**文章编号**：1007-4627(2011)03-0300-05

# 多尺度法与准等时同步加速器粒子纵向运动的稳定性*

肖慧娟[1]，罗诗裕[2,#]，邵明珠[2]

（1 东莞理工学院计算机学院，广东 东莞 523106；
2 东莞理工学院电子工程学院，广东 东莞 523106）

**摘　要**：在经典力学框架内和小振幅近似下，把准等时同步加速器中的粒子纵向运动方程化为具有阻尼项、受迫项的广义维尔斯特拉斯方程。在无扰动情况下，用维尔斯特拉斯函数分析了系统的相平面特征；在扰动情况下，用多尺度法讨论了系统的稳定性。结果表明，在相平面上，分支轨道是一条过不稳定点的同宿轨道，包围的区域呈“鱼形”或 $\alpha$ 形。系统的稳定性由“鱼形”区的面积决定，面积越大系统越稳定；结果还表明，系统除了 $\omega_m=1$ 的主共振外，还存在 $\omega_m=2$，1/2 的超次谐共振，并找到了系统稳定性的临界条件。

**关 键 词**：同步加速器；相运动；多尺度法；维尔斯特拉斯方程；稳定性

**中图分类号**：TL1；TL5　　　**文献标识码**：A

## 1　引言

1944 年，苏联物理学家维克斯勒（次年，麦克米兰）发现[1-3]，在高频电场中运动的带电粒子具有保持相位稳定的能力。从此，加速器的能量上限从原理上实现了质的突破，同步回旋加速器和同步加速器相继建造成功。2009 年 10 月，投入运行的欧洲同步加速器大型强子对撞机（LHC）可以把质子能量加速到 TeV 以上。同步加速器中粒子纵向运动的稳定性是一个很经典的问题。通过同步相位的选择，可实现非同步粒子的能量补偿。如果粒子具有较高的回旋频率，它将较早到达加速隙，只要选择同步相位 $\phi_s$ 满足 $0<\phi_s<\pi/2$，就能使它从高频场中获得较低能量增益；同样，对于较低能量的粒子将较晚到达加速隙，从高频场中将获得较高能量增益。这种能量补偿机制充分显现粒子纵向（相位）运动的聚束效应。对于粒子具有较低的回旋频率的情形，只要选择同步相位 $\phi_s$ 满足 $\pi/2<\phi_s<\pi$，相位稳定性同样可以得到保证。

考虑到粒子的运动阻尼和 RF 调制的影响，粒子的纵向运动方程将是一个带有阻尼项和受迫项的广义维尔斯特拉斯（Weierstrass）方程。本文在经典力学框架内和小振幅近似下，把准等时同步加速器的粒子纵向运动方程化为具有阻尼项和受迫项的广义维尔斯特拉斯方程。在无扰动情况下，用维尔斯特拉斯函数分析了系统的相平面特征；在扰动情况下，用多尺度法讨论了系统的稳定性。

## 2　运动方程

选择 $(\phi,\delta)$ 作为正则坐标，同步加速器粒子纵向运动的 Hamiltonian 可表示为[4]

$$H=\frac{1}{2}h\omega_0\eta\delta^2+\frac{\omega_0 eV_0}{2\pi\beta^2 E}[\cos\phi-\cos\phi_s+(\phi-\phi_s)\sin\phi_s],\tag{1}$$

其中，$h$ 是谐波数，$\omega_0$ 是同步粒子回旋频率，$\eta$ 是相移因子，$\delta$ 是动量分散系数，$e$ 是电子电荷，$V_0$ 是 RF 电压振幅，$E$ 是粒子能量，$\beta$ 是无量纲粒子速度，$\phi_s$ 是同步相位。选择角坐标 $\theta$ 做独立变数，可得准

* **收稿日期**：2010-07-11；**修改日期**：2011-01-24

* **基金项目**：国家自然科学基金资助项目(10947140)；广东省自然科学基金资助项目(10451170003004948)；东莞市科技计划项目(2008108101002，200918140471)

**作者简介**：肖慧娟(1967—)女，(汉族)，江西临川人，副教授，从事混沌保密通信研究。

# **通讯联系人**：罗诗裕，E-mail：luoshy@126.com

等时(QI)同步加速器的粒子纵向运动方程：

$$\dot{\phi}=h\eta\delta\ ,\qquad \dot{\delta}=\frac{eV_0}{2\pi\beta^2E}(\sin\phi-\sin\phi_s)\tag{2}$$

其中字母上方的圆点表示对 $\theta=s/R_0$ 的微商，$R_0$ 是加速器的平均半径。在转变能量 $\gamma_T$ 附近，线性近似是一个好的近似。注意到相移因子 $\eta$ 与束流的动量分散 $\delta$ 有关，将它做泰勒展开：

$$\eta(\delta)=\eta(0)+\left.\frac{\partial\eta}{\partial\delta}\right|_{\delta=0}\delta+\cdots\approx\eta_0+\eta_1\delta\ ,\tag{3}$$

其中

$$\eta_0=\eta(0)\ ;\ \eta_1=\left.\frac{\partial\eta}{\partial\delta}\right|_{\delta=0}。\tag{4}$$

将式(3)代入式(2)，在线性近似下，可得

$$\ddot{\delta}=v_s^2\delta+v_s^2\frac{\eta_1}{\eta_0}\delta^2,\tag{5}$$

其中

$$v_s=\sqrt{\frac{heV_0\,|\,\eta_0\cos\phi_s\,|}{2\pi\beta^2E}}$$

是小振幅情况下的粒子同步频率。令 $t=v_s\theta$，并做代换

$$x=-\frac{\eta_1}{\eta_0}\delta,\quad p=\frac{v_s\eta_1}{h\eta_0^2}\dot{\phi}\ 。\tag{6}$$

方程(5)可化为

$$x''+x-x^2=0\ ,\tag{7}$$

字母上方的一撇表示对时间 $t$ 的微商。考虑到系统阻尼(比如辐射衰减)和 RF 调制(或噪声)，在转变能量 $\gamma_T$ 附近，准等时同步加速器的粒子纵向运动方程一般地可表示为

$$x''+Ax'+x-x^2=K\cos\omega_m t\ ,\tag{8}$$

其中调制振幅 $K=-B\omega_m$，$B=\eta_1 a/\eta_0 v_s$ 是加速器有效调制频率，$\omega_m=v_m/v_s$ 是无量纲调制频率，$v_m$ 是加速器原始调制频率；而阻尼系数

$$A=\frac{\lambda}{v_s}=\frac{U_0J_E}{2\pi Ev_s}\ ,$$

$\lambda$ 是衰减系数，$U_0$ 是粒子每圈能损，$J_E$ 是衰减量。系统的性质与方程(8)包含的各项大小有关，下面分两种情况讨论。

## 3　无扰动系统的相平面特征

假设方程(8)中的阻尼项和受迫项可以不考虑，此时方程(8)退化为方程(7)。方程(7)不显含时间，系统是自治的，能量积分由公式

$$H_0=\frac{p^2}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}=E_0\tag{9}$$

给出，其中 $E_0$ 是系统的能量常数。令 $u=t/\sqrt{6}$，(9)式化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2=4x^3-6x+12E_0\ ,\tag{10}$$

同维尔斯特拉斯方程[5]

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}(u)}{\mathrm{d}u}\right)^2=4\mathscr{P}^3(u)-g_2\mathscr{P}(u)-g_3\tag{11}$$

比较可知：

$$\mathscr{P}(u)=x,\ g_2=6,\quad g_3=-12E_0\ 。\tag{12}$$

方程(10)是一个维尔斯特拉斯方程，它的解是单值双周期的维尔斯特拉函数。判别式

$$\Delta=g_2^3-27g_3^2=216(1-18E_0^2)\tag{13}$$

决定了系统的基本特征。$\Delta>0$ 描述的是分支线内部的粒子运动，方程 $4x^3-g_2x-g_3=0$ 的 3 个根 $e_1$，$e_2$，$e_3$ 均为实数，由图 1(a) $E_0=0.08$ 的直线与势能曲线的 3 个交点给出，且从右到左分别为

$$e_1=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\ ;$$

$$e_{2,3}=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{3}\pm60^\circ\right)\ ;$$

$$\cos\alpha=-3\sqrt{2}E_0\ ,$$

$\alpha$ 是相平面角度。相应的轨道由公式

$$x(t)=e_3+(e_2-e_3)\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\frac{e_1-e_3}{6}}t\ \middle|\ m\right)\tag{14}$$

给出，其中符号 sn 是 Jacobian 椭圆函数，

$$m=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{\sin\xi}{\sin(\xi+60^\circ)},$$

而

$$\xi=\frac{1}{3}\arccos(1-12E_0)\ 。$$

$m=1$ 的轨道为分支轨道

$$x_{sex}(t)=1-\frac{3}{\cosh t+1}\ ,$$

$$p_{sex}(t)=\frac{3\sinh t}{(\cosh t+1)^2}\ 。\tag{15}$$

在相平面上，分支轨道是一条过不稳定点的同宿轨道，它包围的区域呈“鱼形”或 $\alpha$ 形，又称为“鱼形”

区或 $\alpha$ 桶，如图 1(b)所示。$E_0=1/6$ 的轨道是同宿轨道。系统的稳定性由“鱼形”区的面积决定，面积越大系统越稳定。

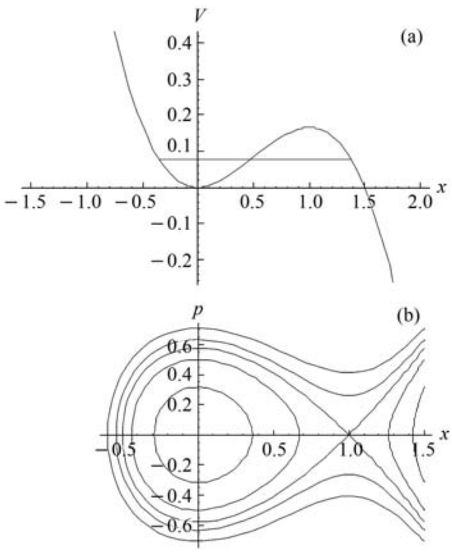


图 1　维斯特拉斯系统的相互作用势(a)与相平面特征(b)
从内到外相轨线对应参数 $E_0=1/10$，1/7，1/6，1/5 和 1/4。

## 4　扰动系统的稳定性

假设非线性项和阻尼项为 $\varepsilon(1)$ 阶小量，其余各项为 $\varepsilon(0)$ 阶小量，此时方程(8)可表示为

$$x''+x=K\cos\omega_{\mathrm{m}}t-\varepsilon(Ax'-x^2)\text{ 。}\tag{16}$$

下面用多尺度法进行求解[6]，并讨论系统的稳定性。设

$$x=x_0(T_0,\ T_1)+\varepsilon x_1(T_0,\ T_1)+\cdots\text{ ，}\tag{17}$$

其中 $T_0=t$，$T_1=\varepsilon t$ ，而 $\cos\omega_{\mathrm{m}}t=\cos\omega_{\mathrm{m}}T_0$。将式(17)代入方程(16)，并令 $\varepsilon$ 的同次幂系数相等，可得

$$D_0^2x_0+x_0=K\cos\omega_{\mathrm{m}}T_0\text{，}\tag{18}$$

$$D_0^2x_1+x_1=-2D_0D_1x_0-AD_0x_0-x_0^2\text{，}\tag{19}$$
$$\vdots$$

其中，$D_0=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_0}$，$D_1=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_1}$。由方程(18)可得系统的零级近似解：

$$x_0=a(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0}+\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{m}}T_0}+\mathrm{c.c}\text{ ，}\tag{20}$$

其中 $a(T_1)$ 为叠加系数，c. c 表示与前面各项共轭的项，而

$$\Lambda=\frac{K}{2(1-\omega_{\mathrm{m}}^2)}\text{ 。}\tag{21}$$

将式(20)代入方程(19)，可得

$$\begin{aligned}D_0^2x_1+x_1=&-2\mathrm{i}\left(a'+\frac{A}{2}a\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0}-\mathrm{i}A\omega_{\mathrm{m}}\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{m}}T_0}+\\&\left[a^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}T_0}+\Lambda^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\mathrm{m}}T_0}+2a\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\omega_{\mathrm{m}})T_0}+\right.\\&\left.2\bar{a}\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{m}}-1)T_0}+a\bar{a}+\Lambda^2\right]+\mathrm{c.c}\end{aligned}\tag{22}$$

方程右端包含了频率 $\omega_{\mathrm{m}}=1$ 的长期项，还包含了频率为 $2\omega_{\mathrm{m}}=1$，$\omega_{\mathrm{m}}/2=1$ 的小除数项。下面分两种情况讨论。

### 4.1　1/2 次谐共振( $2\omega_{\mathrm{m}}\approx1$)

为了描写系统在共振线附近的行为，引入解谐参数 $\sigma$，使得

$$2\omega_{\mathrm{m}}=1+\varepsilon\sigma\text{ ，}\tag{23}$$

于是有

$$2\omega_{\mathrm{m}}T_0=T_0+\varepsilon\sigma T_0\text{ 。}\tag{24}$$

将式(24)代入方程(22)，消去长期项可得：

$$2\mathrm{i}\left(a'+\frac{A}{2}a\right)-\Lambda^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_1}=0\text{ 。}\tag{25}$$

积分一次，可得方程(25)的解

$$a=a_0\mathrm{e}^{-AT_1/2}+\frac{\Lambda^2}{2\mathrm{i}(A/2+\mathrm{i}\sigma)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_1}\text{，}\tag{26}$$

其中 $a_0$ 是常数。注意到当 $T_1\to\infty$时，第一项趋于零，方程(25)的稳态解为

$$a=\frac{\Lambda^2}{2\mathrm{i}(A/2+\mathrm{i}\sigma)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_1}\text{ 。}\tag{27}$$

将式(27)代入方程(20)，可得 1/2 次谐共振情况下方程(16)的解。

### 4.2　2 次超谐共振( $\omega_{\mathrm{m}}-1\approx1$)

类似地，由定义

$$\omega_{\mathrm{m}}=2+\varepsilon\sigma\tag{28}$$

引入解谐参数 $\sigma$，并改写

$$(\omega_{\mathrm{m}}-1)T_0=T_0+\varepsilon\sigma\text{ 。}\tag{29}$$

将式(29)代入方程(22)，消去长期项可得：

$$\mathrm{i}\left(a'+\frac{Aa}{2}\right)-\bar{a}\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_1}=0\text{ 。}\tag{30}$$

引入变换

$$a = b^{\mathrm{i}\sigma T_1/2}, \tag{31}$$

将非自治方程(30)化为如下形式的自治方程：

$$\left(b' + \mathrm{i}\frac{\sigma b}{2} + \frac{Ab}{2}\right) + \mathrm{i}\Lambda\bar{b} = 0 \text{ 。} \tag{32}$$

令方程(32)具有 $b = b_r + \mathrm{i}b_i$ 形式的复数解，代入方程(32)，可得实部和虚部满足的方程：

$$\begin{aligned} &b_r' + \frac{Ab_r}{2} - \left(\frac{\sigma}{2} - \Lambda\right)b_i = 0 \text{ ，} \\ &b_i' + \frac{Ab_i}{2} + \left(\frac{\sigma}{2} + \Lambda\right)b_r = 0 \text{ 。} \end{aligned} \tag{33}$$

注意到方程(33)是常系数耦合方程，其解可表示为

$$b_r = b_{r0}\mathrm{e}^{\lambda T_1}, \quad b_i = b_{i0} = \mathrm{e}^{\lambda T_1} \text{ 。} \tag{34}$$

将式(34)代入方程(33)，可得特征值 $\lambda$ 满足的线性方程组：

$$\begin{aligned} &\left(\lambda + \frac{A}{2}\right)b_{r0} - \left(\frac{\sigma}{2} - \Lambda\right)b_{i0} = 0 \text{ ，} \\ &\left(\frac{\sigma}{2} + \Lambda\right)b_{r0} + \left(\lambda + \frac{A}{2}\right)b_{i0} = 0 \text{ 。} \end{aligned} \tag{35}$$

由克莱姆定理，方程(35)有非平凡解的条件是它的系数行列式为零，即 $(\lambda + A/2)^2 = \Lambda^2 - \sigma^2/4$，由此可得：

$$\lambda = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\Lambda^2 - \frac{\sigma^2}{4}} \text{ 。} \tag{36}$$

注意到当 $\lambda > 0$ 时，系统不稳定；$\lambda < 0$ 系统是稳定的；而 $\lambda = 0$ 时系统处于临界状态[7-12]。代入原始参数，临界条件可表示为为

$$A - \sqrt{\frac{K^2}{(1-\omega_m^2)^2} - \sigma^2} \begin{cases} > 0, & \text{stable} \\ = 0, & \text{critical} \\ < 0, & \text{instable} \end{cases} \text{ 。} \tag{37}$$

### 4.3　讨论

(1) $\sigma$ 一旦确定，式(37)表明，阻尼系数 $A$、RF 调制频率 $\omega_m$ 和调制振幅 $K$ 必须满足稳定性条件。

(2) $\sigma$ 越大，稳定性条件越容易满足，系统越稳定。这就是说，远离 $\omega_m = 2$ 这条共振线的系统是稳定的。

(3) $\sigma$ 越小，稳定性条件越不容易满足，系统越不稳定；当 $\sigma = 0$ 时，系统处于 $\omega_m = 2$ 的共振状态。

## 5　结论

注意到在转变能量附近，相移因子 $\eta$ 变得十分重要。由于它的非线性，直接影响到了粒子运动行为。处在转变能量附近的系统是准等时系统，线性近似是一个好的近似，这样的加速器就是准等时同步加速器。在经典力学框架内和小振幅近似下，考虑到相移因子的非线性，把准等时同步加速器的粒子纵向运动方程化为具有阻尼项、受迫项的广义维尔斯特拉斯方程。在无扰动情况下，用维尔斯特拉斯函数分析了系统的相平面特征；在扰动情况下，用多尺度法讨论了系统的稳定性。结果表明，在相平面上，分支轨道是一条过不稳定点的同宿轨道，它包围的区域呈“鱼形”或 $\alpha$ 形。系统的稳定性由“鱼形”区的面积决定，面积越大系统越稳定；结果还表明，系统除了 $\omega_m = 1$ 的主共振外，还存在 $\omega_m = 2$，1/2 的超次谐共振，并找到了系统稳定性的临界条件。

**参考文献(References)：**


[1]　Veksler V I. Compt Rend Acad Sci USSR，1944，**43**：329.

[2]　Veksler V I. Compt Rend Acad Sci USSR，1944，**44**：365.

[3]　McMillan E M. Phys Rev，1945，**68**：143.

[4]　Lee S Y. Accelerator Physics(2nd Edition). Shanghai：Fudan University Press，2006，309－315.

[5]　Gradshteyn I S，Rizhik I M. Table of Integral，Series and Products. London：Academic Press，Inc Ltd，1980，917－919.

[6]　Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques. New York：John Wiley & Sons，1981，226－244.

[7]　Luo Shiyu，Shao Mingzhu ，Hu Xiduo. HEP&NP，2004，**28**(1)：96(in Chines).
(罗诗裕，邵明珠，胡西多.高能物理与核物理，2004，**28**(1)：96.)

[8]　Shao Mingzhu，Luo Shiyu. Acta Phys Sin，2007，**56**(6)：3407 (in Cinese).
(邵明珠，罗诗裕. 物理学报，2007，**56**(6)：3407.)

[9]　Luo Shiyu，Shao Mingzhu，Luo Xiaohua. Sci Chin，2010，**G40**(2)：207 (in Chinese).
(罗诗裕，邵明珠，罗晓华. 中国科学，2010，**G40**(2)：207.)

[10]　Wu Muying，Chen Qiong，Li Hongtao，*et al*. Nuclear Physics Review，2010，**27**(1)：107(in Chinese).
(吴木营，陈琼，李洪涛，等.原子核物理评论，2010，**27**(1)：107.)

[11] Luo Xiaohua, He Wei, Luo Shiyu, *et al*. Nuclear Physics Review, 2009, **26**(3): 242(in Chinese).
(罗晓华, 何为, 罗诗裕, 等. 原子核物理评论, 2009, **26**(3): 242.)

[12] Zhang Mei, Shao Mingzhu, Luo Shiyu. Nuclear Physics Review, 2007, **24**(4): 318(in Chinese).
(张梅, 邵明珠, 罗诗裕. 原子核物理评论, 2007, **24**(4):318)

# Multi-scalar Techniques and Stabilities of Longitudinal Motion of Particles in Quasi-isochronous Synchrotron*

XIAO Hui-juan[1], LUO Shi-yu[2,#], SHAO Ming-zhu[2]

(1 *Computer College, Dongguan University of Technology, Dongguan* 523106, *Guangdong, China*;
2 *College of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan* 523106, *Guangdong, China*)

**Abstract**: In the classical mechanics frame and with small amplitude approximation, the longutudial motion equation of particles in quasi-isochronous syhchrotron is reduced to the general Weierstrass equation with a damping term and a forced term. In the non-perturbed case, the phase plane properties are analysed by using Weierstrass function; in the perturbed case, the stabilities are discussed in terms of the multi-scalar techniques. The results show that the separatrix orbit is a homoclinic orbit through the instable point in the phase plane, the surrounding area is the fish form or $\alpha$-form. The stabilities are determined by the fish area, the large the area, the better the stability; also the results show that there are $\omega_m=2$, 1/2 super- and sub-harmonics resonance except the main resonance $\omega_m=1$, the critical condition of an instability is found.

**Key words**: synchrotron; phase motion; multi-scalar technique; Weierstrass equation; stability

* **Received date**: 11 Jul. 2010; **Revised date**: 24 Jan. 2011

* **Foundation item**: National Natural Science Foundation of China(10947140); Natural Science Foundation of Guangdong Province (10451170003004948); Dongguan Science and Technology Program(2008108101002, 200910814047)

# **Corresponding author**: Luo Shi-yu, E-mail: luoshy@126.com