文章编号：1007－4627(2009)04－0304－04

带电线性谐振子在非对易空间中的 Wigner 函数*

王亚辉[1,2]，任亚杰[2]，王剑华[2]
(1 西北工业大学凝聚态结构与性质陕西省重点实验室，陕西 西安 710072；
2 陕西理工学院物理系，陕西 汉中 723001)

摘　要：在利用 Wigner 函数性质的基础上，考虑到空间变量的对易关系中包含了坐标-坐标的非对易性，得到了带电线性谐振子在非对易空间中的 Wigner 函数。

关 键 词：非对易空间；Wigner 函数；带电线性谐振子
中图分类号：O413.1　　　**文献标识码**：A

1　引言

在经典力学中，一个粒子的运动状态，用它在每一时刻的坐标和动量，即相空间中的一个点来描述。在量子力学中，由于波动-粒子两象性，一个体系的量子态用 Hilbert 空间中的一个矢量来描述，记为右矢$|\varphi\rangle$，而在一个具体的表象中则用态矢$|\varphi\rangle$在各基矢方向的分量来刻画。选用一个连续表象，则量子态表示成一个波函数(复)。例如，在坐标表象中量子态$|\varphi\rangle$表示成$\langle x|\varphi\rangle=\varphi(x)$，量子态包含了体系的全部信息[1]。

在量子力学中，单个(individual)粒子(或体系)的量子态是不能观测的，即在原则上不能用实验来测定，但对于在同样实验条件下制备出来的粒子(或体系)所构成的系综而言，量子态的测量则是有意义的。近年来，量子态测量的实验工作已取得一些重要进展。现今已进行的量子态实验工作，是测量与波函数或密度矩阵等价的 Wigner 函数，它是定义于相空间中的一个实函数，它具有准概率分布函数的性质。例如，在文献[2]中，对于 He 原子束在双缝干涉实验中的 Wigner 函数进行了很巧妙的测量，得到的结果与理论计算相一致，并在量子态的制备及量子工程等领域也取得相当的进展[1]。

Wigner 函数在描述量子光学、核物理、量子计算以及量子混沌中的量子信息的控制和传递中有非常重要的作用[3]，并且是一个很好的半经典近似。同时它在信号处理中也有广泛应用。然而，在 20 世纪 70 年代以前，Wigner 函数并没有引起人们更大的关注。直到 1975 年，Moyal 才从量子力学的内部逻辑出发，发现了这个引人入胜的量子化方法[4]。它和已有的量子化方法(Schrodinger 和 Hesneberge 算符正则化，Feymen 路径积分量子化)是等价的，它的基本方程是 Moyal 星本征值方程。在这种逻辑完整而且独立的量子化方法中，人们不需要选定一个特定的表象空间，比如坐标表象空间或动量表象空间。就在这种 Moyal 量子化方法提出不久，超弦理论的工作者提出了弦尺度下的非对易几何的概念[5]。超弦/M 理论中出现的非交换几何，使得人们不仅能运用非交换几何的概念和定理来有效地分析对偶性、BPS 态以及 D-膜动力学等，而且更重要的是引起了人们对整个物理学理论基础的理解及更深刻的认识变革[6—12]，以及对 Wigner 函数在非对易空间的应用引起了极大的关注。这种非对易量子效应可以与 Moyal 的量子化方法表述为相同的形式。

本文从 Moyal-Weyl 乘法出发并利用 Bopp 变换，给出非对易空间中的 Wigner 函数，进而得到了非对易空间中二维线性谐振子的 Wigner 函数。

2　对易空间中 Wigner 函数

在对易空间中，定态 Schrödinger 方程常被写成 $H\psi_n(x)=E_n\psi_n(x)$，那么 Wigner 函数的标准形式就可写为[1]

*　**收稿日期**：2009－03－12；**修改日期**：2009－05－27
*　**基金项目**：国家自然科学基金资助项目(10447005)；陕西省自然科学基金项目(07JK207)
作者简介：王亚辉(1978－)，男(汉族)，陕西宝鸡人，讲师，从事量子场论方面的研究；E-mail：wangyahui8312469@163.com

$$W_n(x, p)=\frac{1}{2\pi}\int\psi_n^*\left(x-\frac{\hbar}{2}y\right)\psi_n\left(x+\frac{\hbar}{2}y\right)e^{-ipy}dy 。\tag{1}$$

由文献[6]可知

$$H*W_n=W_n*H=E_nW_n,\tag{2}$$

在二维情况下，* 被定义为[6]

$$*\equiv\exp\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_{x_1}\overrightarrow{\partial}_{p_1}-\overleftarrow{\partial}_{p_1}\overrightarrow{\partial}_{x_1}+\overleftarrow{\partial}_{x_2}\overrightarrow{\partial}_{p_2}-\overleftarrow{\partial}_{p_2}\overrightarrow{\partial}_{x_2})=1+\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_{x_1}\overrightarrow{\partial}_{p_1}-\overleftarrow{\partial}_{p_1}\overrightarrow{\partial}_{x_1}+\overleftarrow{\partial}_{x_2}\overrightarrow{\partial}_{p_2}-\overleftarrow{\partial}_{p_2}\overrightarrow{\partial}_{x_2})+$$
$$\frac{1}{2!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2(\overleftarrow{\partial}_{x_1}\overrightarrow{\partial}_{p_1}-\overleftarrow{\partial}_{p_1}\overrightarrow{\partial}_{x_1}+\overleftarrow{\partial}_{x_2}\overrightarrow{\partial}_{p_2}-\overleftarrow{\partial}_{p_2}\overrightarrow{\partial}_{x_2})(\overleftarrow{\partial}_{x_1}\overrightarrow{\partial}_{p_1}-\overleftarrow{\partial}_{p_1}\overrightarrow{\partial}_{x_1}+\overleftarrow{\partial}_{x_2}\overrightarrow{\partial}_{p_2}-\overleftarrow{\partial}_{p_2}\overrightarrow{\partial}_{x_2})+\cdots\cdots 。\tag{3}$$

3　二维线性谐振子的 Wigner 函数

设二维线性谐振子带电量为 e，在电场强度为 $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_x\boldsymbol{i}+\varepsilon_y\boldsymbol{j}=\varepsilon_1\boldsymbol{i}+\varepsilon_2\boldsymbol{j}$ 的平面上运动，其 Hamiltonian 算符为

$$H=\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1^2+x_2^2)-e\varepsilon_1x_1-e\varepsilon_2x_2 。\tag{4}$$

由于 $H*W_n=E_nW_n$，将(3)和(4)式代入得

$$\Big\{\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1^2+x_2^2)-e\varepsilon_1x_1-e\varepsilon_2x_2+$$
$$\frac{i\hbar}{2}\left[\frac{1}{2\mu}(-2p_1\partial_{x_1}-2p_2\partial_{x_2})+\frac{1}{2}\mu\omega^2(2x_1\partial_{p_1}+2x_2\partial_{p_2})-e\varepsilon_1\partial_{p_1}-e\varepsilon_2\partial_{p_2}\right]-$$
$$\frac{\hbar^2}{8}\left[\frac{1}{2\mu}(2\partial_{x_1}^2+2\partial_{x_2}^2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(2\partial_{p_1}^2+2\partial_{p_2}^2)+e\varepsilon_1\partial_{p_1}^2\partial_{x_1}-e\varepsilon_2\partial_{p_2}^2\partial_{x_1}\right]\Big\}W_n=EW_n 。\tag{5}$$

由于 $W_n*H=E_nW_n$，将(3)和(4)式代入得

$$W_n\Big\{\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1^2+x_2^2)-e\varepsilon_1x_1-e\varepsilon_2x_2+$$
$$\frac{i\hbar}{2}\left[\frac{1}{2\mu}(2p_1\partial_{x_1}+2p_2\partial_{x_2})+\frac{1}{2}\mu\omega^2(-2x_1\partial_{p_1}-2x_2\partial_{p_2})+e\varepsilon_1\partial_{p_1}+e\varepsilon_2\partial_{p_2}\right]-$$
$$\frac{\hbar^2}{8}\left[\frac{1}{2\mu}(2\partial_{x_1}^2+2\partial_{x_2}^2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(2\partial_{p_1}^2+2\partial_{p_2}^2)+e\varepsilon_1\partial_{p_1}^2\partial_{x_1}-e\varepsilon_2\partial_{p_2}^2\partial_{x_1}\right]\Big\}=EW_n 。\tag{6}$$

由(5)式等于(6)式得

$$\Big\{\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1^2+x_2^2)-e\varepsilon_1x_1-e\varepsilon_2x_2-$$
$$\frac{\hbar^2}{8}\left[\frac{1}{\mu}(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2)+\mu\omega^2(\partial_{p_1}^2+\partial_{p_2}^2)+e\varepsilon_1\partial_{p_1}^2\partial_{x_1}-e\varepsilon_2\partial_{p_2}^2\partial_{x_1}\right]-E\Big\}W_n=0 ,\tag{7}$$

令

$$x_1'=x_1-\frac{e\varepsilon_1}{\mu\omega^2} ,\ x_2'=x_2-\frac{e\varepsilon_2}{\mu\omega^2} ,\ p_1'=p_1,\ p_2'=p_2 。\tag{8}$$

将(8)式代入(7)式得

$$\Big\{\frac{1}{2\mu}(p_1'^2+p_2'^2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1'^2+x_2'^2)-\frac{e^2}{2\mu\omega^2}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)-$$

$$\frac{\hbar^2}{8}\left[\frac{1}{\mu}(\partial^2_{x'_1}+\partial^2_{x'_2})+\mu\,\omega^2(\partial^2_{p'_1}+\partial^2_{p'_2})+e\,\varepsilon_1\partial^2_{p'_1}\partial_{x'_1}-e\,\varepsilon_2\partial^2_{p'_2}\partial_{x'_1}\right]-E\Bigg\}W_n=0\ , \tag{9}$$

再令
$$\xi=\frac{4}{\hbar\omega}\left(\frac{1}{2\mu}p_1^{'2}+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2x_1^{'2}\right),\ \eta=\frac{4}{\hbar\omega}\left(\frac{1}{2\mu}p_2^{'2}+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2x_2^{'2}\right)\ 。 \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式得

$$\left[\frac{\hbar\omega}{4}\xi+\frac{\hbar\omega}{4}\eta-\hbar\omega(\partial_\xi+\xi\partial_\xi^2)-\hbar\omega(\partial_\eta+\eta\partial_\eta^2)-\frac{e^2}{2\mu\,\omega^2}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)-E\right]W(\xi,\ \eta)=0\ 。 \tag{11}$$

化简(11)式得

$$\left[\frac{1}{4}\xi+\frac{1}{4}\eta-(\partial_\xi+\xi\partial_\xi^2)-(\partial_\eta+\eta\partial_\eta^2)-\frac{1}{\hbar\omega}\frac{e^2}{2\mu\,\omega^2}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)-\frac{E}{\hbar\omega}\right]W(\xi,\ \eta)=0\ 。 \tag{12}$$

定义
$$W(\xi,\ \eta)=\mathrm{e}^{-\frac{\xi+\eta}{2}}L(\xi)L(\eta)\ , \tag{13}$$

$$\left[\xi\partial_\xi^2+(1-\xi)\partial_\xi-\frac{1}{2}+\eta\partial_\eta^2+(1-\eta)\partial_\eta-\frac{1}{2}+\frac{1}{\hbar\omega}\frac{e^2}{2\mu\,\omega^2}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)+\frac{E}{\hbar\omega}\right]L(\xi)L(\eta)=0\ , \tag{14}$$

其中 $L(\xi)$和 $L(\eta)$表示拉盖尔多项式：

$$L(\xi)=\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{\xi}\partial_\xi^n(\mathrm{e}^{-\xi}\xi^n),\ L(\eta)=\frac{1}{m!}\mathrm{e}^{\eta}\partial_\eta^m(\mathrm{e}^{-\eta}\eta^m)\ , \tag{15}$$

所得 Wigner 函数为

$$W_{n,\,m}(x,\ p)=\frac{(-1)^{n+m}}{\pi^2\hbar^2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi+\eta}{2}}L(\xi)L(\eta)\ 。 \tag{16}$$

3 非对易空间中二维线性谐振子的 Wigner 函数

在非对易空间中，$*$ 被重新定义，二维情况下

$$*\equiv\exp\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_{\hat{x}_1}\overrightarrow{\partial}_{\hat{p}_1}-\overleftarrow{\partial}_{\hat{p}_1}\overrightarrow{\partial}_{\hat{x}_1}+\overleftarrow{\partial}_{\hat{x}_2}\overrightarrow{\partial}_{\hat{p}_2}-\overleftarrow{\partial}_{\hat{p}_2}\overrightarrow{\partial}_{\hat{x}_2})\ 。 \tag{17}$$

由文献[7]可知(文献[7]中的公式(15—22))，

$$H*W_n=W_n*H=E_nW_n\ 。 \tag{18}$$

同理可得

$$W_{n,\,m}(\hat{x},\ \hat{p})=\frac{(-1)^{n+m}}{\pi^2\hbar^2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi+\eta}{2}}L(\xi)L(\eta)\ , \tag{19}$$

其中

$$\xi=\frac{4}{\hbar\omega}\left[\frac{1}{2\mu}\hat{p}_1^2+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2\left(\hat{x}_1+\frac{1}{2\hbar}\theta\,\hat{p}_2-\frac{e\,\varepsilon_1}{\mu\,\omega^2}\right)^2\right],\qquad \eta=\frac{4}{\hbar\omega}\left[\frac{1}{2\mu}\hat{p}_2^2+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2\left(\hat{x}_2-\frac{1}{2\hbar}\theta\,\hat{p}_1-\frac{e\,\varepsilon_2}{\mu\,\omega^2}\right)^2\right]\ , \tag{20}$$

$$\hat{x}_1=x_1-\frac{1}{2\hbar}\theta p_2,\ \hat{x}_2=x_2+\frac{1}{2\hbar}\theta p_1,\ \hat{p}_1=p_1,\ \hat{p}_2=p_2\ 。 \tag{21}$$

对易空间中的坐标和动量用 x 和 p，非对易空间中坐标和动量算符用 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 来表示，所以，非对易空间中二维线性谐振子的 Wigner 函数为

$$W_{n,\,m}(\hat{x},\ \hat{p})=\frac{(-1)^{n+m}}{\pi^2\hbar^2}\mathrm{e}^{2}\left\{\frac{\frac{1}{2\mu}\hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2\left[\left(\hat{x}_1+\frac{1}{2\hbar}\theta\,\hat{p}_2-\frac{e\,\varepsilon_1}{\mu\,\omega^2}\right)^2+\left(\hat{x}_2-\frac{1}{2\hbar}\theta\,\hat{p}_1-\frac{e\,\varepsilon_1}{\mu\,\omega^2}\right)^2\right]}{\hbar\omega}\right\}L(\xi)L(\eta)\ 。 \tag{22}$$

4　结论

Wigner 函数是相空间中的准分布函数，是一个实函数且满足边缘条件，在现代量子测量中具有重要的意义。本文中我们简单地介绍和讨论了 Wigner 函数的性质，得到了非对易空间中带电线性谐振子的 Wigner 函数。与利用定义积分得到的结果(带电线性谐振子的 Wigner 函数积分后能写成简单的表达式)完全一致。而带电线性谐振子是许多复杂模型的基础，可用来讨论许多的实际问题。不仅为实验的实现提供了依据，而且为进一步研究非对易空间和非对易相空间的 Wigner 函数打下了良好的基础。

参考文献(References)：

[1] Zeng Jinyan. Quantum Mecuanics. Beijing：Science Press，4th ed，2007，**1**：372.
(曾谨言. 量子力学. 北京：科学出版社，2007，第四版，**1**：372.)

[2] Kurtsiefer Ch，Pfau T，Mlynek J. Nature，1997，**386**：150.

[3] Wigner E. Phys Rev，1932，**40**：749.

[4] LEE Hai-Woong. Physics Reports，1995，**259**：147—211.

[5] Seiberg N，Witten E. arXiv：hep-th/9908142.

[6] Chruscinski D. arXiv：math-ph/0209008.

[7] Heng Taihua，Lin Bingsheng，Jing Sicong. Chinese Phys Lett，2008，**25**(10)：3535.

[8] Wang Jianhua，Li Kang，Liu Peng. High Energy Physics and Nuclear Physics，2006，**30**(5)：387(in Chinese).
(王剑华，李康，刘鹏. 高能物理与核物理，2006，**30**(5)：387.)

[9] Chaichian M，Sheikh-Jabbari M M，Tureanu A. Phys Rev Lett，2001，**86**：2716.

[10] Wang Jianhua，Li Kang. High Energy Physics and Nuclear Physics，2006，**30**(11)：1053(in Chinese).
(王剑华，李康. 高能物理与核物理，2006，**30**(11)：1053.)

[11] Wang Yahui，Wang Jianhua，Ren Yajie，*et al*. Nuclear Physics Review，2009，**26**(1)：19(in Chinese).
(王亚辉，王剑华，任亚杰等. 原子核物理评论，2009，**26**(1)：19.)

[12] Wang Yahui，Wang Jianhua，Huang Wendeng. Nuclear Physics Review，2008，**25**(3)：218(in Chinese).
(王亚辉，王剑华，黄文登. 原子核物理评论，2008，**25**(3)：218.)

Wigner Function of Charged Isotropic Harmonic Oscillator in Noncommutative Space*

WANG Ya-hui[1,2,1)]，REN Ya-jie[2]，WANG Jian-hua[2]

(1 *Shaanxi Key Laboratory of Condensed Matter Structures and Properties*，*Northwesten Polytechnical University*，*Xi'an* 710072，*China*；
2 *Department of Physics*，*Shaanxi University of Technology*，*Hanzhong* 723001，*Shaanxi*，*China*)

Abstract：Based on the property of wigner function，the Wigner function of charged Linear Harmonic Oscillator in non-commutative space was obtained by considering the noncommutative of the coordinate-coordinate in the relation of space variable.

Key words：non-commutative space；Wigner function；charged linear harmonic oscillator

* **Received date**：12 Mar. 2009；**Revised date**：27 May 2009

* **Foundation item**：National Natural Science Foundation of China(10447005)；Natural Science Foundation of Education Bureau of Shaanxi Province，China(07JK207)

1) E-mail：wangyahui8312469@163.com