文章编号：1007－4627(2010)04－0432－04

多分量对偶超导理论和口袋模型*

王纯锴[1,2]，邹丽平[1,2]，张鹏鸣[1,#]
(1 中国科学院近代物理研究所，甘肃 兰州 730000；
2 中国科学院研究生院，北京 100049)

摘　要：基于联络新参数化方案研究了多分量对偶超导模型。给出了多分量 Ginzburg-Landau 模型中的自对偶解，并研究了磁通量子数趋于无穷大时的墙涡旋解，以及与口袋模型之间的联系。

关 键 词：对偶超导理论；涡旋；口袋模型
中图分类号：O413.4　　**文献标识码**：A

1　引言

夸克色禁闭和手征对称破缺是粒子物理中最困扰人们的两个难题，人们提出了各种不同的模型对其予以理解。其中，由 Nambu 和 t'Hooft 等人提出的对偶超导理论[1—4]由于其清晰的物理图像一直吸引着大家的关注。该理论借用电磁对偶的概念，将量子色动力学(QCD)中的色磁场对应于超导中库珀对对应的电场，而色电场对应于超导中的磁场。在超导体中，可将库珀对形成的凝聚体看作"超导真空"，而磁力线被禁闭在穿过超导体的涡旋线中。类似的，QCD 真空可以看作是由色磁荷形成的(具体说就是色磁单极凝聚形成的)，而夸克携带的色电荷则被禁闭在 QCD 真空中的涡旋管中。这些不同构型的涡旋管将夸克连接起来可以形成不同的强子态。例如，哑铃形状的介子，三角形形状的重子，或者闭环形状的胶子球等。利用这些涡旋管模型可以具体研究强子的散射性质[5]。

对偶超导理论经常用对偶 Ginzburg-Landau 理论来表述，在这方面 Toki 等人做了大量的工作，并用对偶 Ginzburg-Landau 理论成功解释了动力学手征对称破缺[6—10]，并且将他们的结果同格点规范理论的计算结果进行了比较。然而在他们的模型中，费米子是人为加入的。为了自然地考虑对偶超导中的费米子，也有人从 Bogoliubov-de-Gennes 方程的角度研究对偶超导模型[11]。

最近，在 Abelian-Higgs 模型中，Bolognesi 等人在考虑大磁通量子的解时发现了存在稳定的墙涡旋解，并将其和口袋模型联系起来[12—14]。这是一个令人惊讶的结果，因为此前人们认为磁通量子数大于 1 的涡旋态是热力学不稳定的，并且半径随着量子数的增加而增大。而 Bolognesi 发现当考虑了涡旋管的内部库仑能、表面张力以及磁场能量后，这种奇特涡旋的半径不随磁通量子数变化，而是基本固定在某个值附近。磁通量子非常大时[15]，标量场在半径处趋向于 Heaviside 函数，形成一个明显的"墙"，因此命名为墙涡旋。

很自然，我们想是否在多分量对偶超导模型中[16—18]也存在类似的墙涡旋。因此本文主要研究多分量 Ginzburg-Landau 模型中磁通量子数很大时的涡旋性质。

2　两分量对偶超导理论

通常对偶超导理论是用对偶 Ginzburg-Landau 理论公式来表述的[19,20]，将其作为非微扰量子色动力学的一个唯象理论。这里需要用到 Abelian 规范固定和 Abelian 投射技术[21]以便丢掉非对角的规范自由度，因此需要假设非微扰物理量中存在 Abelian dominance[22]和磁单极凝聚，然后可以得

* **收稿日期**：2010-02-09；**修改日期**：2010-03-19
* **基金项目**：中国科学院西部之光人才培养计划西部博士项目(O804230XBB)；教育部回国人员科研启动基金资助项目(O804260HGJ)

作者简介：王纯锴(1984—)，男(汉族)，江苏苏州人，硕士研究生，从事理论物理研究。
\# **通讯联系人**：张鹏鸣，E-mail：zhpm@impcas.ac.cn

到 $U(1)^2$ 的对偶 Ginzburg-Landau 理论。

为了能从 QCD 理论推出 Abelian dominance 和磁单极凝聚，Faddeev 和 Niemi 提出了规范场新参数化方案[23, 24]，指出在 QCD 的低能区，应该采用新的、更合理的变量来描述夸克色禁闭等问题。对于 $SU(2)$ 规范势 $A_\mu^a=(A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$，他们建议

$$W_\mu = A_\mu^1 + \mathrm{i}A_\mu^2 = \psi_1 e_\mu + \psi_2^* e_\mu^* \tag{1}$$

基于这些新变量，Niemi 由 $SU(2)$ QCD 规范理论得出了两分量的对偶超导模型[25]：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |(\partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu)\psi_1|^2 + |(\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu)\psi_2|^2 - \lambda(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2 + \gamma(\psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1), \tag{2}$$

其中

$$A_\mu = A_\mu^3, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu。$$

(2)式中，最后一项是约瑟夫森耦合项。

下面基于两分量 Ginzburg-Landau 模型讨论大磁通量子极限下涡旋的性质。先不考虑约瑟夫森耦合，并考虑通常的标量场势能：

$$\mathscr{L} = -|(\partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu)\phi|^2 + \mu\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{2}(\phi^\dagger\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 . \tag{3}$$

首先说明上述系统是等价于推广的 Faddeev-Niemi 模型的[26]，并引入新变量

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\xi, \quad \xi^\dagger\xi = 1,$$

$$\boldsymbol{n} = \xi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\xi, \quad \boldsymbol{n}^2 = 1$$

和诱导规范势

$$C_\mu = \frac{2i}{g}\xi^\dagger\partial_\mu\xi,$$

可以得出如下等式：

$$\partial_\mu\xi|^2 - |\xi^\dagger\partial_\mu\xi|^2 = \frac{1}{4}(\partial_\mu\boldsymbol{n})^2,$$

$$\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu = -\frac{1}{g}\boldsymbol{n}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n}, \tag{4}$$

$$|(\partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu)\phi|^2 = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu\rho)^2 + g^2\rho^2(A_\mu - \frac{\mathrm{i}}{g}\xi^\dagger\partial_\mu\xi)^2\right) + \frac{1}{8}\rho^2(\partial_\mu\boldsymbol{n})^2。 \tag{5}$$

代入前面的系统(3)式，可以得出哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}g^2\rho^2B_\mu^2 + \frac{1}{8}\rho^2(\partial_\mu\boldsymbol{n})^2 + V(\rho) + \frac{1}{4}\left[G_{\mu\nu} - \frac{1}{2g}\boldsymbol{n}\cdot(\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n})\right]^2, \tag{6}$$

其中

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad B_\mu = A_\mu - \frac{C_\mu}{2}$$

这就是推广的 Faddeev-Niemi 模型。

然后，为了具体求解涡旋，取为如下轴对称形式：

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\begin{Bmatrix}\cos\left[\frac{f(r)}{2}\right]\exp(-\mathrm{i}n\varphi)\\ \sin\left[\frac{f(r)}{2}\right]\end{Bmatrix},$$

$$A_\mu = \frac{n}{g}A(r)\partial_\mu\varphi, \tag{7}$$

由此可以得到哈密顿量：

$$H = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{8}\rho^2(\dot{f}^2 + \frac{n^2}{r^2}\sin^2 f) + \frac{\lambda}{8}(\rho^2 - \rho_0^2)^2 + \frac{n^2}{2r^2}\rho^2\left(A - \frac{\cos f + 1}{2}\right)^2 + \frac{n^2\dot{A}^2}{2g^2r^2}, \tag{8}$$

其中 $\rho_0 = \sqrt{2\mu/\lambda}$。

取如下边界条件

$$\dot{\rho}(0) = 0, \quad \rho(\infty) = \rho_0,$$
$$f(0) = \pi, \quad f(\infty) = 0,$$
$$A(0) = 0, \quad A(\infty) = 1, \tag{9}$$

可以得到各种通常的涡旋解[27]，相应拓扑荷为

$$\boldsymbol{Q} = \oint A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu = \frac{4\pi n}{g}。$$

当 $\lambda = g^2$，存在自对偶方程

$$\dot{\rho} \pm \frac{n}{r}\left[A - \cos^2\left(\frac{f}{2}\right)\right]\rho = 0,$$

$$\dot{f} \pm \frac{n}{r}\sin f = 0,$$

$$H \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{2}(\rho^2 - \rho_0^2) = 0。 \tag{10}$$

对于 n 趋于无穷大的情况，几乎可以得到上述自对偶方程的解析解(在 $r=1$ 处存在奇异性)

$$\rho(r) = 1, \quad f(r) = 2\arctan(Cr^{-n}),$$

$$A(r)=\frac{1}{1+C^2 r^{-2n}}\ , \tag{11}$$

其中 C 是积分常数。当磁通量子数 $n\to\infty$，可以得出

$$\rho(r)=1\ ,$$
$$A(r)=\begin{cases}0, & r<1\\ 1, & r>1\end{cases}\ ,$$
$$f(r)=\begin{cases}\pi, & r<1\\ 0, & r>1\end{cases}\ , \tag{12}$$

即 $f(r)$和 $A(r)$趋向于 Heaviside，明显形成了墙涡旋。因此我们说在两分量的 Ginzburg-Landau 理论中存在墙涡旋。

上述两分量对偶超导模型是基于 $SU(2)$QCD 理论得出的，可以猜想对于实际的 $SU(3)$规范场理论可能对应某种三分量的对偶超导模型。下面说明对于三分量的 Ginzburg-Landau 理论墙涡旋同样是存在的。对于三分量 Ginzburg-Landau 理论，

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\mid D_\mu\phi_i\mid^2-V(\mid\phi_i\mid)\ 。 \tag{13}$$

考虑铁磁相：

$$\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}U\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\cos^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\\ \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\end{pmatrix}\ ,$$

这意味着自旋$\langle F\rangle=\zeta_a^* F_{ab}\zeta_b$ 满足 $\langle F\rangle^2=1$ 。

由此三分量模型可以化为

$$F=\int\mathrm{d}r\Big\{\frac{1}{2}(\partial_i\rho)^2+\frac{\rho^2}{4}(\partial_i\hat{n})^2-\mu\rho^2+\frac{\rho^4}{2}(c_0+c_2)+\frac{\rho^2}{4}B_i^2+\frac{1}{4g^2}\left[(\partial_i B_j-\partial_j B_i)-\hat{n}\cdot(\partial_i\hat{n}\times\partial_j\hat{n}\right]^2\Big\}\ ,(i,j=1,2,3)$$

其中

$$\hat{n}=\zeta^\dagger\boldsymbol{\sigma}\zeta=(\sin\beta\cos\alpha,\ \sin\beta\sin\alpha,\ \cos\beta)^T\ ,$$
$$B_i=A_i-\frac{\mathrm{i}}{g}\zeta^\dagger\partial_i\zeta\ 。 \tag{14}$$

可以看出，上述系统与推广的 Faddeev-Niemi 模型(6)式完全一致，因此等价于两分量 Ginzburg-Landau 模型的。这样我们可以说，在三分量 Ginzburg-Landau 模型中墙涡旋也是存在的。

对于存在约瑟夫森耦合时的情况，由以前的研究[27]知道约瑟夫森耦合项只改变涡旋的形状，其基本性质没有变化。墙涡旋的解可以推广到存在约瑟夫森耦合的系统。

另外，由于多分量 Ginzburg-Landau 模型等价于推广的 Faddeev-Niemi 模型，因此在对偶超导理论中存在纽结解[28]，其量子数由 Hopf 数表征

$$Q_{\mathrm{CS}}=-\frac{1}{8\pi^2}\int\varepsilon^{ijk}A_i F_{jk}\mathrm{d}x^3=mn\ ,$$

其中 m 和 n 是整数，分别对应纽结径向和纬向的缠绕数。这种纽结解可以理解为纯粹由胶子构成的胶子球[29—31]。

3 结论

本文论述了多分量对偶 Ginzburg-Landau 模型，求出了磁通量子数趋于无穷大时的墙涡旋解。由我们的解可以明显看出，当磁通量子数变大时，磁矢量势函数接近于 Heaviside 函数。这样，在涡旋半径处形成内外两个真空：库仑真空和 Higgs 真空，分别对应于电磁场占据的禁闭相和标量场占据的凝聚相。在对偶超导理论中意味着夸克被禁闭在磁单极凝聚的真空背景里。这可以看作是口袋模型的微观起源。

参考文献(References)：

[1] Nambu Y. Phys Rev, 1974, **D10**: 4262.
[2] Mandelstam S. Phys Rept, 1976, **23**: 245.
[3] t' Hooft G. Nucl Phys, 1978, **B138**: 1.
[4] Ripka Georges. Dual Superconductor Models of Color Confinement (Lecture Notes in Physics 639). Berlin Heideberg: Springer Verlag, 2004.
[5] Isgur N, Paton J. Phys Lett, 1983, **B124**: 247.
[6] Suganuma H, Sasaki S, Toki H. Nucl Phys, 1995, **B435**: 207.
[7] Sasaki S, Suganuma H, Toki H. Prog Theor Phys, 1995, **94**: 373.
[8] Sasaki S, Suganuma H, Toki H. Phys Lett, 1996, **B387**: 145.
[9] Toki H, Sasaki S, Ichie H, *et al*. Jour Korean Phys Soc (Proc Suppl), 1996, **29**: S346.

[10] Toki H, Suganuma H. Progr Part Nucl Phys, 2000, **45**: S397.

[11] Cardoso M, Bicudo P, Sacramento P D. Ann Phys, 2008, **323** : 337.

[12] Bolognesi S. Nucl Phys, 2005, **B730**: 127.

[13] Bolognesi S, Gudnason S B. Nucl Phys, 2006, **B741**: 1.

[14] Bolognesi S. Nucl Phys, 2006, **B752**: 93.

[15] Xi Guozhu, Jia Duojie, Ji Yonglin, *et al*. Nuclear Physics Review, 2009, **26(3)**: 194(in Chinese).
(席国柱，贾多杰，吉永林，等. 原子核物理学评论，2009，**26(3)**：194.)

[16] Koma Y, Suganuma H, Toki H. Phys Rev, 1999, **D60**: 074024.

[17] Koma Y, Toki H. Phys Rev, 2000, **D62**: 054027.

[18] Koma Y, Koma M, Ebert D, *et al*. Nucl Phys, 2003, **B648**: 189.

[19] Suzuki T. Prog Theor Phys, 1988, **80**: 929.

[20] Maedan S, Suzuki T. Prog Theor Phys, 1989, **81**: 229.

[21] t'Hooft G. Nucl Phys, 1981, **B190**: 455.

[22] Ezawa Z F, Iwazaki A. Phys Rev, 1982, **D25**: 2681; Phys Rev, 1982, **D26**: 631.

[23] Faddeev L D, Niemi A J. Phys Lett, 2002, **B525**: 195.

[24] Faddeev L D, Niemi A J. Nucl Phys, 2007, **B776**: 38.

[25] Niemi A J. Journal of High Energy Physics, 2004, **0408**: 035.

[26] Cho Y M. Phys Rev, 2005, **B72**: 212526; Cho Y M, Zhang P M. Phys Rev, 2006, **B73**: 180506.

[27] Cho Y M, Zhang P M. Eur Phys J, 2008, **B65**: 155.

[28] Babaev E, Faddeev L, Niemi A J. Phys Rev, 2002, **B65**: 100512.

[29] Faddeev L, Niemi A J, Wiedner U. Phys Rev, 2004, **D70**: 114033.

[30] Kondo K I, Ono A, Shibata A, *et al*. J Phys, 2006, **A39**: 13767.

[31] Cho Y M, Park B S, Zhang P M. Int J Mod Phys, 2008, **A23** : 267.

Multi-component Dual Superconductor Theory and Bag Model*

WANG Chun-kai[1,2], ZOU Li-ping[1,2], ZHANG Peng-ming[1,#]

(1 *Institute of Modern Physics, Chinese Academy Sciences, Lanzhou* 730000, *China*;
2 *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract: The multi-component dual superconductor theory has been studied based on the new parameterization of gauge potential. The self-dual vortices of the multi-component Ginzburg-Landau model was investigated. Then we considered the wall vortex whose flux goes to infinity. At last, the relationship between the bag model and wall vortices is considered.

Key words: dual superconductor theory; vortex; bag model

* **Received date**: 9 Feb. 2010; **Revised date**: 19 Mar. 2010

* **Foundation item**: West Light Foundation of Chinese Academy of Sciences (0804230XBB); Scientific Research Foundation for Returned Scholars, Ministry of Education of China(0804260HGJ)

Corresponding author: Zhang Pengming, E-mail: zhpm@impcas.ac.cn