论情况下有  $v \approx c$ ； $\mu_0$ 是阻尼系数，物理意义由文献[10]给出， $m = m_0 \gamma$ ， $m_0$ 是粒子静止质量， $\gamma$ 是相对论因子。而

$$\kappa(z) = \kappa_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right) \quad (4)$$

是晶体周期弯曲的瞬时曲率，由曲线式(1)的二阶导数给出，其中  $\kappa_m = \Omega_u^2 a$ ， $\Omega_u = 2\pi/\lambda_u$ ，而  $z \approx ct$ 。

一般说来，方程(3)中的相互作用势  $V(x)$  可以取不同形式(如 Lindhard 势、Molierwe 势和正弦平方势等)。引入正弦平方势<sup>[11-18]</sup>

$$V(x) = V_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right), \quad (5)$$

其中  $V_0$  是势阱深度，对于 Si(110)沟道大约为 27 eV。令

$$\xi = \frac{2\pi x}{d}, \quad \delta = \frac{2\pi^2 V_0}{m d^2}, \quad \tau = \delta^{1/2} t, \quad (6)$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{\delta^{1/2}}, \quad \omega = \frac{\Omega_u}{\delta^{1/2}}, \quad Q = \frac{2\pi p v \kappa_m}{m \delta d}, \quad f = \frac{2\pi p v \kappa_m}{m \delta d}. \quad (7)$$

可将运动方程(3)化为

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + 2\mu \frac{d\xi}{d\tau} + \sin \xi = Q + f \cos(\omega \tau). \quad (8)$$

可以看出，粒子在常曲率周期弯晶中的运动可以等价描述为，在直沟道中运动的粒子受到形如  $Q + f \cos(\omega \tau)$  作用的受迫运动。假设阻尼项和右端项是小量，方程(8)可改写为

$$\xi' = \zeta,$$

$$\zeta' = -\sin \xi + \epsilon [Q - 2\mu \zeta + f \sin(\omega \tau)], \quad (9)$$

其中  $\epsilon$  是小参数，表示伴随它的项为  $O(\epsilon)$  量级。式(8)或(9)是一个典型的动力学系统，具有典型的全局分叉性质与混沌行为。下面用 Melnikov 方法对振荡型周期轨道的分叉现象进行分析。

### 3 振荡型周期轨道的分叉现象

对于无扰动系统有  $\epsilon = 0$ ，方程(9)化为如下形式

$$\dot{\xi} = \zeta, \quad \dot{\zeta} = -\sin \xi \quad (10)$$

的正则方程，其中  $\xi_s = 0$  和  $\xi_u = \pm \pi$  分别是系统的平衡点和非平衡点。积分一次可得系统的 Hamiltonian 量：

$$h = \frac{\zeta^2}{2} + (1 - \cos \xi). \quad (11)$$

根据  $h$  的大小，相平面上的轨道可分为异宿(或分枝)轨道、振荡型周期轨道和旋转型周期轨道<sup>[15]</sup>。人们关心的是如下形式的振荡型周期轨道：

$$\xi = 2 \arcsin(\kappa s n \tau), \quad \zeta = 2 \kappa c n \tau, \quad (12)$$

其中： $\kappa = h/2$ ； $\kappa \in (0, 1)$ ； $0 < h < 2$ ； $s n \tau$  和  $c n \tau$  是 Jacobian 椭圆函数。粒子沿这条轨道的运动周期为

$$T = 4K(\kappa), \quad (13)$$

其中  $K(\kappa)$  是第一类椭圆积分。当  $h$  单调增加时, 粒子的运动周期  $T$  从  $2\pi$  增加到无穷。振荡型周期轨道描写了沟道粒子的运动行为。但是, 对于扰动系统, 由于扰动的存在, 系统表现出了新的特征, 比如轨道分叉便是典型例子。注意到, 分叉就意味着不稳定, 沟道粒子变为退道粒子, 从而导致束流损失, 致使引出效率降低。用弯晶作为引出元件或束流控制元件应当尽量避免这种情况出现。下面, 用 Melnikov 方法对系统的分叉和稳定性进行分析。

对于任意的互质正整数  $m$  和  $n$ , 存在唯一的一个  $\kappa_{m/n} \in (0, 1)$ , 使得

$$T(\kappa_{m/n}) = 4K(\kappa_{m/n}) = \frac{m}{n}T = \frac{2\pi m}{n\omega},$$

利用 Melnikov 方法构造振荡型周期轨道式(12)的 Melnikov 函数, 可得

$$M^{m/n}(\tau_0) = \int_0^{mT} \zeta^o(\tau, \kappa) \left\{ Q - 2\mu\zeta(\tau, \kappa) + f \sin[\omega(\tau + \tau_0)] \right\} d\tau$$

$$= \begin{cases} \text{与 } \tau_0 \text{ 无关的常数,} \\ \text{当 } n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数时} \\ -\frac{4f\pi}{\text{ch}[\omega K'(\kappa)]} \left[ \frac{2\mu}{\delta_m} - \sin(\omega\tau_0) \right], \\ \text{当 } n = 1, \text{ 且 } m \text{ 为奇数时} \end{cases} \quad (14)$$

其中:  $\zeta$  由式(12)给出, 且  $K'(\kappa) = K(\kappa')$ ,  $\kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}$  是椭圆函数的补模;  $E(\kappa)$  是第二类全椭圆积分;

$$\delta_m = \frac{f}{\text{ch}[\omega K'(\kappa)] \left\{ \frac{4}{\pi} [E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa)] \right\}}, \quad (15)$$

在参数  $(f, \mu)$  平面上, 如果条件

$$\mu \leq \left| \frac{\delta_m}{2} \right| \quad (16)$$

满足, 则对于充分小的  $\epsilon$ , 在无扰动系统式(10)的振荡型周期解式(12)附近, 扰动系统也存在同样类型的周期解。但是, 当  $\epsilon$  不再是小量时, 情况就不同了。首先, 由式(14)可以看出, Melnikov 函数的零点方程为

$$\frac{2\mu}{\delta_m} - \sin(\omega\tau_0) = 0. \quad (17)$$

可见, 当  $\tau_0 \in [0, T]$  时, Melnikov 函数有两个简单零点, 这就导致了在这个区间上总有一点可以使  $M^m(\tau_0)$  的导数为负。换句话说, 系统(10)总存在一组稳定的周期为  $mT$  的振荡型奇阶次谐解。

## 4 讨论

### 4.1 振荡型周期轨道次谐分叉的物理意义

将式(6)和(7)代入式(16), 再注意到式(15), 可将次谐分叉的条件用原始参数表示为

$$\frac{\mu_0}{a\Omega_u^2} < \left| \frac{pv \text{sech}[\Omega_u d \sqrt{m/2V_0} v]}{\sqrt{2mV_0} \left[ \frac{4}{\pi} E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa) \right]} \right|. \quad (18)$$

注意到不等式条件(18)满足时, 系统出现次谐分叉, 而分叉就意味着不稳定, 适当选择系统参数, 可以避免这种情况出现。从式(18)可以看出: (1) 当晶体未周期弯曲 ( $a=0$ ) 时, 式(18)始终不满足, 系统是稳定的; (2) 描写晶体弯曲的  $a\Omega_u^2$  越大, 式(18)越容易满足, 系统越不稳定。当它达到

$$(a\Omega_u^2)_c = \frac{\mu_0 \sqrt{2mV_0} \left[ \frac{4}{\pi} E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa) \right]}{pv \text{sech}[\Omega_u d \sqrt{m/2V_0} v]} \quad (19)$$

时, 系统处于临界状态。当  $a\Omega_u^2 < (a\Omega_u^2)_c$  系统是稳定的, 否则系统不稳定, 从而表明, 晶体弯曲决不是随意的, 振幅和“频率”的选择必须满足稳定性条件; (3) 当系统阻尼系数  $\mu_0$  越小时, 条件越容易满足, 即系统越不稳定。换句话说, 仅当阻尼足够强时才可能抑制分叉的发生。其临界值可表示为

$$(\mu_0)_c = \left| \frac{a\Omega_u^2 pv \text{sech}[\Omega_u d \sqrt{m/2V_0} v]}{\sqrt{2mV_0} \left[ \frac{4}{\pi} E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa) \right]} \right|, \quad (20)$$

当阻尼系数  $\mu_0 > (\mu_0)_c$  时, 系统才是稳定的。

### 4.2 退道长度

使用晶体来准直、偏转和引出束流时, 晶体退道长度是一个十分重要的量。注意到当带电粒子与物质相互作用时, 由于退道效应, 束流密度会越来越小, 直接影响到束流偏转和引出效率。设  $n(z)$

是晶体厚度为  $z$  处的束流密度,  $\lambda$  是粒子的退道常数, 则距离变化  $dz$  后, 束流密度的减少量  $dn(z)$  可表示为

$$dn(z) = -\lambda n(z) dz. \quad (21)$$

积分式(21)式, 可得

$$n(z) = n_0 e^{-\lambda z}, \quad (22)$$

其中  $n_0$  是  $z=0$  处的束流密度。定义束流密度减小到原来  $1/e$  时的沟道长度为退道长度, 并用符号  $L_d$  表示。由式(22), 可将退道长度表示为  $L_d = 1/\lambda$ 。对于给定的晶体, 退道长度与粒子能量有关, 与弯晶曲率半径有关, 且一般可表示为  $L_d(\gamma, R)$ 。

对于变曲率弯晶, 曲率  $\kappa(z) = \kappa_m \sin(2\pi z/\lambda_u)$  不再是常数, 引入平均曲率

$$\begin{aligned} \langle \kappa(z) \rangle &= \frac{1}{\lambda_u} \int_0^{\lambda_u} \kappa_m^2 a_u |\sin \kappa_u z| dz \\ &= \frac{2}{\pi R_{\min}} = \frac{2}{\pi} \kappa_m, \end{aligned} \quad (23)$$

退道长度  $L_d(\gamma, \langle R \rangle)$  可表示为

$$L_d(\gamma, \langle R \rangle) = \left(1 - \frac{2}{\pi} C\right) \gamma \alpha_d(\gamma), \quad (24)$$

其中:  $C = \epsilon \kappa_m / V'$ ,  $V$  是粒子-晶体相互作用势,  $V'$  是  $V$  的一阶微商;  $\alpha_d(\gamma)$  是约化退道长度。对于给定的晶体和晶面, 这个量与相对论因子  $\gamma$  弱相关。根据 Lindhard 势, 可导出

$$\alpha_d(\gamma) = \frac{256}{9\pi^2} \frac{a_{TF}}{r_d} \frac{d}{\ln(2\epsilon/I) - 1}, \quad (25)$$

其中:  $a_{TF} = 0.8853Z^{-1/3}a_0$  是费米-托马斯屏蔽距离,  $I = 16Z^{0.9}$  eV 是原子电离势,  $Z$  是晶体原子序数,  $a_0$  是玻尔原子半径。

## 5 结论

注意到当晶体长度  $L$  等于退道长度  $L_d$  时, 只有  $1/e$  的粒子是沟道粒子(或者说引出效率为  $1/e$ ), 而当晶体长度大于退道长度时引出效率将更低, 以致于不能作为束流控制元件。由式(24)可以看出, 退道长度  $L_d$  与粒子能量成正比, 能量越高, 退道长度  $L_d$  越长。对于 MeV 范围的粒子, 退道长度只有微米量级; 对于 TeV 范围的粒子, 退道长度可达到米以上。这就决定了, 弯晶的束流控制首先在高能

范围实现。值得注意的是, 在弯晶束流控制中, 要求晶体长度  $L < L_d(\gamma, \langle R \rangle)$  只是一个必要条件, 只有保证了沟道运动的稳定性, 才能保证弯晶束流控制的成功应用。本文对此进行了解析描述, 并导出了系统的临界条件。结果表明, 系统的稳定性与它的参数有关, 只须适当调节系统参数, 就可以保证周期弯晶作为引出元件的稳定性。

## 参考文献 (References):

- [1] Afonin A G, Baronov V T, Bellucci S, *et al.* Nucl Instr and Meth, 2005, **B234**: 122.
- [2] Baranov V T. Nucl Instr and Meth, 2006, **B252**: 32.
- [3] Bellucci S. JETP Lett, 2006, **83**: 95.
- [4] Bellucci S, Balasubramanian S, Grilli A, *et al.* Nucl Instr and Meth, 2006, **B252**: 3.
- [5] Carrigan R A, Drozhdin A I, Flitter R P, *et al.* FERMILAB-CONF-06-309-AD, 2006.
- [6] Elsener K, Fidecano G, Gir M. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 215.
- [7] Bauricheter A, Kirsebom K, Medeuwadt R. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 172.
- [8] Doble N, Gatigton L, Grafstrom P. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 181.
- [9] Murphy C T, Carrigan R, Chen D. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 231.
- [10] Bellucci S, Biryukov V M. Phys Rev Spacial Topics: Accelerator and Beam, 2007, **10**: 013501.
- [11] Luo Shiyu, Shao Mingzhu, Hu Xiduo. HEP & NP, 2004, **28** (1): 96(in Chinese).  
(罗诗裕, 邵明珠, 胡西多. 高能物理与核物理, 2004, **28**(1): 96.)
- [12] Hu Xiduo, Luo Shiyu, Shao Mingzhu. HEP & NP, 2004, **28** (2): 196(in Chinese).  
(胡西多, 罗诗裕, 邵明珠. 高能物理与核物理, 2004, **28**(2): 196.)
- [13] Shao Mingzhu, Luo Shiyu. Acta Phys Sin, 2007, **56**(6): 3407 (in Chinese).  
(邵明珠, 罗诗裕. 物理学报, 2007, **56**(6): 3407.)
- [14] Luo Shiyu, Shao Mingzhu, Luo Xiaohua. Sci Chin Physics, 2010, **G40**(2): 207 (in Chinese).  
(罗诗裕, 邵明珠, 罗晓华. 中国科学, 2010, **G40**(2): 207.)
- [15] Hu Xiduo, Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Semiconductor Optoelectronics, 2010, **31**(1): 79(in Chinese).  
(胡西多, 罗诗裕, 邵明珠. 半导体光电, 2010, **31**(1): 79.)
- [16] Wu Muying, Chen Qiong, Li Hongtao, *et al.* Nuclear Physics Review, 2010, **27**(1): 107(in Chinese).

(吴木营, 陈琼, 李洪涛, 等. 原子核物理评论, 2010, **27**(1): 107.)

**26**(4): 242.)

[17] Luo Xiaohua, He Wei, Luo Shiyu, *et al.* Nuclear Physics Review, 2009, **26**(3): 242(in Chinese).

[18] Zhang Mei, Shao Mingzhu, Luo Shiyu. Nuclear Physics Review, 2007, **24**(4): 318.

(罗晓华; 何为; 罗诗裕, 等. 原子核物理评论, 2009,

(张梅, 邵明珠, 罗诗裕. 原子核物理评论, 2007, **24**(4): 318.)

## Dynamic Stabilities by Use of Periodic Bent Crystal as Beam Control Cell<sup>\*</sup>

LI Hong-tao, LUO Shi-yu<sup>#</sup>, SHAO Ming-zhu

(*Dongguan University of Technology, Dongguan, 523106, Guangdong, China*)

**Abstract:** In the classical mechanics frame and with a dipole approximation the particle motion equation in the periodic bent crystal is reduced to the general pendulum equation with a damping term and the forced term by using the sine-squared potential. This paper discusses the problem of the sub-harmonic bifurcation of the periodic orbit and the stabilities of the channeling motion by using Melnikov method, so as to derive the critical condition and the dechanneling length of the periodic bent crystal. The results show that channeling motion must be stable in addition that the crystal length is smaller than the dechanneling length in order to ensure higher extracted efficiency. The analysis of the critical condition shows that the system stabilities are related to its parameters. Just by properly regulating the parameters of the system, the dynamic stabilities by the use of periodic bent crystal as beam control cell can be ensured.

**Key words:** accelerator; bent crystal; beam control; extracted efficiency

\* **Received date:** 2 Aug. 2010; **Revised date:** 8 Sep. 2010

\* **Foundation item:** National Natural Science Foundation of China(10947140); Natural Science Foundation of Guangdong Province (8151170003000010); Dongguan Science and Technology Program(2008108101002, 2009108140471)

# **Corresponding author:** Luo Shiyu, E-mail: bgluoshy@dgut.edu.cn