文章编号：1007－4627(2010)02－0155－05

三维谐振子 Wigner 函数的星乘解*

陈德胜，王亚辉#，王 垚，马 凯
(陕西理工学院物理系，陕西 汉中 723001)

摘 要：Wigner 函数作为相空间中的一个准概率分布函数，也是密度矩阵的特殊表示形式，具有十分重要的物理意义。首先介绍了 Wigner 函数的性质及其计算方法，然后利用星本征方程(Moyal 方程)计算了三维谐振子的 Wigner 函数。最后讨论了在相空间中描述声子与电子(或光子)相互作用的方法，并得到了跃迁几率在相空间中所满足的方程。

关 键 词：三维谐振子；Wigner 函数；Moyal-Weyl 乘法；声子

中图分类号：O413.1 **文献标识码**：A

1 引言

最早引进 Wigner 函数是在 1932 年[1]，作为相空间中的一个准概率分布函数，也是密度矩阵的特殊表示形式，它在量子测量中具有十分重要的价值[2]。在描述量子光学、核物理、量子计算、量子混沌以及量子信息的控制和传递中，Wigner 函数也有着非常重要的作用，并且是一个很好的半经典近似[3—7]。在 20 世纪 70 年代以前，Wigner 函数并没有引起人们更多的关注。直到 1975 年，Moyal 才从量子力学的内部逻辑出发，发现了这个引人入胜的量子化方法[8—10]。它和已有的量子化方法(Schrödinger，Heisenberg 算符正则化，Feymen 路径积分量子化)是等价的，它的基本方程是 Moyal 星本征值方程[9—11]。在这种逻辑完整而且独立的量子化方法中，人们不需要选定一个特定的表象空间，如坐标表象或动量表象。不仅如此，不确定关系也容纳在相空间的 Wigner 函数中。更重要的是，Wigner 函数在现代量子测量中具有重要的意义，这个定义与相空间的实函数具有准概率分布函数的性质。例如，在文献[12]中，对于 He(氦)原子束在双缝干涉实验中的 Wigner 函数进行了很巧妙的测量，得到的结果与理论计算相一致。在最近的研究中发现，Wigner 函数所服从的相空间中的星本正值方程，也就是 Moyal 方程中的星乘与超旋理论中非对易几何的 Moyal-Weyl 乘（星乘）是相同的[13, 14]。近年来量子体系的非对易拓扑相位和非对易能级引起了人们极大的兴趣和关注[14—20]。

在本文中首先回顾了 Wigner 函数的性质及其计算方法，然后利用星本征方程(Moyal 方程)求出了三维谐振子的 Wigner 函数。最后讨论了在相空间中描述声子与电子(或光子)相互作用的方法，并给出了跃迁几率在相空间中所满足的方程。

2 Moyal 方程与 Wigner 函数的性质

从经典力学过渡到量子力学的途径中，有 3 种逻辑自洽的量子化方法。第一种是由 Heisenberg，Schrodinger，Dirac 以及其他一些物理学家在 20 世纪 20 年代提出并发展起来的。其方法的核心是在 Hilbert 函数空间中进行算符正则化。第二种方法是由 Feynman 提出并建立起来的路径积分方法。这种方法的理论自洽性以及和其它理论的相容性已经被 Dirac 证明。最后一种方法是基于 Wigner 准概率分布函数在普通相空间的 Moyal 乘法量子化[8]。

Wigner 函数作为相空间中的一个准概率分布函数，是一个很好的半经典近似。在物理量的测量中 Wigner 函数是非常重要的[2]。在自由度 n 的相

* 收稿日期：2009-05-05；修改日期：2010-03-10；
* 基金项目：国家自然科学基金资助项目(10875035)；中国科学院半导体研究所半导体超晶格国家重点实验室开放研究课题项目(CHJG200902)；陕西省科学技术研究发展计划项目(2009K01－54)
作者简介：陈德胜(1956－)，男(汉族)，陕西安康人，副教授，从事量子场论研究；E-mail：chends@snut.edu.cn
通讯联系人：王亚辉，E-mail：wangyahui8312469@163.com

空间中，Wigner 函数的一般形式为

$$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\boldsymbol{p})\times \langle \boldsymbol{x}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{y}|\hat{\rho}|\boldsymbol{x}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{y}\rangle, \tag{1}$$

对于定态有

$$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\varphi^*\left(\boldsymbol{x}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{y}\right)\times \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\boldsymbol{p})\varphi\left(\boldsymbol{x}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{y}\right), \tag{2}$$

它是密度矩阵的一个特殊表示。按照(1)式的定义可以证明，当忽略 $O(\hbar^2)$（或$\partial^\lambda V/\partial x^\lambda=0$，对 $\lambda\geqslant 3$）时，含时 Wigner 函数具有如下与经典力学中的 Liouville 定理相似的动力学演化方程[9, 10]：

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{p}}。\tag{3}$$

对于给定的 Hamiltonian $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$，Wigner 函数的动力学演化方程(3)可改写为如下 Moyal 方程：

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{H *_\hbar W-W *_\hbar H}{\mathrm{i}\hbar}, \tag{4}$$

这里的星乘 $*_\hbar$ 由下式给出：

$$*_\hbar\equiv\exp\left[\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_x\overrightarrow{\partial}_p-\overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_x)\right]。\tag{5}$$

星乘 $*_\hbar$ 包含指数算符，这将使实际计算相当困难。一种更便利的乘法 $*_\hbar$ 可表示为[9]

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})*_\hbar g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})= f\left(\boldsymbol{x}+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\partial_p,\ \boldsymbol{p}-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_x\right)g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}), \tag{6}$$

或者，

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})*_\hbar g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})= f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})g\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_p,\ \boldsymbol{p}+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_x\right), \tag{7}$$

对于能量本征态，Wigner 函数满足更具有约束性的 $*_\hbar$ 本征值方程：

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})*_\hbar W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=H\left(\boldsymbol{x}+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_p,\ \boldsymbol{p}-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_x\right)W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=EW(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}), \tag{8}$$

或者

$$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})*_\hbar H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\times H\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_p,\ \boldsymbol{p}+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_x\right)=EW(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}), \tag{9}$$

这里的 E 是本征方程 $H\varphi=E\varphi$ 的能量本征值。这两个方程决定了 Wigner 函数的性质[9]。

利用(6)和(7)式给出的关于星乘 $*_\hbar$ 计算方法，容易证明方程(4)和(3)是等价的。证明如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t}&=\frac{H *_\hbar W-W *_\hbar H}{\mathrm{i}\hbar}\\&=\left\{\left[\left(p_i-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_{x_i}\right)^2/2m+V\left(x_i+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_{p_i}\right)\right]W-\left[\left(p_i+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_{x_i}\right)^2/2m+V\left(x_i-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_{p_i}\right)\right]W\right\}/\mathrm{i}\hbar\\&\approx\left[\left(-\mathrm{i}\hbar p_i\overrightarrow{\partial}_{x_i}/m+\mathrm{i}\hbar\frac{\overleftarrow{\partial}V}{\partial x_i}V\overrightarrow{\partial}_{p_i}\right)W\right]/\mathrm{i}\hbar\\&=-\frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{p}}。\end{aligned}$$

关于 Wigner 函数更为重要的性质是

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{x}W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\varphi^*(\boldsymbol{p})\varphi(\boldsymbol{p})=\rho(\boldsymbol{p}), \tag{10}$$

以及

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\varphi^*(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})=\rho(\boldsymbol{x}), \tag{11}$$

表明 Wigner 函数对坐标空间（或动量空间）的边缘分布为动量表象（或坐标表象）中的概率密度分布。

3 三维谐振子的波动方程和波函数

普通空间中三维谐振子的 Hamiltonian 为

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2), \tag{12}$$

其定态 Schrödinger 方程为

$$\left[\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right]\psi=E\psi, \tag{13}$$

该方程可以在直角坐标系中用分离变量法求解。由方程的对称性，可令 $\psi=\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)$，$E=E_1+E_2+E_3$。容易得到 φ 所满足的方程为

$$\left(\frac{1}{2\mu}p_1^2+\frac{1}{2}\mu\omega^2x_1^2\right)\psi=E_1\psi, \tag{14}$$

此方程与一维谐振子的定态方程相同，其解为

$$\varphi(x_1)=N_{n_1}\exp\left[\frac{-\varepsilon^2 x_1^2}{2}\right]H_{n_1}(\varepsilon x_1)\ , \qquad (15)$$

其中

$$N_{n_1}=\left(\frac{1}{n_1!\ 2^{n_1}\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\ ,\qquad \varepsilon=\sqrt{m\omega/\hbar}\ ,$$

H_{n_1} 为 Hermite 多项式，相应的能量为 $E_1=\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$，量子数的取值为 $n_1=0，1，2，\cdots$。

同理，$\varphi(x_2)$和 $\varphi(x_3)$具有与 $\varphi(x_1)$相同的形式，因此三维谐振子本征函数及能量本征值为

$$\psi(x_1,x_2,x_3)=N_{n_1}N_{n_2}N_{n_3}\times \exp\left[\frac{-\varepsilon^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{2}\right]\times H_{n_1}(\varepsilon x_1)H_{n_2}(\varepsilon x_2)H_{n_3}(\varepsilon x_3)\ , \qquad (16)$$

$$E_{n_1n_2n_3}=\left(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega\ , \qquad (17)$$

其中 $n_1，n_2，n_3=0，1，2，\cdots$。(16)和(17)式分别给出了三维谐振子的本征函数和能级。利用这个本征函数也可以由公式(2)计算三维谐振子的 Wigner 函数。

4 三维谐振子的 Wigner 函数的星乘解

三维谐振子的 Hamiltonian 为(采用自然单位制：$\hbar=c=1，\omega=m=1$)，

$$H(x,p)=\frac{1}{2}[(p_1^2+x_1^2)+(p_2^2+x_2^2)+(p_3^2+x_3^2)]\ , \qquad (18)$$

按照方程(8)，可以得到相空间中三维谐振子所满足的星本征方程：

$$[x_1^2+p_1^2+x_2^2+p_2^2+x_3^2+p_3^2-\frac{\hbar^2}{4}(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{p_1}^2+\partial_{p_2}^2+\partial_{p_3}^2+\partial_{p_3}^2)+\frac{i\hbar}{2}(x_1\partial_{p_1}-p_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{p_2}-p_2\partial_{x_2}+x_3\partial_{p_3}-p_3\partial_{x_3})-2E]W=0, \qquad (19)$$

考虑方程(9)可以得到：

$$\frac{i\hbar}{2}(x_1\partial_{p_1}-p_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{p_2}-p_2\partial_{x_2}+x_3\partial_{p_3}-p_3\partial_{x_3})W=0\ , \qquad (20)$$

因此，

$$[x_1^2+p_1^2+x_2^2+p_2^2+x_3^2+p_3^2-\frac{\hbar^2}{4}(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{p_1}^2+\partial_{p_2}^2+\partial_{p_3}^2+\partial_{p_3}^2)-2E]W=0\ 。 \qquad (21)$$

令

$$u=\frac{2}{\hbar}(x_1^2+p_1^2)\ ,$$

$$\nu=\frac{2}{\hbar}(x_2^2+p_2^2)\ ,$$

$$z=\frac{2}{\hbar}(x_3^2+p_3^2)\ 。 \qquad (22)$$

我们有

$$\left(\frac{u}{4}-u\partial_u^2-\partial_u+\frac{\nu}{4}-\nu\partial_\nu^2-\partial_\nu+\frac{z}{4}-z\partial_z^2-\partial_z\right)\times W(u,\nu,z)=EW(u,\nu,z)\ 。 \qquad (23)$$

由方程的对称性，可以令(23)式的 $W(u,\nu,z)=W(u)W(\nu)W(z)$，分离变量后可得：

$$\left(\frac{u}{4}-u\partial_u^2-\partial_u-E_1\right)W_1(u)=0, \qquad (24)$$

$$\left(\frac{\nu}{4}-\nu\partial_\nu^2-\partial_\nu-E_2\right)W_2(\nu)=0, \qquad (25)$$

$$\left(\frac{z}{4}-z\partial_z^2-\partial_z-E_3\right)W_3(z)=0, \qquad (26)$$

形式如式(24)微分方程的解在文献[9]已给出，即

$$W_m^{(1)}(u)=\frac{(-1)^n}{\pi\hbar}e^{-u/2}L_n^{(1)}(u)\ , \qquad (27)$$

同理

$$W_n^{(2)}(\nu)=\frac{(-1)^n}{\pi\hbar}e^{-\nu/2}L_n^{(2)}(\nu)\ , \qquad (28)$$

$$W_l^{(3)}(z)=\frac{(-1)^l}{\pi\hbar}e^{-\nu/2}L_n^{(3)}(z)\ , \qquad (29)$$

于是，所得到三维谐振子的 Wigner 函数为

$$W_{mnl}(u,\nu,z)=\frac{(-1)^{m+n+l}}{(\pi\hbar)^3}\times e^{-(u+\nu+z)/2}L_m^{(1)}(u)L_n^{(2)}(\nu)L_l^{(3)}(z)\ 。 \qquad (30)$$

利用(22)式，把(30)式中的变量换成相空间变量$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$，可得：

$$W_{mnl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\frac{(-1)^{m+n+l}}{(\pi\hbar)^3}\times e^{-(x_1^2+x_2^2+p_1^2+p_2^2+x_3^2+p_3^2)/\hbar}L_m\left[\frac{2}{\hbar}(x_1^2+p_1^2)\right]\times L_n\left[\frac{2}{\hbar}(x_2^2+p_2^2)\right]L_l\left[\frac{2}{\hbar}(x_3^2+p_3^2)\right], \qquad (31)$$

这就是三维谐振子的 Wigner 函数。对于基态有：

$$W_{000}(x_1,x_2,p_1,p_2,x_3,p_3)=$$

$$\frac{1}{(\pi\hbar)^3}\mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+p_1^2+p_2^2+x_3^2+p_3^2)/\hbar} \quad , \tag{32}$$

这是相空间中 Gaussian 分布函数，在经典极限下，基态 Wigner 函数将变成为一个三维 δ 函数。

5 声子跃迁的 Wigner 函数描述方法

声子是描述晶格振动的准粒子，是一种典型的集体运动的元激发。当 $T\to 0$ K 时，晶格中的原子在平衡位置处于基态，是一种有序的状态。在外界作用下，例如热扰动或是光的作用，使系统处于激发态，原子偏离平衡位置做小振动。在简谐近似下，通过引入简正坐标，系统的动能和势能分别化为一些平方项之和，其 Hamiltonian 可以写为

$$H=\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}(P_i^2+\omega^2Q_i^2) 。\tag{33}$$

容易看出，三维晶体的声子振动相当于 N 个三维谐振子，其 Wigner 函数的形式与(31)式相同，应为 N 个三维谐振子 Wigner 函数的乘积(或 $3N$ 个一维谐振子 Wigner 函数的乘积)：

$$W=\prod_{i=1}^{N}W_{n_im_il_i}=\prod_{i=1}^{3N}W_{n_i} 。\tag{34}$$

引入声子的 Wigner 函数后，不仅可以用 Wigner 函数的变化来描述声子数的变化，而且可以描述简正运动量子态之间的跃迁。当电子(或光子)与振动的晶格相互作用时，电子从晶格中吸收一个声子(或发射一个声子)，这个过程可以用声子 Wigner 函数的变化来描述：

$$\begin{aligned} a_i * W_{n_i} &= n_i W_{n_i-1} , \\ a_i^+ * W_{n_i} &= (n_i+1)W_{n_i-1} 。\end{aligned}\tag{35}$$

a_i^+ 和 a_i 为相空间中声子的产生与湮灭算符[21]。在相空间中它们所遵守的运算为星乘运算[14]。

现在考虑系统在某种外界作用下体系在定态之间的跃迁几率。设无外界作用时，体系的 Hamiltonian(不显含 t)为 H_0。包括 H_0 在内的一组力学量完全集 F 的共同本征态为 W_n(由于是定态，Wigner 函数不随时间变化，即不显含 t)。设体系初始时刻处于 W_k，当外界作用 $H'(t)$之后，体系不能保持在原来的本征态，而变成 F 的各本征态叠加：

$$W(t)=\sum_k S_{nk}(t)W_k 。\tag{36}$$

将(36)式代入方程(4)，可得

$$\mathrm{i}\hbar\sum_k\frac{\mathrm{d}S_{nk}}{\mathrm{d}t}W_k=\sum_k S_{nk}(H' * W_k - W_k * H') ,\tag{37}$$

上式两边分别左、右星乘 $W_{k'}$，并积分得

$$\mathrm{i}\hbar\sum_k\frac{\mathrm{d}S_{nk}}{\mathrm{d}t}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}p W_{k'} * W_k = \sum_k S_{nk}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}p(W_{k'} * H' * W_k - W_{k'} * W_k * H') ,\tag{38}$$

$$\mathrm{i}\hbar\sum_k\frac{\mathrm{d}S_{nk}}{\mathrm{d}t}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}p W_k * W_{k'} = \sum_k S_{nk}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}p(H' * W_k * W_{k'} - W_k * H' * W_{k'}) ,\tag{39}$$

将以上两式相加，有

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}S_{nk'}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\sum_k S_{nk}\times \int\mathrm{d}x\mathrm{d}p(W_{k'} * H' * W_k - W_k * H' * W_{k'}) ,\tag{40}$$

根据假设，取 $S_{nk}=\delta_{nk}$，则式(40)变为

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}S_{nk'}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}p(W_{k'} * H' * W_n - W_n * H' * W_{k'}) ,\tag{41}$$

因此跃迁几率的近似解为

$$S_{nk'}=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^t\mathrm{d}t\int\mathrm{d}x\mathrm{d}p(W_n * H' * W_{k'} - W_{k'} * H' * W_n) 。\tag{42}$$

由(42)式可以看出，跃迁几率与初态 $W_{k'}$、末态 W_n 以及外界作用 $H'(t)$的性质都有关。特别是如果具有某种对称性，使(42)式中的两部分相互对称，则跃迁几率 $S_{nk'}=0$。最简单的情况为 $[H', H_0]=0$，此时含微扰的 H 可以被对角化，因此微扰作用后的状态保持不变。

6 结论

Wigner 函数作为相空间中的一个准概率分布函数，也是密度矩阵的特殊表示形式，并且是一个很好的半经典近似，它在量子测量中有重要的应用。我们在介绍了求解 Wigner 函数的两种方法——积分法和星本征方程解法的基础上，利用星本征方程(Moyal 方程)求出了三维谐振子中的

Wigner 函数。它的基态函数为 Gaussian 分布函数，其经典近似为一个三维 δ 函数。最后，还介绍了相空间中晶体的声子与电子(或光子)相互作用的描述方法，并得到了跃迁几率在相空间中满足的方程。这一方法在半导体量子结构中的应用以及非对易相空间 Wigner 函数的特性将在以后进一步讨论。

参考文献(References)：

[1] Wigner E . Phys Rev，1932，**40**：749.

[2] Wang Yahui，Wang Jianhua，Ren Yajie，*et al*. Nuclear Physcis Review，2009，**26**(1)：19(in Chinese).
(王亚辉，王剑华，任亚杰等，原子核物理评论，2009，**26**(1)：19).

[3] Wang Yahui，Wang Jianhua，Huang Wendeng. Nuclear Physcis Review，2008，**25**(3)：218(in Chinese).
(王亚辉，王剑华，黄文登. 原子核物理评论，2008，**25**(3)：218.)

[4] Kim Y，Wigner E. Am J Phys，1990，**58**：439.

[5] Hillery M，O'Connell R，Scully M. Phys Repts，1984，**106**：121.

[6] Balasz N，Jennings B. Phys Repts，1984，**104**：347.

[7] Takayuki Hori，Takao Koikawa，Takuya Maki. Prog Theor Phys，2002，**108**：1123.

[8] Lee Hai-Woong. Physcis Reports，1995，**259**：47.

[9] Cosmas Zachos. Int J Mod Phys，2002，**A17**：297.

[10] Nuno C D，Joao N P. J Math Phys，2007，**48**：012109.

[11] Heng Taihua， Li Ping， Jing Sicong. Chinese Phys Lett，2007，**24**(3)：592.

[12] Kurtsiefer Ch，Pfau T，Mlynek J. Nature，1997，**386**：150.

[13] Seiberg N，Witten E. JHEP，1999，**9909**：032.

[14] Li Kang，Wang Jianhua，Dulat Sayipjamal，*et al*. Int J Theor Phys，2010，**49**：134.

[15] Wang Jianhua，Li Kang. J Phys(A：Math. Theor)，2007，**40**：2197.

[16] Wang Jianhua，Li Kang. Chinese Physics Letters，2007，**24**(1)：5.

[17] Li Kang，Wang Jianhua. Eur Phys J，2007，**C50**(4)：1007，hep-th/0608100.

[18] Wang Jianhua，Li Kang. High Energy Physics and Nuclear Physics，2006，**30**(11)：1053(in Chinese).
(王剑华，李康.高能物理与核物理，2006，**30**(11)：1053.)

[19] Wang Jianhua，Li Kang，Liu Peng. High Energy Physics and Nuclear Physics，2006，**30**(5)：387(in Chinese).
(王剑华，李康，刘鹏. 高能物理与核物理，2006，**30**(5)：387.)

[20] Wang Jianhua，Li Kang，Dulat Sayipjamal. Chinese Physics，2008，**C32**(10)：803.

[21] Man'ko V I，Marmo G，Sudarshan E C G，Phys Lett，2008，**A372**：4364.

Solution of Wigner Function's Star-product for 3-D Harmonic Oscillator*

CHEN De-sheng，WANG Ya-hui#，WANG Yao，MA Kai

(*Department of Physics*，*Shaanxi University of Technology*，*Hanzhong* 723001，*Shaanxi*，*China*)

Abstract：As a quasi-probability distribution function in phase-space and a special representation of the density matrix，Wigner function has great significance in physics. In this paper，first，Wigner function's characteristic and calculation approach are introduced. Then，with Star-eigen equation we obtain the Wigner function for three-dimensional harmonic oscillator. In the end，we discuss the method describing the interaction between phonons and electrons (or photons) and obtain the equation that transition probability satisfies in phase space.

Key words：three-dimensional harmonic oscillator；Wigner function；Moyal-Weyl product；phonon

* **Received date**：5 May 2009；**Revised date**：10 Mar. 2010

* **Foundation item**：National Natural Science Foundation of China(10875035)；Open Topic of State Key Laboratory for Superlattices and Microstructures，Institute of Semiconductors，Chinese Academy of Sciences，Institujte of Semiconductors，Chinese Academy of Sciences(CHJG200902)

Corresponding author：Wang Ya-hui，E-mail：wangyahui8312469@163.com