

文章编号: 1007-4627(2011)01-0063-05

# 正弦平方势与环形加速器的弯晶束流引出<sup>\*</sup>

范丽仙, 罗诗裕<sup>#</sup>, 邵明珠

(东莞理工学院电子工程学院, 广东 东莞 523106)

**摘要:** 在经典力学框架内和偶极近似下, 引入正弦平方势, 把粒子在弯晶中的运动方程化为具有固定力矩的摆方程。利用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分分析了系统的相平面特征。导出了弯晶的最大偏转能量、退道系数和退道长度。计算结果表明, 对于曲率半径为 1 m, 能量为 1.0 GeV 的质子, Si(110)面沟道的引出效率为 70%; 对于 MeV 范围的粒子, 退道长度大约是  $\mu\text{m}$  量级; 对于 TeV 范围的粒子, 退道长度可达 1 m 以上。

**关键词:** 加速器; 弯晶; 束流控制; 引出效率

**中图分类号:** O571.5      **文献标识码:** A

## 1 引言

1976 年, 前苏联科学家 Kumakhov 发现了沟道辐射<sup>[1]</sup>, 同年, Tsyganov 预言了可以利用弯晶来控制带电粒子<sup>[2]</sup>。1979 年, 前苏联 DUBNA 联合核子研究所的科学家们在实验上首次发现了弯晶沟道现象, 并与欧洲核子研究中心(CERN)和彼得堡的科学家一道对这一现象进行了理论研究。1984 年, DUBNA 首次实现了对能量为 1 GeV 的质子束偏转<sup>[3]</sup>。1996 年, 俄国高能物理研究所(IHEP)的科学家们实现了对能量为 70 GeV 质子束的控制<sup>[4-5]</sup>; 同时, CERN 实现了对能量为 120<sup>[6]</sup>和 450 GeV 质子束的偏转<sup>[7-8]</sup>; 而美国费米国家实验室(Fermilab)实现了更高能量(900 GeV)的质子束控制<sup>[9]</sup>。

多年来, 弯晶的束流控制技术得到了迅速的发展<sup>[10-14]</sup>。早在 1989 年, IHEP 就把这一技术纳入了它的科学发展规划, 并在 1996 年, 成功引出能量为 70 GeV 的质子束时, 引出效率达到了 85%, 而束流强度也达到  $4 \times 10^{12}$  particles; 2009 年 10 月投入运行的欧洲粒子加速器 LHC 也利用了这一引出技术。事实证明, 利用弯晶控制正的带电粒子是非常有效的, 只需在束流通道上放上一定长度的常曲率弯晶或变曲率弯晶即可实现对束流的准直、切割、偏转和引出等。

注意到弯晶的束流控制很大程度上决定于粒子的退道长度, 而粒子退道长度与粒子的能量(相对论因子  $\gamma$ )成正比, 能量越高退道长度越长。对于 MeV 范围的粒子, 退道长度只有  $\mu\text{m}$  量级; 对于 TeV 范围的粒子, 退道长度可达到 1 m 以上。对于中低能加速器的弯晶束流控制正在研究中。事实上, 直到 2006 年, 意大利弗拉斯卡迪国家实验室(INFN)才首次建成了可以控制能量低于 GeV 粒子的实验装置, 并实现了对能量为 480 MeV 的正电子的偏转。实验结果表明, 正电子通过 1 mm 长的硅单晶后, 束流方向可以偏转 10 mrad。本文的目的就是试图引入正弦平方势对弯晶的束流控制做一解析的理论描述。首先, 在经典力学框架内和偶极近似下, 引入我们曾经使用过的正弦平方势<sup>[15-18]</sup>, 把粒子运动方程化为具有固定力矩的摆方程。利用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分分析了系统的相平面特征, 利用能量法讨论了粒子的退道行为, 导出了弯晶的最大偏转能量、退道系数和退道长度。对于曲率半径为 1 m, 能量为 1.0 GeV 的质子, Si(110)面沟道的引出效率  $\beta=70\%$ 。

## 2 运动方程

设  $(x, z)$  平面是晶体未弯曲情况下系统的横截

\* 收稿日期: 2010-06-29; 修改日期: 2010-07-29

\* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(8151170003000010, 10451170003004948)

作者简介: 范丽仙(1976-), 女(汉族), 广东东莞人, 硕士研究生, 工程师, 从事大学物理和光电子技术实验研究。

# 通讯联系人: 罗诗裕, E-mail: bgluoshy@dgut.edu.cn

面, 粒子运动方向为  $z$ 。选择沟道中心为坐标原点, 过原点作一平面与晶面平行, 这个平面称为沟道中心平面。如果将晶体弯曲, 曲率半径为  $R$ , 则粒子的横向运动可表示为

$$r(t) = R + x(t), \quad (1)$$

其中  $x(t)$  是粒子离开中心平面的距离。图 1(a) 给出了弯晶环形束流引出的示意图。图 1(a) 给出了曲率半径为  $R$  的弯晶, 虚曲线表示粒子围绕中心平面的振荡  $x(t)$ ; 图 1(b) 给出了弯晶作为引出元件及其相对配置。

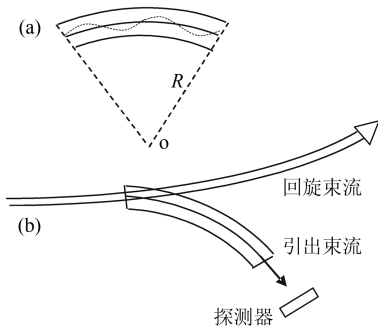


图 1 弯晶的环形束流引出示意图

(a) 常曲率弯晶, (b) 弯晶作为引出元件及相对配置。

注意到运动在弯晶沟道中的粒子, 除了受到晶格场作用外, 还将受到晶体弯曲产生的离心力作用。在偶极近似下, 粒子的横向运动  $x(t)$  可以用经典方法来描述。根据牛顿第二定律, 如果不考虑运动阻尼, 描述  $x(t)$  的运动方程可以表示为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d}{dx} V(x) = p v \kappa_0, \quad (2)$$

其中  $\kappa_0 = 1/R$ , 右端项是晶体弯曲对粒子产生的离心力,  $V(x)$  是粒子-晶体相互作用势,  $p$  是粒子动量,  $v$  是粒子速度, 在相对论情况下有  $m = m_0 \gamma$ , 而  $m_0$  是粒子静止质量,  $\gamma$  是相对论因子。

一般说来, 相互作用势  $V(x)$  可以取不同形式 (比如 Lindhard 势、Molierwe 势和正弦平方势等)。引入正弦平方势<sup>[15-22]</sup>:

$$V(x) = V_0 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{d} \right),$$

其中,  $V_0$  是势阱深度,  $d$  是晶面间距。令

$$\xi = \frac{2\pi x}{d}, \quad \delta = \frac{2\pi^2 V_0}{m d^2},$$

$$\tau = \delta^{1/2} t, \quad \sigma = \frac{2\pi p v \kappa_0}{m \delta d}$$

可将运动方程(2)化为

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \sin \xi = \sigma. \quad (3)$$

这是一个带有固定力矩的摆方程, 当  $\sigma = 0$  时退化为经典摆方程。可以看出, 粒子在弯晶中的运动行为等价于直沟道中运动的粒子受到大小为  $\sigma$  的固定力矩作用。假设  $\sigma$  是一小量, 系统的基本特征由无扰动方程 ( $\sigma = 0$ ) 决定, 而  $\sigma$  的作用仅导致系统出现小的变化。

### 3 相平面特征

#### 3.1 三类相轨道

对于无扰动系统  $\sigma = 0$ , 方程(3)化为如下形式:

$$\dot{\xi} = \zeta, \quad \dot{\zeta} = -\sin \xi \quad (4)$$

的正则方程, 系统(4)在相平面 ( $\xi, \zeta$ ) 上有一个平衡点  $(0, 0)$  和两个非平衡点  $(-\pi, 0)$  和  $(\pi, 0)$  点。积分一次可得系统的 Hamiltonian 量

$$h = \frac{\zeta^2}{2} + (1 - \cos \xi). \quad (5)$$

根据  $h$  的大小, 相平面上的轨道可分为三类。

(1) 异宿轨道 ( $h = 2$ )

$$\xi = \pm 2 \arctg (sh\tau), \quad \zeta = \pm 2 \operatorname{sech}(\tau). \quad (6)$$

(2) 振荡型周期轨道 ( $0 < h < 2$ )

$$\xi = 2 \arcsin (ksn\tau), \quad \zeta = 2kcn(\tau), \quad (7)$$

其中,  $k^2 = h/2$ ,  $k \in (0, 1)$ ,  $sn\tau$  和  $cn\tau$  是 Jacobian 椭圆函数。

(3) 旋转型周期轨道 ( $h > 2$ )

$$\xi = \pm 2 \arcsin \left( sn \frac{\tau}{\kappa} \right), \quad \zeta = \pm \frac{2}{\kappa} dn \frac{\tau}{\kappa}, \quad (8)$$

其中,  $\kappa' = \sqrt{2/h}$ ,  $dn\tau$  为 Jacobian 椭圆函数。正是这三类轨道决定了弯晶沟道粒子运动的全局行为。

#### 3.2 稳定区

系统的稳定性与相平面上异宿(或同宿)轨道包围的相面积有关, 相面积越大系统越稳定。当  $\sigma = 0$  时, 相面积最大,  $\sigma \neq 0$  时相面积减小,  $\sigma$  越大相面积越小, 系统的稳定性越差; 当  $\sigma = 1$  时, 稳定区消失, 系统处于临界状态。

图 2 给出了主值范围内  $\sigma=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  和 1 时相面积的变化。从图 2 可以看出,  $\sigma=0$  时, 异宿轨道包围的相面积最大, 稳定区呈“橄榄形”;  $\sigma \neq 0$  时, 异宿轨道退化为同宿轨道, 同宿轨道包围的区域呈“鱼形”(或  $\alpha$ -形)。随着  $\sigma$  值的不断增加, “鱼形”区面积越来越小, 系统越来越不稳定。当  $\sigma=1$  时, 相面积为零, 相轨线由虚线给出。

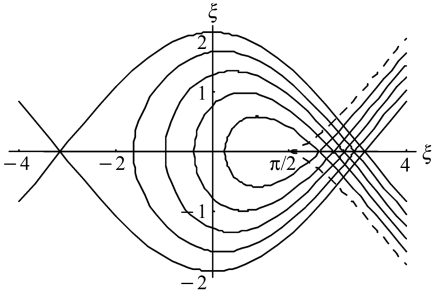


图 2  $\sigma=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  和 1(从外向内依次排列)时系统的相平面特征

### 4 退道效应

由于晶体弯曲、电子多重散射和晶格热振动等因素的影响, 粒子的横向能量将不断增加, 当它的横向能量大于势阱深度时, 粒子将离开沟道, 这个现象称为退道。退道现象会减少束流强度, 是弯晶束流处理技术中应当尽量抑制或克服的。

#### 4.1 束流偏转

根据方程(2)的平衡条件, 可导出弯晶的最大偏转能量:

$$\epsilon_{\max} = \frac{V_0}{4\pi^2} \left( \frac{R_{\min}}{d} \right), \quad (9)$$

其中  $R_{\min}$  是最小曲率半径。对于不同的晶体, 势阱深度  $V_0$  的取值不同, 一般情况下,  $V_0$  的取值范围为 10—100 eV。对于硅(110)面沟道, 势阱深度  $V_0 = 27$  eV,  $d = 1.92 \times 10^{-10}$  m, 当它的最小曲率半径  $R_{\min} = 1$  m 时, 偏转的最大能量可达  $\epsilon_{\max} = 560$  GeV。目前, 在加速器技术中已有越来越多的实验室在使用弯晶来准直、偏转或引出束流。下面, 就对弯晶的退道系数和引出效率进行讨论。

#### 4.2 退道系数与引出效率

系统相面积的变化是由于外力矩( $\sigma$ )作用引起的。根据刘维定理, 对于保守系统, 相面积保持不变。由于弯晶等效于外力矩的作用, 系统的相面积

将发生变化。当“时间” $\tau < 0$ (粒子未进入弯晶)时, 系统是保守的; 当  $0 < \tau < \tau_0$ (弯晶内部)系统受到外力矩作用, 系统是非保守系统; 当  $\tau > \tau_0$ (穿过弯晶)时, 系统又恢复为保守系统。设  $\tau < 0$  时系统的相面积(橄榄形区域)为  $s_0$ ,  $\tau > \tau_0$  时相面积(鱼形区域)为  $s$ , 则力矩引起的相面积变化可表示为

$$\Delta s = s - s_0. \quad (10)$$

假设粒子相空间密度是均匀的, 退道系数可定义为

$$\eta = \frac{\Delta s}{s_0}, \quad (11)$$

两条异宿轨道(6)包含的相面积为

$$s = \int_{-\pi}^{\pi} \zeta d\xi = 8\kappa' [E(\kappa, \phi) - \kappa' F(\kappa, \phi)], \quad (12)$$

其中,  $F(\kappa, \phi)$  和  $E(\kappa, \phi)$  分别是第一类和第二类椭圆积分, 而  $\phi = \arcsin \kappa$ 。

对式(12)“微分”求出  $\Delta s$ , 并代入式(11), 可得系统退道系数:

$$\eta = \frac{F(\kappa, \varphi)h - 4\sqrt{2}h^{\frac{3}{2}} [E(\kappa, \varphi) - \kappa' F(\kappa, \varphi)]}{4[E(\kappa, \varphi) - \kappa' F(\kappa, \varphi)]} \Delta h. \quad (13)$$

上式表明, 只要求出外力矩作用下系统的 Hamiltonian 增量  $\Delta h$ , 弯晶的退道系数即可求出。而引出效率  $\beta$  则定义为

$$\beta = 1 - \eta. \quad (14)$$

当  $\sigma$  是一小量时, 系统的基本特征保持不变。于是, 系统的解可近似地表示为

$$\xi_1 = \xi + O(\sigma) \quad \zeta_1 = \zeta + O(\sigma), \quad (15)$$

其中  $O(\sigma)$  表示与  $\sigma$  同阶的小量, 而  $\xi$  和  $\zeta$  是无扰动系统( $\sigma=0$ )(4)的解。从物理上考虑, 扰动系统相当于外力矩作用使系统能量增加所作的功。而外力矩作功可以表示为

$$\Delta W = \int_0^{\tau_0} \sigma d\xi, \quad (16)$$

积分上下限由晶体弯曲范围决定。将式(6)代入上式, 完成积分, 可得沟道粒子经外力矩作用后的能量增量:

$$\Delta h = \Delta W = \pm 2\sigma [\arctg(sh\tau_0) - \xi_0], \quad h=2 \quad (17)$$

可以看出, 由于外力矩作用, 粒子通过常曲率弯晶后, 能量增加了  $\Delta W$ 。于是, 由式(5), 扰动系统的能量积分可近似地表示为

$$\frac{\xi^2}{2} + (1 - \cos\xi) = h + \Delta W. \quad (18)$$

以硅单晶为例, 假设曲率半径为 1 m, 能量为 1.0 GeV 的质子运动在 Si(110) 面沟道中, 由式(13)和(14)可求出弯晶的引出效率为  $\beta=70\%$ 。

### 4.3 退道长度

使用晶体来准直、偏转和引出束流时, 退道长度这个量十分重要。注意到当带电粒子同物质相互作用时, 由于退道效应, 束流密度会越来越小, 直接影响到束流偏转和引出效率。下面从统计方法出发进行分析。设  $n(z)$  是晶体厚度为  $z$  处的束流密度,  $\lambda$  是粒子的退道常数, 则距离变化  $dz$  后束流密度的减少量  $dn(z)$  可表示为

$$dn(z) = -\lambda n(z) dz. \quad (19)$$

积分(19)式, 可得

$$n(z) = n_0 e^{-\lambda z}, \quad (20)$$

其中  $n_0$  是  $z=0$  处的束流密度。定义束流密度减小到原来  $1/e$  时的沟道长度称为退道长度, 并用符号  $L_d$  表示。由式(20), 可将退道长度表示为  $L_d = 1/\lambda$ 。对于给定的晶体, 退道长度与粒子能量有关, 与弯晶曲率半径有关, 且一般表示为  $L_d(\gamma, R)$ 。

考虑到晶格热振动和电子多重散射, 对于常曲率弯晶, 退道长度  $L_d(\gamma, R)$  可表示为

$$L_d(\gamma, R) = \left(1 - \frac{R_c}{R}\right) L_d(\gamma, \infty), \quad (21)$$

其中

$$R_c = \frac{\epsilon}{V'_{\max}} \quad (22)$$

是临界曲率半径,  $\epsilon = m_0 c^2 (\gamma - 1)$  是粒子能量,  $V'_{\max}$  是最大离心力, 而  $L_d(\gamma, \infty)$  是未弯曲晶体的退道长度。从式(21)可以看出, 对于直单晶 ( $R \rightarrow \infty$ ), 自然退化为  $L_d(\gamma, R) = L_d(\gamma, \infty)$ 。  $L_d(\gamma, \infty)$  可从原子碰撞和电子多重散射理论导出:

$$L_d(\gamma, \infty) = \frac{256\gamma}{9\pi^2} \frac{M a_{TF}}{Z r_c} \frac{d}{\Lambda}, \quad (23)$$

其中,  $a_{TF}$  是 Thomas-Fermi 屏蔽距离,  $r_c = 2.8 \times 10^{-15}$  m 是电子经典半径,  $Z$  和  $M$  是粒子的电荷数 (以电子电荷为单位) 和质量数 (以电子质量为单位), 而

$$\Lambda = \begin{cases} \ln \frac{2\epsilon}{I} - 1, & (\text{重离子}) \\ \ln \frac{\sqrt{2}\epsilon}{\gamma^{1/2} I} - \frac{23}{24}, & (\text{正电子}) \end{cases} \quad (24)$$

是 Coulomb 对数,  $I$  是原子的电离势, 一般为几个 eV。

作为束流处理元件, 要求弯晶的长度  $L$  必须满足条件  $L \leq L_d$ 。从式(23)和(24)可以看出, 对于重离子, 退道长度与它的能量 (相对论因子  $\gamma$ ) 成正比; 对于正电子, 退道长度近似与  $\gamma$  成正比。

## 5 结论

10 多年来, 弯晶的束流控制技术得到了迅速的发展。本文在经典力学框架内和偶极近似下, 引入我们曾经使用过的正弦平方势, 把粒子运动方程化为具有常数力矩的摆方程。利用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分分析了系统的相平面特征, 利用能量法讨论了粒子的退道行为, 导出了弯晶的最大偏转能量、退道系数和退道长度。对于曲率半径为 1 m, 能量为 1.0 GeV 的质子, Si(110) 面沟道的引出效率  $\beta=70\%$ ; 作为束流处理元件, 要求弯晶长度  $L$  必须满足条件  $L \leq L_d$ , 而退道长度  $L_d$  与它的能量 (相对论因子  $\gamma$ ) 成正比。对于能量为 MeV 量级的粒子,  $L_d$  只有  $\mu\text{m}$  量级; 对于能量为 TeV 量级的粒子,  $L_d$  可达 1 m 以上。

### 参考文献 (References):

- [1] Kumakhov M A. Phys Lett, 1976, **A57**, 17.
- [2] Tsyganov E N. Fermi Lab. **TM-682**; 1976.
- [3] Andreev V A, Bauublis V V, Damaskinskij E A. Pisma ZhETF, 1984, **39**: 58-61 (Russian).
- [4] Asseev A A, Gorin M Yu. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 210.
- [5] Chesnokov Yu A. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 163.
- [6] Elsener K, Fidecano G, Gir M. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 215.
- [7] Baurichter A, Kirsebom K, Medeuwadt R. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 172.
- [8] Doble N, Gatigton L, Grafstrom P. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 181.
- [9] Murphy C T, Carrigan R, Chen D. Nucl Instr and Meth, 1996, **B119**: 231.
- [10] Benedikt M. Nucl Instr and Meth, 2005, **A539**: 25.
- [11] Baranov V T. Nucl Instr and Meth, 2006, **B252**: 32.
- [12] Bellucci S. JETP Lett, 2006, **83**: 95 (Russian).
- [13] Bellucci S, Balasubramanian S, Grilli A, *et al.* Nucl Instr and Meth, 2006, **B252**: 3.

- [14] Bellucci S, Biryukov V M. *Phys Rev ST Accel Beams*, 2007, **10**: 013501.
- [15] Luo Shiyu, Shao Mingzhu, Hu Xiduo. *HEP&NP*, 2004, **28**(1): 96(in Chinese).  
(罗诗裕, 邵明珠, 胡西多. 高能物理与核物理, 2004, **28**(1): 96.)
- [16] Hu Xiduo, Luo Shiyu, Shao Mingzhu. *HEP&NP*, 2004, **28**(2): 196(in Chinese).  
(胡西多, 罗诗裕, 邵明珠. 高能物理与核物理, 2004, **28**(2): 196.)
- [17] Luo S Y, Shao Mingzhu. *Acta Phys Sin*, 2006, **55**(3): 1324 (in Chinese).  
(罗诗裕, 邵明珠. 物理学报, 2006, **55**(3): 1324.)
- [18] Shao Mingzhu, Luo Shiyu. *Acta Phys Sin*, 2007, **56**(6): 3407 (in Chinese).  
(邵明珠, 罗诗裕. 物理学报, 2007, **56**(6): 3407.)
- [19] Luo Shiyu, Shao Mingzhu, Luo Xiaohua. *Sci Chin Physics, Mechanics & Astronomy*, 2010, **40**(2): 207 (in Chinese).  
(罗诗裕, 邵明珠, 罗晓华. 中国科学 物理学, 力学和天文学, 2010, **40**(2): 207.)
- [20] Wu Muying, Chen Qing, Li Hongtao, *et al.* *Nuclear Physics Review*, 2010, **27**(1): 107(in Chinese).  
(吴木营, 陈琼, 李洪涛, 等. 原子核物理评论, 2010, **27**(1): 107.)
- [21] Luo Xiaohua, He Wei, Luo Shiyu, *et al.* *Nuclear Physics Review*, 2009, **26**(3): 242(in Chinese).  
(罗晓华, 何为, 罗诗裕, 等. 原子核物理评论, 2009, **26**(3): 242.)
- [22] Zhang Mei, Shao Mingzhu, Luo Shiyu. *Nuclear Physics Review*, 2007, **24**(4): 318(in Chinese).  
(张梅, 邵明珠, 罗诗裕. 原子核物理评论, 2007, **24**(4): 318.)

## Sine-squared Potential and Beam Extraction in Circulation Accelerator by Bent Crystal<sup>\*</sup>

FAN Li-xian, LUO Shi-yu<sup>#</sup>, SHAO Ming-zhu

(*Dongguan University of Technology, Dongguan 523106, Guangdong, China*)

**Abstract:** In the classical mechanics frame and the dipole approximation the particle motion equation in bent crystal is reduced to the pendulum equation with a constant momentum by using the sine-squared potential. The phase planar properties are analysed by means of Jacobian elliptic function and the elliptic integral. The maximum deflected energy, the dechanneling factor and the dechanneled length are derived. The results show that the extrated efficiency is 70% for a proton beam with energy  $E=1.0$  GeV moved in the channel on Si(110) if a radius of curvature  $R=1$  m; and dechanneled length is of the order of  $\mu\text{m}$  for the particles with MeV energy; the dechanneled length is above 1 meter for the particle with TeV energy.

**Key words:** accelerator; bent crystal; beam control; extrated efficiency

\* **Received date:** 29 Jun. 2010; **Revised date:** 29 Jul. 2010

\* **Foundation item:** Natural Science Foundation of Guangdong Province( 8151170003000010, 10451170003004948)

# **Corresponding author:** Luo Shi-yu, E-mail: bgluoshy@dgut.edu.cn