

文章编号: 1007-4627(2010)02-0121-09

能量密度泛函理论和有限力程可分离对相互作用 研究核的超流性质*

马中玉^{1,2}, 田源¹, P. Ring³

(1 中国原子能科学研究院, 北京 102413;

2 兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心, 甘肃 兰州 730000;

3 Physik department, Technische Universität München, D-85748, Garching, Germany)

摘要: 在相对论密度泛函理论框架下引入了可分离的对相互作用, 它的参数是由拟合核物质中 Gogny 力对关联性质来确定。在有限核的相对论 Hartree-Bogoliubov 和相对论准粒子无规位近似的理论框架下, 建立了可分离对相互作用在球形核和变形核中粒子-粒子道矩阵的计算方法。通过 Talmi 和 Moshinsky 变换, 这种新的对相互作用在坐标空间下可以展开成一系列可分离项, 并且很快收敛。它不仅保持了平移不变性, 而且作为有限力程的对力, 可以避免零程对力在高动量截断的困难。通过对 Sn 同位素链核基态、E2 和 E3 激发态性质, 以及 Sm 同位素链基态的性质研究, 发现可分离对相互作用能够再现用 Gogny 对力得到的球形核的超流性质, 并能够很好地符合已有的实验结果。这种方法还可用来描述任意微观对相互作用, 并推广于三轴形变原子核以及转动系统的研究。为考虑角动量投影和粒子数投影的生成坐标(GCM)方法和粒子-振动耦合(PVC)理论提供更加真实的对关联性质描述。

关键词: 可分离有限力程对相互作用; 相对论 Hartree-Bogoliubov 理论; 相对论准粒子无规位近似

中图分类号: O571.2 **文献标识码:** A

1 引言

目前远离稳定线奇异核性质的研究是核物理研究的一个重要领域^[1], 奇异核性质的研究不仅能加深对原子核结构的认识, 对于进一步搞清地球上核素的丰度, 探索宇宙形成的奥秘也是必不可少的。目前, 世界上许多大型的实验室如: 美国的 NCSL、ORNL 和 ANL, 德国的 GSI, 法国的 GANIL, 日本的 RIKEN, 欧洲的 CERN, 俄罗斯的 Dubna 以及加拿大的 TRIUMF 都相继建成了放射性核束装置, 并对远离稳定线奇异核的结构和性质以及核反应机制进行了深入的研究。新一代放射性离子束装置如: 美国的稀有同位素加速器(RIA), 德国 GSI 用于研究离子和反质子的国际加速器和日本的放射

性离子束装置(RIBF)更是极大地推动了对奇异核结构的研究。在我国兰州重离子加速器国家实验室和原子能科学研究院北京串列静电加速器国家实验室建成了 RIBLL 和 GIRAFFE 放射性核束装置, 开展了一系列重要的物理研究。目前兰州大科学工程 CSR 已经成功出束, 正在逐步投入使用, 而放射性核束物理被列为该大科学工程的首要科学目标。原子能科学研究院的科学工程 BRIF 也进展顺利, 这些大科学装置的建立将为放射性核束物理和核天体物理研究提供前所未有的条件和机遇。

基于平均场概念的协变密度泛函理论(DFT)成功地给出了核多体问题的微观自洽描述。传统的密度泛函理论中能量密度 $E(\rho)$ 只包含单粒子密度的

* 收稿日期: 2009-09-08; 修改日期: 2009-09-15

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10875150, 10775183, 10535010); 国家重点基础研究发展规划(2007CB815000); 德国 Bundesministerium für Bildung und Forschung 项目(06 MT246); DFG 优秀团队项目资助(www.universe-cluster.de)

作者简介: 马中玉(1943-), 女(汉族), 浙江杭州人, 学士, 研究员, 博士生导师, 从事原子核多体理论研究;

E-mail: mazy12@ciae.ac.cn

泛函,原则上只适用于一些双满壳核性质的描述。对于开壳核,特别是远离稳定线的奇异核,需要考虑粒子-粒子(pp)相互作用。通常情况下,可以采用 BCS 近似或者 Bogoliubov 变换来处理开壳核中的对关联^[2]。与简单的 BCS 理论相比, Bogoliubov 变换的优点在于同时求解 Hartree-Fock 方程或者 Dirac 方程和对能隙方程。当研究的核不是很远离 β 稳定线时,这两种方法对核的对关联性质能够给出一致的描述。可是当核远离 β 稳定线,特别是靠近滴线附近时,BCS 理论不能给出可靠的结果,这是由于没有正确处理共振态与连续态耦合的贡献而导致的结果^[3, 4]。我们在密度泛函理论框架下采用 Bogoliubov 变换来自洽地处理对相互作用。

有限核对关联性质的 BCS 或 Bogoliubov 理论研究中,对相互作用通常采用简单的常数对力近似或者密度相关的 δ 对相互作用。采用这种零程对相互作用,对能密度泛函求和是发散的,必须引入一个截断来约束能量求和。这个截断值不能通过实验给出,是人为引入的参数^[5, 6]。对于给定的截断,对能隙强度 Δ 是由拟合原子核奇偶质量差得到。在自洽理论求解的过程中,硬性截断会使得迭代反复跳动难以收敛,需要引入一种平滑的截断^[7]。然而无论截断如何选取,人为引入参数都会增加计算的复杂程度,不同核需要不同的参数也降低计算的可信度,限制了它们的推广应用。Gogny 在 1980 年提出了一种 Brink-Booker 形式的有限力程的相互作用^[8]。有限力程使得对相互作用随着动量增加而递减,并保证对能隙方程自动收敛。Gogny 力的参数是通过拟合有限核性质和微观核力性质得到^[8, 9]。经过多年的实践证明,这个对力能够很好地描述有限核的对关联性质。但是,正是由于 Gogny 力的有限力程,使得有限核计算变得很复杂而且计算量很大,很难推广到平均场以外的高阶计算。

针对这些问题,我们在相对论密度泛函理论框架下引入了新的可分离对相互作用,它的参数是通过拟合核物质中 Gogny 力对关联性质而得到的。在动量空间下,它的矩阵元性质也与 Gogny 力十分接近^[10]。希望用这个新的可分离对相互作用代替 Gogny 对力应用于有限核的研究,使它既能给出 Gogny 对力的特性,又能简化计算。首先在相对论 Hartree-Bogoliubov(RHB)的理论框架下建立可分离对相互作用 pp 道的矩阵计算方法^[11]。在有限核

计算中对相互作用从动量空间转换到坐标空间,它们是核子对质心坐标和相对坐标的函数,而计算对相互作用矩阵必须在核子对的实验室坐标系中实现。引进 Talmi-Moshinsky 变换,将这个对相互作用在坐标空间下展开成一系列可分离项。虽然它们不再是完全可分离的,但研究发现这些展开项能很快收敛。在 RHB 理论中采用这个可分离对相互作用计算球形核以及轴对称形变核的基态性质,并在相对论准粒子无规位相近似(RQRPA)下研究激发态性质。计算结果与 Gogny 对力计算结果比较,讨论这种新的可分离对力在球形核基态、激发态以及变形核计算中能否再现 Gogny 对力的对关联性质。

文章安排如下:第 2 节中,引入高斯形的可分离对相互作用,并通过在核物质中拟合 Gogny 对力的对能曲线来确定参数。第 3 节中,介绍通过 Talmi-Moshinsky 变换在有限核中计算可分离对相互作用矩阵,用 RHB 和 RQRPA 理论研究球形核基态和激发态的对关联性质。第 4 节中,讨论轴对称形变核,在轴对称形变下,建立了一维和二维 Talmi-Moshinsky 变换,应用于变形核的 RHB 计算,研究变形核的基态对关联性质。最后第 5 节给出结论。

2 可分离对相互作用

在核物质中,平面波波函数可以由动量 \mathbf{k} 和自旋 s 来表征:

$$\varphi_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\chi_s. \quad (1)$$

用平面波作为基矢,反对称的对相互作用 V^{1s_0} 矩阵元可以表示为

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{k}_1 s_1 \mathbf{k}_2 s_2 | \frac{1}{2}(1 - P_\sigma)V^{1s_0} | \mathbf{k}'_1 s'_1 \mathbf{k}'_2 s'_2 \rangle_a = \\ &\frac{1}{2}\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | V^{1s_0} | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle_s (\delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2} - \delta_{s_1 s'_2} \delta_{s_2 s'_1}), \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | V^{1s_0} | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle = \\ &\langle \mathbf{k} | V^{1s_0} | \mathbf{k}' \rangle \times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}'), \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ 和 $\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ 分别是粒子对的总动量和相对动量。人们知道,裸相互作用在低能情况

下可以近似写成非定域的可分离形式^[12]。因此将质心坐标中对相互作用写成可分离的形式:

$$\langle \mathbf{k} | V^{1S_0} | \mathbf{k}' \rangle = -Gp(k)p(k'). \quad (4)$$

这里只考虑同类粒子间的相互作用, 即 $T=1$ 道的对相互作用, 通常 $T=0$ 道矩阵元的影响很小, 在表达式中没有包含同位旋量子数。假定 $p(k)$ 简单地取为高斯型函数 $p(k) = e^{-a^2 k^2}$, G 和 a 是两个参数, G 表示对相互作用的强度。

在 1S_0 道得到平面波下的 BCS 能隙方程^[13, 14]:

$$\Delta(k) = - \int_0^\infty \frac{k'^2 dk'}{2\pi^2} v(k, k') \frac{\Delta(k')}{2E(k')}, \quad (5)$$

其中准粒子能量为

$$E(k) = \sqrt{(\epsilon(k) - \mu)^2 + \Delta^2(k)}. \quad (6)$$

单粒子能量 $\epsilon(k)$ 与单粒子态 ϕ_k 相关。 μ 是化学势, 由密度决定。通过解 BCS 能隙方程可以得到对能隙与密度, 即费米动量之间的关系, 从而给出了对相互作用的性质。

将可分离对相互作用 $Gp(k)p(k')$ 代入到方程 (5) 中, 能隙方程可以简单化简为 $\Delta(k) = \Delta_0 p(k)$, 并且满足方程:

$$1 = - \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{4\pi^2} \frac{Gp^2(k)}{\sqrt{(\epsilon(k) - \mu)^2 + \Delta_0^2 p^2(k)}}, \quad (7)$$

Δ_0 与费米动量 k_F 有关。

对不同密度的核物质求解 Gogny 力^[15] 在 1S_0 道的能隙方程 (5), 得到对能隙随费米动量的变化曲线。采用单高斯函数型的可分离对相互作用拟合 Gogny 力的对能隙曲线, 确定可分离对相互作用的

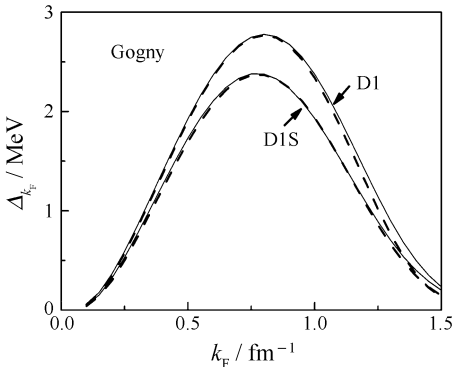


图 1 核物质中 1S_0 道对能隙随费米动量的变化曲线

实线是由 Gogny(D1) 和 (DIS) 计算得到的对能隙曲线, 其相应的可分离对力得到对能隙曲线由虚线表示。

参数 G 和 a 。对于 (D1) 参数^[8] 得到 $G=738 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3$ 和 $a=0.636 \text{ fm}$; 对于 (DIS) 参数^[9] 得到 $G=728 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3$ 和 $a=0.644 \text{ fm}$ 。图 1 给出了 1S_0 道分别由 Gogny 力和其相应的可分离对力得到对能隙(虚线)曲线。这个简单高斯型的可分离对力能够很好地符合 Gogny 力特别是 Gogny(D1S) 参数组的能隙曲线^[11]。低密度部分符合得非常好, 只有当密度 $k_F > 1.0 \text{ fm}^{-1}$ 时才会出现差别。如果采用多高斯可分离形式的对相互作用, 可以得到完全的拟合, 在后面介绍的计算方法和过程完全相同。在 Gogny 对力情况下, 多高斯的修正很小, 不会改变讨论的结论。本文仅采用单高斯可分离对力形式。

3 球形核基态和激发态的对关联性质

通过拟合 Gogny 力在核物质情况下的对关联性质, 可得到高斯函数型的可分离对相互作用, 并且发现在动量空间下这种可分离形式对相互作用的矩阵元分布与 Gogny 力基本相同。要将这个可分离对力用于有限核的计算, 需要将动量空间的可分离对相互作用转换到坐标空间:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = -G\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')P(r)P(r')\frac{1}{2}(1-P^\sigma), \quad (8)$$

其中 $\mathbf{R}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$ 和 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ 分别为核子对的质心坐标和相对坐标。 $P(r)$ 是方程 $p(k)$ 通过 Fourier 变换得到的结果。如果采用单高斯型可分离对相互作用, 可以得到

$$P(r) = \frac{1}{(4\pi a^2)^{3/2}} e^{-r^2/4a^2}. \quad (9)$$

由于方程 (8) 中存在的 δ 项, 这个对相互作用在坐标空间下不能写成完全的可分离形式。

从球谐振子基出发:

$$|nljm_j\rangle = \varphi_{nljm_j}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r, b)[Y_l(\hat{r}) \otimes \chi_{\frac{1}{2}}^{\pm}]_{jm_j}, \quad (10)$$

其中, $R_{nl}(r, b) = b^{-\frac{3}{2}} R_{nl}(r/b)$, $[Y_l(\hat{r}) \otimes \chi_{\frac{1}{2}}^{\pm}]_{jm_j}$ 代表自旋和角动量耦合合成总角动量为 jm_j 的波函数。径向波函数可以写成:

$$R_{nl}(x) = \sqrt{\frac{2n!}{\left(n+l+\frac{1}{2}\right)!}} x^l L_n^{l+(1/2)}(x^2) e^{-x^2/2}, \quad (11)$$

其中, 径向量子数为 $n=0, 1, \dots$, 轨道角动量为 l , 谐振子长度 $b=\sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ 。在 $1S_0$ 道, 只需要两体波函数耦合得到总角动量 $J=0$, 而投影算符 $(1-P^\sigma)/2$ 保证量子数 $\lambda=J, S=0$ 。两体波函数由 jj 耦合变换到 LS 耦合, 可以写成:

$$|12\rangle_J = \frac{\hat{j}_1 \hat{j}_2}{s} \begin{Bmatrix} j_2 & l_2 & \frac{1}{2} \\ l_1 & j_1 & J \end{Bmatrix} \times R_{n_1 l_1}(r_1, b) R_{n_2 l_2}(r_2, b) |\lambda=J\rangle |S=0\rangle, \quad (12)$$

其中, $\hat{j}=\sqrt{2j+1}$, $s=1/2$ 。所有这些波函数都是在两核子的实验室坐标系下表示的, 而可分离对相互作用(8)是在质心 \mathbf{R} 和相对 \mathbf{r} 坐标系下表示的。因此需要利用 Talmi-Moshinsky 括号^[16-18]将谐振子基从实验室系变换到质心和相对坐标系下。这里采用 Baranger^[19]的定义:

$$|n_1 l_1, n_2 l_2; \lambda_\mu\rangle = \sum_{NLnl} M_{n_1 l_1 n_2 l_2}^{NLnl} |NL, nl; \lambda_\mu\rangle, \quad (13)$$

其中

$$M_{n_1 l_1 n_2 l_2}^{NLnl} = \langle NL, nl, \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \rangle \quad (14)$$

为 Talmi-Moshinsky 括号, 并且遵循以下选择定则:

$$2N + L + 2n + l = 2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2. \quad (15)$$

由此, 波函数(12)在质心和相对坐标系可以写成:

$$|12\rangle_J = \frac{\hat{j}_1 \hat{j}_2}{s} \begin{Bmatrix} j_2 & l_2 & \frac{1}{2} \\ l_1 & j_1 & J \end{Bmatrix} \sum_{NL} \sum_{nl} M_{n_1 l_1 n_2 l_2}^{NLnl} \times R_{NL}(R, b_R) R_{nl}(r, b_r) |\lambda=J\rangle |S=0\rangle, \quad (16)$$

质心和相对坐标系下谐振子基的长度可以写成 $b_R = b/\sqrt{2}$ 和 $b_r = b\sqrt{2}$ 。于是这个新的对相互作用在谐振子基下的矩阵元可以表示为

$$V_{12, 1'2'}^{pp1} = G \sum_N V_{12}^N \times V_{1'2'}^N, \quad (17)$$

其中

$$V_{12}^N = \sqrt{4\pi} \frac{\hat{j}_1 \hat{j}_2}{s} \begin{Bmatrix} j_2 & l_2 & \frac{1}{2} \\ l_1 & j_1 & J \end{Bmatrix} \times$$

$$M_{n_1 l_1 n_2 l_2}^{NJn0} \int_0^\infty R_{n0}(r, b_r) P(r) r^2 dr. \quad (18)$$

为了研究球形核基态的对关联性质, 将可分离对相互作用总角动量耦合成 $J=0$ 并代入到相对论 Hartree-Bogoliubov 方程中:

$$\begin{pmatrix} h_D - \mu & \Delta \\ \Delta & -h_D + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}_k = E_k \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}_k, \quad (19)$$

h_D 为 Dirac Hamiltonian 量, 对场为

$$\Delta_{12} = G \sum_N P_N V_{12}^N, \quad (20)$$

定义 P_N 为

$$P_N = \frac{1}{2} \sum_{12} V_{12}^N \kappa_{12} = \frac{1}{2} \text{Tr}(V^N \kappa), \quad (21)$$

对张量 $\kappa=UV^T$ 。有限核基态的对能为

$$E_{\text{pair}} = -G \sum_N P_N^* P_N. \quad (22)$$

这里所有的计算都采用 NL3^[20] 参数组, Dirac-Bogoliubov 旋量在 20 个谐振子基主壳下展开。

图 2 给出了同位素链 $^{100}\text{Sn}-^{160}\text{Sn}$ 和 $^{164}\text{Pb}-^{264}\text{Pb}$ 的中子对能随中子数的变化, 实线为采用 Gogny 力的 RHB 理论计算得到的中子对能随中子数的变化,

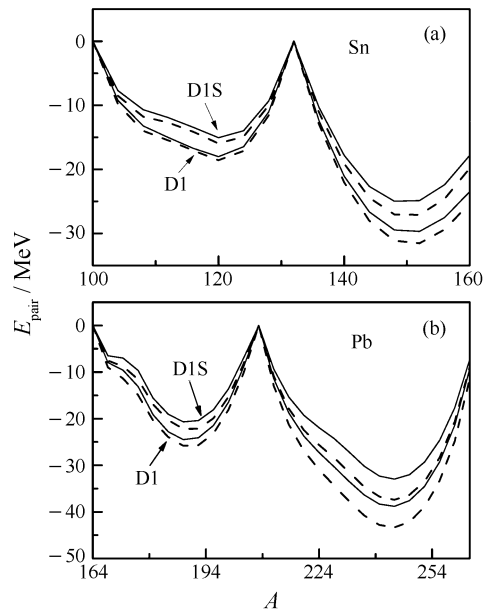


图 2 相对论 Hartree-Bogoliubov 计算 Sn 同位素链核(a)和 Pb 同位素链核(b)的中子对能 Gogny 力 D1 和 D1S 的结果用实线表示, 相应的可分离对力的结果用虚线表示。

虚线为拟合 Gogny 力得到的可分离对相互作用计算结果。通过比较可以发现，可分离形式的对相互作用能够很好地再现 Gogny 对力计算的有限核的对关联性质，用新的可分离对相互作用计算的对能略大于 Gogny 对力计算的结果^[11]。

半满壳核的最低 2^+ 激发态对核的对关联性质是非常敏感的，因此，在 RHB+RQRPA 理论下采用这个新的对相互作用计算了 Sn 同位素链核 E2 矮共振激发态^[21, 22]。对于球形核激发态，需要计算总角动量耦合为 J 的对相互作用，代入到 RQRPA 方程，并求解，得到巨共振激发态的能量和激发强度。图 3 给出了 Sn 同位素链核的最低 2^+ 态的激发能量 E_{2^+} 和跃迁几率 $B(E2) \uparrow$ 随中子数的变化。如图 3 所示，可分离对相互作用能够很好地符合 Gogny 力在激发态的对关联性质。同样，可分离对相互作用计算的激发能量要比 Gogny 力得到的略大，这是因为在基态情况下可分离对力得到对能隙略大即对场略大，而对场越大，最低级能量激发就越困难。因此可分离对相互作用会得到比 Gogny 力略大的结果，这与我们 RHB 计算结果相一致。

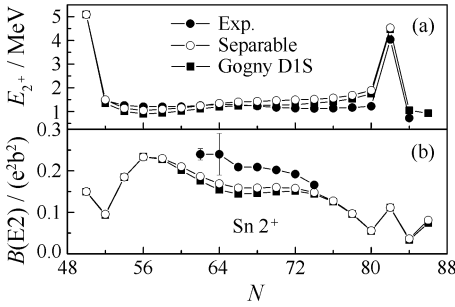


图 3 Sn 同位素链最低级 2^+ 激发能量 E_{2^+} 和跃迁几率 $B(E2) \uparrow$ 随中子数变化

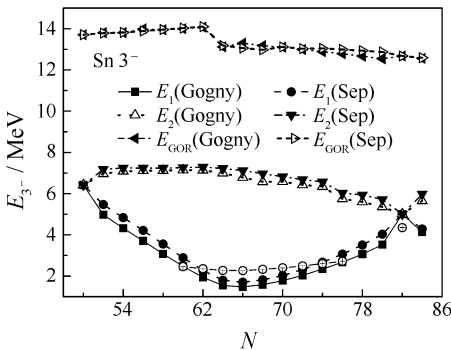


图 4 Sn 同位素链的第一(E_1)、第二(E_2)两条最低级共振能量随中子数的变化，以及巨八极共振峰值能量随中子数的变化(星线为实验结果)

另外，利用 RHB+RQRPA 理论计算了 Sn 同位素链的八极振动激发模式^[22]。图 4 给出了 $J^\pi = 3^-$ 第一、第二两条最低级共振能量随中子数变化，同时还给出了巨八极共振峰值能量随中子数的变化。与实验观察的最低级 3^- 态激发能^[23]相比，两种对力都能很好地描述实验。

4 轴对称变形核基态的对关联性质

在轴对称形变下，核系统具有旋转对称不变性，采用柱坐标来描述：

$$x = r_{\perp} \cos\varphi, \quad y = r_{\perp} \sin\varphi, \quad z, \quad (23)$$

其中 z 为旋转对称轴， r_{\perp} 为垂直对称轴平面的径向方向。与球形核计算相比，在柱坐标下计算可分离对相互作用 pp 道矩阵元需要建立一维和二维的质心坐标到实验室坐标的变换方法。

轴对称形变的谐振子基波函数可以用以下几个量子数来表征：

$$|\alpha\rangle = |n_z, n_p, m_l, m_s\rangle, \quad (24)$$

其中 m_l, m_s 分别为轨道角动量和自旋沿对称轴的分量，对称算符 J_z 的本征值 $\Omega = m_l + m_s$ 和宇称 $\pi = (-)^{n_z + m_l}$ 为守恒量。变形谐振子波函数可写成：

$$\Phi_{\alpha}(z, r_{\perp}, \varphi, s) = \frac{1}{\sqrt{b_z b_{\perp}^2}} \phi_{n_z}(z) \phi_{n_p}^{l, m_l}(r_{\perp}) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \varphi} \chi_{m_s}(s), \quad (25)$$

其中

$$\phi_{n_z}(z) = \mathcal{N}_{n_z} H_{n_z}(\zeta) e^{-\zeta^2/2},$$

$$\phi_{n_p}^{m_l}(r_{\perp}) = \mathcal{M}_{n_p}^{m_l} \sqrt{2} \eta^{m_l} L_{n_p}^{m_l}(\eta^2) e^{-\eta^2/2}, \quad (26)$$

$H_n(\zeta)$ 和 $L_n^m(\eta)$ 分别为 Hermite 多项式和缔合的 Laguerre 多项式，

$$\zeta = \frac{z}{b_z}, \quad \mathcal{N}_{n_z} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^{n_z} n_z!}},$$

$$\eta = \frac{r_{\perp}}{b_{\perp}}, \quad \mathcal{M}_{n_p}^{m_l} = \sqrt{\frac{n_p!}{(n_p + m_l)!}}. \quad (27)$$

可分离形式的对相互作用矩阵元可以写成：

$$\langle 12 | V | 34 \rangle =$$

$$\int \Phi_{\alpha_1}^*(\mathbf{r}_1, s_1) \Phi_{\alpha_2}^*(\mathbf{r}_2, s_2) V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \times$$

$$\Phi_{a_3}(\mathbf{r}_3, s_3)\Phi_{a_4}(\mathbf{r}_4, s_4)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4, \quad (28)$$

由于 $\Omega_1 + \Omega_2 = 0$, $(1 - P^\sigma)/2$, 所以得到: $m_{l_1} + m_{s_1} + m_{l_2} + m_{s_2} = 0$ 。为了将波函数从实验室坐标系变换到质心和相对坐标系, 我们建立了一维和二级的 Moshinsky 括号: $M_{N_z}^{n_{z_1} n_{z_2}}$, $M_{N_p}^{n_{r_1} m_{l_1} n_{r_2} m_{l_2}}$ 。

$$|n_{z_1} n_{z_2}\rangle = \sum_{N_z} M_{N_z}^{n_{z_1} n_{z_2}} |N_z n_z\rangle,$$

$$|n_{r_1} m_{l_1} n_{r_2} m_{l_2}\rangle = \sum_{N_p} \sum_{M_p} M_{N_p}^{n_{r_1} m_{l_1} n_{r_2} m_{l_2}} |N_p M_p n_p m_p\rangle.$$

利用定义

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \binom{n}{m_1 m_2 m_3 m_4} = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3! m_4!}, \quad (29)$$

一维 Moshinsky 括号表示为

$$M_{N_z}^{n_{z_1} n_{z_2}} = \frac{1}{\sqrt{2^{N_z+n_z}}} \sqrt{\frac{n_{z_1}! n_{z_2}!}{N_z! n_z!}} \sum_{s=0}^{n_z} (-)^s \binom{N_z}{n_{z_1} - n_z + s} \binom{n_z}{s}, \quad (30)$$

并且遵循选择定则 $n_{z_1} + n_{z_2} = N_z + n_z$ 。二维 Moshinsky 括号必须满足 $2n_{r_1} + |m_{l_1}| + 2n_{r_2} + |m_{l_2}| = 2N_p + |M_p| + 2n_p + |M_p|$ 和 $m_{l_1} + m_{l_2} = M_p + m_p$,

$$M_{N_p}^{n_{r_1} m_{l_1} n_{r_2} m_{l_2}} = \frac{(-)^{N_p+n_p-n_{r_1}-n_{r_2}}}{\sqrt{2^{2N_p+2n_p+|M_p|+|m_p|}}} \sqrt{\frac{(n_{r_1}!) (n_{r_1} + |m_{l_1}|)! (n_{r_2}!) (n_{r_2} + |m_{l_2}|)!}{(N_p)! (N_p + |M_p|)! (n_p)! (n_p + |m_p|)!}} \times \sum_{Q,R,S=0}^{N_p} \sum_{T=0}^{M_p} \sum_{q,r,s=0}^{n_p} \sum_{t=0}^{m_p} (-)^{r+s+t} \binom{N_p}{N_p - Q - R - S} \binom{M_p}{Q R S} \binom{n_p}{n_p - q - r - s} \binom{m_p}{q r s} \binom{t}{t}. \quad (31)$$

这样便得到在质心和相对坐标系下利用轴对称谐振子展开的对相互作用作用矩阵元:

$$\langle 12 | V | 1'2' \rangle = \langle n_{z_1} n_{r_1} m_{l_1}, n_{z_2} n_{r_2} m_{l_2} | V | n_{z_1'} n_{r_1'} m_{l_1'}, n_{z_2'} n_{r_2'} m_{l_2'} \rangle = -G \sum_{N_z} \sum_{N_p} W_{12}^{N_z N_p} \cdot W_{1'2'}^{N_z N_p}, \quad (32)$$

其中

$$W_{12}^{N_z, N_p} = \frac{1}{b_z^{1/2} b_\perp} \frac{1}{8\pi^{4/2}} V_{12}^{N_z} V_{12}^{N_p}, \quad (33)$$

$$V_{12}^{N_z} = M_{N_z}^{n_{z_1} n_{z_2}} \frac{1}{a_z} \int \phi_{n_z}^0(x) e^{-x^2/4a_z^2} dx,$$

$$V_{12}^{N_p} = M_{N_p}^{n_{r_1} m_{l_1} n_{r_2} m_{l_2}} \frac{1}{a_p} \int \phi_{n_p}^0(x) e^{-x^2/4a_p^2} dx, \quad (34)$$

定义 $\alpha_z = a/b_z$, $\alpha_p = a/b_\perp$ 。

利用可分离形式对相互作用和轴对称形变的 RHB(RHFZ) 方程计算 Sm 同位素链的基态性质^[24]。图 5(a) 给出了 Sm 同位素链从 $N=66$ 到 102 的结合能随中子数变化, 图 5(b) 则给出了不同理论计算结果与实验值的差别随中子数变化。其中, 方块为实验值, 星线为 RMF+BCS 得到的结

果^[25], 三角线为采用 Gogny 作为核子-核子相互作用的非相对论 Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) 计算的结果^[26], 圆线为我们的结果。所有理论计算都

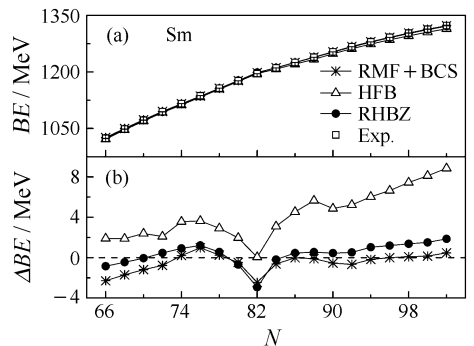


图 5 Sm 同位素链结合能 (BE) 和与实验值差 ΔBE 随中子数变化

能很好地符合实验结果, 采用可分离对相互作用的 RHBZ 理论计算的结合能与实验值相差小于 0.2%。

图 6 给出了 Sm 同位素链从 $N=66$ 到 126 形变值 β 随中子数的变化。采用这种新的可分离对相互作用的 RHBZ 理论计算得到的形变值与 Gogny 力的 HFB 理论结果十分接近, 并能很好地符合实验结果^[27]。虽然简单的 RMF+BCS 理论能够很好地描述变形核的结合能, 但是与 RHBZ 和 HFB 理论相比较, 对于丰中子核的形变的描述还有所欠缺。

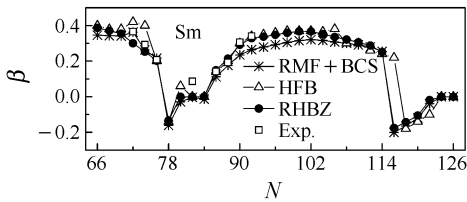


图 6 Sm 同位素链形变值 β 随中子数变化

5 总结

在核物质中引进了单高斯型的可分离对相互作用, 其参数是通过拟合其他对相互作用在核物质中对能隙随密度的变化关系得到的。高斯型的可分离对相互作用不仅具有形式简单、参数少、收敛迅速、能很好地拟合唯象对相互作用 Gogny 力在核物质中的对能隙曲线等优点, 而且它在动量空间的低能矩阵元与 Gogny 力相近。

应用这个新的可分离对相互作用在 RHB 理论下计算了球形核基态和在 RQRPA 理论研究了激发态的对关联性质。通过 Talmi 和 Moshinsky 变换建立了可分离对相互作用在 pp 道的矩阵计算方法^[11, 21, 22]。这种新的对相互作用在坐标空间下展开成一系列可分离项, 研究发现这些项能够很快收敛。通过计算发现, 虽然可分离对相互作用在坐标空间下的矩阵元与 Gogny 力并不完全相同, 但是通过 RHB 方程计算得到的对场矩阵元却非常相似。并且新的对相互作用能够很好地再现用 Gogny 对力计算得到的 Sn 和 Pb 等球型核同位素链的基态性质, 特别是能够很好地符合对能隙随质量数的变化。有限核的最低级 2^+ 激发与有限核的表面振动有关, 对有限核的对关联性质很敏感。通过对 Sn 同位素链和 $N=82$ 同中子异核素链最低级 2^+ 激发

态的研究, 我们发现这个新的对相互作用能够再现用 Gogny 对力得到的有限核激发态的超流性质, 并能够很好地符合已有的实验结果。

我们在轴对称形变的 RHBZ 理论框架下建立了可分离对相互作用 pp 道矩阵的计算方法。和球形核计算相比, 需要建立一维、二维从实验室坐标到质心坐标的变换方法。利用可分离对相互作用的 RHBZ 理论, 计算得到了 Sm 同位素链的基态性质, 并能很好地描述实验结果。

总之, 通过拟合核物质中 Gogny 力的对关联性质得到的高斯型可分离对相互作用, 能够很好地再现 Gogny 力在有限核中的计算结果。特别是对于变形核, 可分离对相互作用的计算更加简便和快捷。它可以代替 Gogny 力应用在远离稳定线奇异核的计算中, 避免了人为引进能量截断的困难, 又能大大简化计算, 用于预言缺乏实验数据的奇特核的性质。同时, 可以进一步推广用于轴对称形变核的激发态^[28]、三轴形变原子核^[29]及转动系统^[30-32]的研究; 并为考虑角动量投影^[33, 34]和粒子数投影^[35, 36]的生成坐标(GCM)方法和粒子-振动耦合(PVC)^[37, 38]理论提供更加真实的对关联性质描述。

参考文献 (References):

- [1] Dobaczewski J, Nazarewicz W. Prog Theor Phys, 2003, **146** (Suppl): 70.
- [2] Dobaczewski J, Nazarewicz W, Werner T R, *et al.* Phys Rev, 1996, **C53**: 2809.
- [3] Dobaczewski J, Flocard H, Treiner J. Nucl Phys, 1984, **422**: 103.
- [4] Li J Q, Ma Z Y, Chen B Q, *et al.* Phys Rev, 2002, **C65**: 064305.
- [5] Möller P, Nix J. Nucl Phys, 1992, **A536**: 20.
- [6] Bonche P, Flocard H, Heenen P H, *et al.* Nucl Phys, 1985, **443**: 39.
- [7] Bender M, Rutz K, Reinhard P G, *et al.* Euro Phys J, 2000, **8**: 59.
- [8] Dechargé J, Gogny D. Phys Rev, 1980, **C21**: 1568.
- [9] Berger J F, Girod M, Gogny D. Comp Phys Comm, 1991, **61**: 365.
- [10] Tian Y, Ma Z Y. Chin Phys Lett, 2006, **23**: 3226.
- [11] Tian Y, Ma Z Y, Ring P. Phys Lett, 2009, **B676**: 44.
- [12] Brown G E, Jackson A D. The Nucleon-nucleon Interaction, North Holland, Amsterdam, 1976.
- [13] Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R. Phys Rev, 1957,

- 108** :1175.
- [14] Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R. Phys Rev, 1957, **108** : 547.
- [15] Kucharek H, Ring P, Schuck P, *et al.* Phys Lett, 1989, **B216** : 249.
- [16] Talmi I. Helv Phys Acta, 1952, **25**: 185.
- [17] Moshinsky M. Nucl Phys, 1959, **13**: 104.
- [18] Brody T A, Jacob G, Moshinsky M. Nucl Phys, 1960, **17**: 16.
- [19] Baranger M, Davies K T R. Nucl Phys, 1966, **79**: 403.
- [20] Lalazissis G A, König J, Ring P. Phys Rev, 1997, **C55**: 540.
- [21] Tian Y, Ma Z Y, Ring P. Chin Phys Lett, 2009, **26**: 5.
- [22] Tian Y, Ma Z Y, Ring P. Phys Rev, 2009, **C79**: 064301.
- [23] Kibedi T, Spear R H, At Data Nucl Data Tables, 2002, **80**: 35.
- [24] Tian Y, Ma Z Y, Ring P. Phys Rev, 2009, **C80**: 024313.
- [25] Lalazissis G A, Raman S, Ring P. At Data Nucl Data Tables, 1999, **71**: 1.
- [26] Hilaire S, Girod M. Eur Phys J, 2007, **A33**: 237.
- [27] Raman S, Nestor Jr C W, Tikkanen P. At Data Nucl Data Tables, 2001, **78**: 1.
- [28] Arteaga D P, Ring P. Phys Rev, 2008, **77**: 034317.
- [29] Girod M, Grammaticos B. Phys Rev, 1983, **27**: 2317.
- [30] Egido J L, Robledo L M. Phys Rev Lett, 1993, **70**: 2876.
- [31] Afanasjev A V, König J, Ring P, *et al.* Phys Rev, 2000, **C62** : 054306.
- [32] Afanasjev A V, Ring P, König J. Nucl Phys, 2000, **676**: 196.
- [33] Nikšić T, Vretenar D, Ring P. Phys Rev, 2006, **C73**: 034308.
- [34] Yao J M, Meng J, Arteaga D P, *et al.* Chin Phys Lett, 2008, **25**: 3609.
- [35] Rodríguez — Guzmán R R, Egido J L, Robledo L M. Phys Lett, 2000, **474**: 15.
- [36] Nikšić T, Vretenar D, Ring P. Phys Rev, 2006, **C74**: 064309.
- [37] Litvinova E, Ring P, Tselyaev V I. Phys Rev, 2008, **C78**: 014312.
- [38] Litvinova E, Ring P, Tselyaev V I. Phys Rev, 2009, **C79**: 054312.

Superfluid of Finite Nuclei in Density Functional Theory with Finite Range Separable Pairing Interaction^{*}

MA Zhong-yu^{1, 2, 3}, TIAN Yuan¹, P. Ring³

(¹ China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China;

² Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion
Research Facility in Lanzhou, Lanzhou 730000, China;

³ Physik Department, Technische Universität München, D-85748, Garching, Germany)

Abstract: A separable pairing interaction is introduced in the covariant density functional theory. The parameters of the separable force are adjusted to reproduce the pairing properties of the Gogny force in nuclear matter. It preserves translational invariance and has finite range. Applying well known techniques of Talmi and Moshinsky, this pairing interaction can be used in relativistic and in non-relativistic Hartree-Bogoliubov or Hartree-Fock-Bogoliubov calculation of finite nuclei. It avoids the complicated problem of a cutoff at large momenta or energies inherent in other zero range pairing forces. This finite range separable pairing force is applied to study the properties of the ground and excited states for spherical Sn-isotopes in the relativistic Hartree Bogoliubov and relativistic quasiparticle random phase approximation. The superfluid properties of the ground state for the axially deformed Sm-isotopes are also studied in the deformed RHB theory with the separable pairing force. It has been shown that with this force the pairing properties of ground states can be well depicted on almost the same footing as with the original Gogny pairing interac-

* Received date: 8 Sep. 2009; Revised date: 15 Sep. 2009

* Foundation item: National Natural Science Foundation of China(10875150, 10775183, 10535010); Major State Basis Research Development Program of China(2007CB815000); Project of Bundesministerium für Bildung und Forschung, Germany (06MT246); Fund of DFG Cluster of Excellence "Origin and Structure of the Universe" (www.universe-cluster.de)

tion. There are also many extensions of relativistic density functional theory beyond mean field, such as applications using projection onto subspaces with good symmetries, generator coordinate methods, or investigation of complex configurations in the framework of particle-vibrational coupling(PVC). All these methods require a more realistic description of pairing correlations in the future.

Key words: finite separable pairing force; relativistic Hartree-Bogoliubov theory; relativistic quasiparticle random phase approximation