

文章编号: 1007-4627(2011)01-0051-04

# 球对称非谐势阱中玻色-爱因斯坦凝聚 Gross-Pitaevskii 方程的精确解\*

王艳, 郝瑞宇

(长治学院电子信息与物理系, 山西 长治 046011)

**摘要:** 考虑了描述玻色-爱因斯坦凝聚的 Gross-Pitaevskii(GP)方程, 得到了在球对称非谐势阱中玻色-爱因斯坦凝聚 GP 方程的精确亮孤子解。

**关键词:** 亮孤子; Gross-Pitaevskii 方程; 玻色-爱因斯坦凝聚

**中图分类号:** O412      **文献标识码:** A

## 1 引言

玻色-爱因斯坦凝聚体具有奇特性质, 通过它可以探究原子间的相互作用力、外场等作用力对凝聚过程及动力学的影响。目前对玻色爱因斯坦凝聚的多数研究已把目标锁定在开发、操控和揭示宏观量子现象上<sup>[1-12]</sup>, 而且随着玻色-爱因斯坦凝聚实验不断取得进展, 与宏观量子现象相关的应用也受到关注。而在这些应用中, 对物质波孤子的操控是一个重要课题。通过 Feshbach 共振可改变原子间的相互作用, 产生吸引或排斥的玻色-爱因斯坦凝聚体<sup>[13-14]</sup>, 而且外势场也可通过各种技术手段加以控制。在玻色-爱因斯坦凝聚的研究过程中, 通过调节外势场来操控凝聚体已成为人们关注的焦点。

玻色-爱因斯坦凝聚在平均场理论框架下可以用 Gross-Pitaevskii(GP)方程来描述:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\psi|^2 \psi - V(\mathbf{r})\psi = 0, \quad (1)$$

其中,  $\Psi(t, \mathbf{r})$  是凝聚体波函数;  $m$  是原子的质量;  $a$  是 s 波散射长度, 对于吸引势它取正值, 对于排斥势它取负值;  $V(\mathbf{r})$  是外势场。

获得不同类型 GP 方程的精确解, 对于研究玻色-爱因斯坦凝聚的行为具有重要的意义。对三维非谐势阱中玻色-爱因斯坦凝聚 GP 方程的解

也有过讨论<sup>[15]</sup>, 但没有获得精确解。在这篇文章中, 我们得到了在球对称非谐势阱中玻色-爱因斯坦凝聚 GP 方程的精确亮孤子解, 也就是玻色-爱因斯坦凝聚的基态波函数, 而且讨论了通过调节外势场来操控凝聚体。

## 2 球对称非谐势阱中玻色-爱因斯坦凝聚 GP 方程的精确亮孤子解

先讨论在原子间相互吸引作用下的玻色-爱因斯坦凝聚, 此时 GP 方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{4\pi\hbar^2 |a|}{m} |\psi|^2 \psi - V_1(\mathbf{r})\psi = 0, \quad (2)$$

其中外势场  $V_1(\mathbf{r})$  是球对称的抛物势和高斯势联合作用的形式:

$$V_1(\mathbf{r}) = \epsilon r^2 + \xi \exp(-\sigma^2), \quad (3)$$

其中,  $\epsilon$  和  $\xi$  分别表示抛物势和高斯势的强度,  $\sigma$  表示高斯势的宽度。由于外势场  $V_1(\mathbf{r})$  是球对称形式, GP 方程的解应具有球对称形式:

$$\psi(t, r) = \rho F(r) \exp(-ikt), \quad (4)$$

其中  $k$  是波数。将(4)式代入方程(2)中, 得到:

$$k\hbar\rho F + \frac{\rho\hbar^2}{2m} \nabla^2 F + \frac{4\pi\hbar^2 |a|}{m} \rho^3 F^3 - \rho\epsilon r^2 F - \rho\xi \exp(-\sigma^2) F = 0, \quad (5)$$

\* 收稿日期: 2010-04-27; 修改日期: 2010-05-18

\* 基金项目: 山西省青年科技研究基金资助项目(2008012002-2)

作者简介: 王艳(1979—), 女(汉族), 山西长治人, 讲师, 从事理论物理的研究; E-mail: wangyan\_7911@163.com

其中  $F(r)$  满足边界条件  $r \rightarrow \infty, F(r) \rightarrow 0$ 。方程(5) 有 高 斯 形 式 的 解：

$$F(r) = \exp(-\eta^2 r^2) \tag{6}$$

将(6)式代入方程(5)得到如下的可解条件：

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{m\epsilon}{2\hbar^2}}, \\ \rho &= \sqrt{\frac{m\xi}{4\pi\hbar^2|a|}}, \quad k = 3\sqrt{\frac{\epsilon}{2m}} \end{aligned} \tag{7}$$

在(7)式的条件下，球对称势阱和亮孤子解分别写为

$$V_1(r) = \epsilon r^2 + \xi \exp\left(-\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} r^2\right), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \psi(t, r) &= \sqrt{\frac{m\xi}{4\pi\hbar^2|a|}} \exp\left(-\sqrt{\frac{m\epsilon}{2\hbar^2}} r^2\right) \times \\ &\exp(-i3\sqrt{\frac{\epsilon}{2m}} t) \end{aligned} \tag{9}$$

GP 方程(1)适用于弱相互作用的稀薄气体，稀薄近似的有效表征参数为在一散射体积  $|a|^3$  内粒子数远小于 1，即要求  $|\psi(r, t)|^2 |a|^3 \sim m|a|^2 \xi / 4\pi\hbar \ll 1$ 。可根据具体的实验条件来选择合适的  $\xi$  值满足此条件。选取  $\epsilon$  值时，要同时考虑实验条件所能提供的抛物势的强度值和高斯势的宽度值。

为了讨论问题的方便，对方程(2)以及外势场(8)和亮孤子解(9)进行简化处理：

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \psi + |\psi|^2 \psi - V_1(\mathbf{r}) \psi = 0, \tag{10}$$

$$V_1(r) = \epsilon' r^2 + \xi' \exp(-\sigma' r^2), \tag{11}$$

$$\psi(t, r) = \rho' \exp(-\eta' r^2) \exp(-ik't), \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \alpha \epsilon, \quad \xi' = \beta \xi, \quad \sigma' = \sqrt{\frac{\alpha \hbar^2}{m}} \sigma, \quad \eta' = \sqrt{\frac{\alpha \hbar^2}{m}} \eta, \\ \rho' &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar^2|a|\beta}{m}} \rho, \quad k' = \sqrt{\alpha m} k \end{aligned} \tag{13}$$

(13)式中引入  $\alpha$  和  $\beta$  是为了使参量变为无量纲的数， $\epsilon', \xi', \sigma', \eta', \rho'$  和  $k'$  不是真实的实验参数，仅是实验参数的反映。由(7)式和(13)式可得到：

$$\sigma' = \sqrt{2\epsilon'}, \quad k' = 3\sqrt{\frac{\epsilon'}{2}}, \quad \eta' = \sqrt{\frac{\epsilon'}{2}}, \quad \rho' = \sqrt{\xi'} \tag{14}$$

在(14)式的条件下，球对称势阱和亮孤子解分别写为

$$V_1(r) = \epsilon' r^2 + \xi' \exp(-\sqrt{2\epsilon'} r^2), \tag{15}$$

$$\psi(t, r) = \sqrt{\xi'} \exp\left(-\sqrt{\frac{\epsilon'}{2}} r^2\right) \exp\left(-i3\sqrt{\frac{\epsilon'}{2}} t\right) \tag{16}$$

采用上述方式，现在讨论在原子间相互排斥作用下的玻色-爱因斯坦凝聚，此时 GP 方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{4\pi\hbar^2|a|}{m} |\psi|^2 \psi - V_2(\mathbf{r}) \psi = 0, \tag{17}$$

其中

$$V_2(r) = \epsilon r^2 - \xi \exp\left(-\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} r^2\right),$$

$\psi(t, r)$  如(9)式所示，利用(13)式对方程(17)进行简化处理：

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \psi - |\psi|^2 \psi - V_2(\mathbf{r}) \psi = 0. \tag{18}$$

简化处理后的外势场  $V_2(r)$  为

$$V_2(r) = \epsilon' r^2 - \xi' \exp(-\sqrt{2\epsilon'} r^2), \tag{19}$$

简化处理后的亮孤子解如(16)式所示。

由(15)式和(19)式看到，外势场中的抛物势和高斯势是相互关联的，即调节抛物势的强度时，必须同时调整高斯势的宽度。图 1 和图 2 表示保持高斯势的强度不变，而改变抛物势的强度时(表示高斯势宽度的参量也相应的改变)，球对称势阱  $V_1(r)$  ((15)式)和  $V_2(r)$  ((19)式)(在  $y=0, z=0$  处)的形

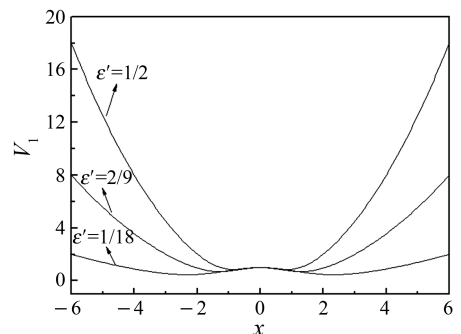


图 1 球对称势阱  $V_1(r)$  ((15)式)的形状(在  $y=0, z=0$  处)比较图

参数取值分别为  $\xi'=1, \epsilon'=1/18, \epsilon'=2/9$  和  $\epsilon'=1/2$ 。

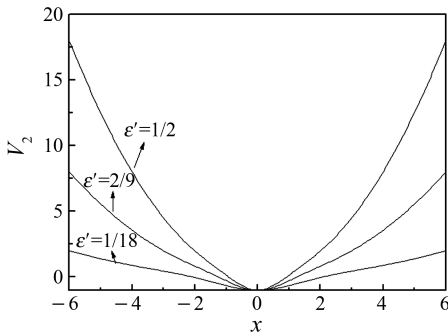


图 2 球对称势阱  $V_2(r)$ ((19)式)的形状(在  $y=0, z=0$  处)比较图(参数取值与图 1 相同)

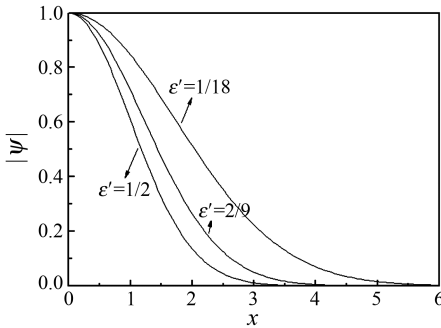


图 3 基态波函数((16 式)的形状比较图(参数取值与图 1 相同)

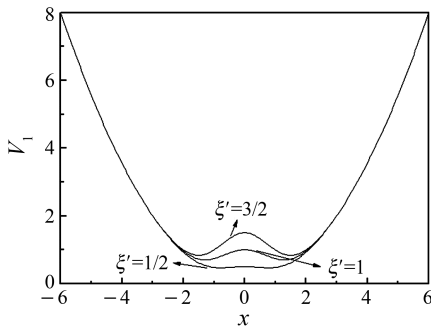


图 4 球对称势阱  $V_1(r)$ ((15)式)的形状(在  $y=0, z=0$  处)比较图

参数取值分别为  $\epsilon' = 2/9, \xi' = 1/2, \xi' = 1$  和  $\xi' = 3/2$ 。

状比较图,两图的参数选取得相同;图 3 表示选择与图 1 相同的参数时,基态波函数((16)式)的形状比较图。从图中可看到,  $\epsilon'$  取值越大,外势场越陡峭,相应的基态波函数的尺度就越小,同时中心波包也变得尖锐。也就是说,凝聚体原子云半径减小,凝聚体范围缩小,原子数目减少。图 4 和图 5 表示保持抛物势的强度不变,而改变高斯势的强度时,球对称势阱  $V_1(r)$ ((15)式)和  $V_2(r)$ ((19)式)(在  $y=0, z=0$  处)的形状比较图,两图的参数选取得相同;图 6 表示选择与图 4 相同的参数时,基

态波函数((16)式)的形状比较图。从图中可以看到,  $\xi'$  取值越大,外势场中心突起越高(对  $V_1(r)$ )或中心越尖(对  $V_2(r)$ ),相应的基态波函数的振幅就变大,同时中心波包也变得尖锐。也就是说,凝聚体原子云半径不变,而原子的密度增加,原子的数目增加。

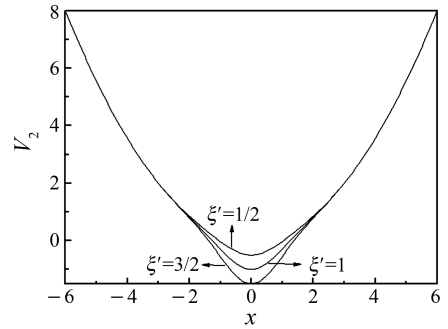


图 5 球对称势阱  $V_2(r)$ ((19)式)的形状(在  $y=0, z=0$  处)比较图(参数取值与图 4 相同)

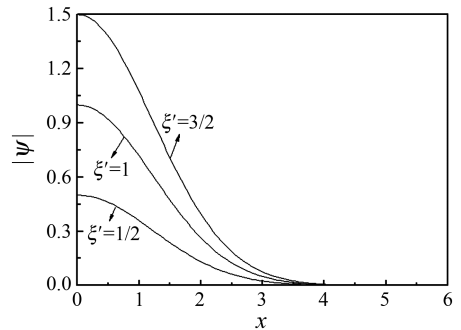


图 6 基态波函数((16 式)的形状比较图(参数取值与图 4 相同)

### 3 结论

本文通过求解球对称非谐外势场中的 GP 方程,得到了玻色-爱因斯坦凝聚的严格的高斯形式基态波函数。不论对原子间的吸引相互作用还是排斥相互作用,只要加上相应合适的外势场,都能得到玻色-爱因斯坦凝聚的基态波函数;而且可以通过调节外势场中高斯势和抛物势的强度以及高斯势的宽度,来调节凝聚体原子云半径的大小和粒子密度的大小,达到控制凝聚体的目的。

### 参考文献 (References):

[1] Fallani L, Sarlo L D, Lye J E, *et al.* Phys Rev Lett, 2004, **93**: 140406.

- [2] Huang G X, Deng L, Hang C. Phys Rev, 2005, **E72**: 036621.
- [3] Merhasin I M, Malomed B A, Band Y B. Phys Rev, 2006, **A74**: 033614.
- [4] Barontini G, Modugno M. Phys Rev, 2007, **A76**: 041601.
- [5] Cheng R, Liang J Q. Chin Phys, 2007, **16**(3): 834.
- [6] Xi X Q, Liu W M. Chin Phys, 2007, **16**(7): 1858.
- [7] Zhou X Y, Mu A X, Xue J K. Chin Phys, 2007, **16**(11): 3197.
- [8] Mu A X, Zhou X Y, Xue J K. Chin Phys, 2008, **B17**(3): 764.
- [9] Wen W, Zhou Y, Huang G X. Phys Rev, 2008, **A77**: 033623.
- [10] Yu Z X, Liang J Q, Jiao Z Y. Chin Phys Lett, 2006, **23**(8): 2004.
- [11] Xu J, Hai W H, Li H. Chin Phys, 2007, **16**(8): 2244.
- [12] Carr L D, Brand J. Phys Rev, 2004, **A70**: 033607.
- [13] Kagan Yu, Surkov E L, Shlyapnikov G V. Phys Rev Lett, 1997, **79**: 2604.
- [14] Cornish S L, Claussen N R, Roberts J L, *et al.* Phys Rev Lett, 2000, **85**: 1795.
- [15] Sun Changyong, Zhou Yuxin, Li Shufeng, *et al.* 2008, **25**(6): 1372(in Chinese).  
(孙长勇, 周玉欣, 李书锋, 等. 原子与分子物理学报, 2008, **25**(6): 1372.)

## Exact Bright Soliton Solution of Gross-Pitaevskii Equation in Spherical Symmetry Non-harmonic Trap<sup>\*</sup>

WANG Yan<sup>1)</sup>, HAO Rui-ye

(*Department of Electronic Information and Physics, Changzhi University, Changzhi 046011, Shanxi, China*)

**Abstract:** In this paper, we analyze Gross-Pitaevskii equation which describes the dynamics of a bright soliton in trapped atomic Bose-Einstein condensates, and obtain the exact bright soliton solution of Gross-Pitaevskii equation in spherically-symmetric non-harmonic trap.

**Key words:** bright soliton; Gross-Pitaevskii equation; Bose-Einstein condensate

\* Received date: 27 Apr. 2010; Revised date: 18 May 2010

\* Foundation item: Provincial Youth Science Foundation of Shanxi Province(2008012002-2)

1) E-mail: wangyan\_7911@163.com