

文章编号: 1007-4627(2009)04-0294-06

# Breit 势的正规化与 $\eta_c$ -J/ $\psi$ 的劈裂\*

吉日本图

(哈尔滨工业大学物理系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 研究自旋和轨道量子数不同的介子之间的质量劈裂对检验夸克势模型非常重要。在以往的夸克势模型计算中,  $\eta_c$ -J/ $\psi$  的质量劈裂都很难达到实验的值。用正规化形状因子  $\mu^2/(q^2 + \mu^2)$ , 在对完整的动量空间中的 Breit 夸克势实施一次正规化下研究了  $\eta_c$ -J/ $\psi$  和新介子  $\eta_b$  与  $\Upsilon(1s)$  之间的质量劈裂。结果表明, 正规化形状因子中的屏蔽质量  $\mu$  应与介子折合质量有关, 当将其展开为介子折合质量的三阶多项式时, 上述介子质量劈裂可以精确重现实验的结果。另外, 由于完整的 Breit 势包含有自旋-轨道耦合相互作用的项, 因而还可以研究  $\chi_{c0}$ ,  $\chi_{c1}$  和  $\chi_{c2}$  之间的质量劈裂。

**关键词:** 夸克势模型; 矩阵元; 介子束缚态; 正规化; 质量劈裂

**中图分类号:** O572.2

**文献标识码:** A

## 1 引言

在诸多描述强子内夸克运动的理论中, 非相对论性夸克势模型是一种简单而又非常有效的唯象模型。这种夸克势模型认为强子中夸克的运动是非相对论的, 它可以用非相对论性薛定谔方程很好地描述。尽管这种假定对轻夸克来说未尽合理, 但非相对论性的夸克势模型在对强子束缚态、精细结构和散射的研究都取得了相当的成功, 其理论计算结果与实验数据符合得很好<sup>[1-11]</sup>。这些成功促使人们对非相对论性的夸克势模型进行更为广泛的研究。

完整的准确到光速二阶的单胶子交换势是 Fermi-Breit 势(或 Breit 势)<sup>[7-10, 12]</sup>, 它又被称作散射道势或 t-道势。从前, 人们用 Breit 夸克势模型研究强子束缚态和散射问题时, 为了简化计算总是通过删去或改变 Breit 势中的一些项对散射道势进行改进。特别是在这些改进中, 都忽略了 Breit 势中与动量有关的轨道-轨道耦合项<sup>[2-6, 11, 13]</sup>。这样会导致原来非定域的夸克势被定域化。对散射道势函数不恰当的删改会破坏势函数应有的完整性和厄米性。另外, 在微观的强相互作用中, 非定域性是一个不可忽视的重要特征。因而, 研究完整的包含有非定域项的 Breit 夸克势模型, 对于人们更深入地了解和完善夸克势模型有重要的意义。

由于 Breit 势中包含有  $r^{-3}$  的奇异项, 直接用 Breit 势<sup>[12]</sup> 计算介子束缚态时发现得到介子质量对波函数基矢中的  $\pi$  介子宽度参量  $\beta_\pi$  和基矢的维数  $N$  的依赖性很大。当  $\beta_\pi$  或  $N$  略有改变时, 计算的结果变化很大。为了得到稳定的介子质量解, 首先要消除 Breit 势的奇异性。从前只有文献 [2, 11, 13] 在坐标空间中删改 Breit 势中的一些项来消除奇异。本文用动量空间中的正规化形状因子  $\mu^2/(q^2 + \mu^2)$ , 对完整的 Breit 势中的奇异项进行一次正规化处理。这样得到的势函数在坐标空间中不再含  $r^{-3}$  的奇异项。结果表明, 用本文的正规化方法可以消除 Breit 势的奇异性, 得到稳定和较高精度的介子质量谱。从而给出稳定、有效的夸克势模型。

用夸克势模型计算介子质量谱的工作中,  $\eta_c$ -J/ $\psi$ ,  $\eta_b$ - $\Upsilon(1s)$  之间, 还有  $\chi_{c0}$ - $\chi_{c1}$ - $\chi_{c2}$  之间质量劈裂是质量谱工作当中的难点。由计算结果可看到,  $\pi$ - $\rho$  很容易劈裂, 而  $\eta_c$ -J/ $\psi$  难劈裂。在目前常用的耦合常数  $\alpha_s$  的情况下, 直接用 Breit 势, 不能实现这些介子之间的劈裂。要实现这些介子之间劈裂, 首先必须对 Breit 势实施正规化。当正规化形状因子中的屏蔽质量  $\mu$  为介子折合质量  $\mu_r = m_i m_j / (m_i + m_j)$  的三阶多项式时, 上述介子质量劈裂可以精

\* 收稿日期: 2009-01-22; 修改日期: 2009-07-06

作者简介: 吉日本图(1970-), 男(蒙古族), 内蒙古呼和浩特人, 博士研究生, 从事粒子物理与场论研究;

E-mail: jrmt2003@yahoo.com.cn

确重现实验的结果。

## 2 Breit 势的正规化

我们对 Breit 势的正规化描述从动量空间开始。

Breit 势在动量空间中的形式是<sup>[7-10]</sup>

$$\begin{aligned}
 V^s(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = & C_{ij} \frac{4\pi\alpha_s}{q^2} \left\{ 1 - \frac{(m_i^2 + m_j^2)}{8m_i^2 m_j^2} q^2 + \right. \\
 & \frac{1}{m_i m_j} \left[ \mathbf{p}^2 - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2}{q^2} \right] - \frac{2}{3} \frac{q^2}{4m_i m_j} (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j) + \\
 & \frac{1}{4m_i m_j} (i\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \left[ \left( 2 + \frac{m_j}{m_i} \right) \boldsymbol{\sigma}_i + \left( 2 + \frac{m_i}{m_j} \right) \boldsymbol{\sigma}_j \right] + \\
 & \left. \frac{1}{4m_i m_j} \left[ (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i)(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_j) - \frac{1}{3} q^2 (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j) \right] \right\} + \\
 & C_{ij} (2\pi)^3 (-V_0) \delta(\mathbf{q}), \tag{1}
 \end{aligned}$$

其中,  $C_{ij}$  是散射道色矩阵<sup>[2]</sup>,  $\alpha_s$  是 QCD 耦合常数,  $m_i$  和  $m_j$  是夸克  $i$  和夸克  $j$  的组分质量,  $\boldsymbol{\sigma}_i$  是 Pauli 矩阵, 最后一项是常数项势, 用以求解薛定谔方程时调整介子质量而加的<sup>[2]</sup>。  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{q}$  的意义与文献<sup>[2]</sup> 相同,  $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\kappa}' + \boldsymbol{\kappa})$ ,  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}$ , 其中  $\boldsymbol{\kappa}$  和  $\boldsymbol{\kappa}'$  分别是两个相互作用夸克  $i, j$  的初态相对动量和末态相对动量。

下面为了兼顾精度和稳定度, 除了库仑势和常数项势外, 对势函数(1)的其他项进行逐项一次正规化, 然后用傅立叶变换公式

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{q}) \tag{2}$$

把它变换到坐标空间中去。正规化后的势函数的第  $i$  项记为  $U_i$ , 则有正规化一般公式为

$$U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = V_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\mu^2}{q^2 + \mu^2}, \tag{3}$$

其中  $\mu^2/(q^2 + \mu^2)$  是正规化形状因子。  $\mu$  是可调参量, 对于我们这个势函数,  $\mu$  应该是折合质量  $\mu_r = m_i m_j / (m_i + m_j)$  的函数, 这在结论中详细讨论。 这样便得到了一个有效、稳定的夸克势模型在坐标空间中的形式:

$$U_{ij} = C_{ij} \alpha_s \frac{1}{r} -$$

$$C_{ij} (4\pi\alpha_s) \frac{(m_i^2 + m_j^2)}{8m_i^2 m_j^2} \left( \frac{\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) +$$

$$\frac{C_{ij} \alpha_s}{2m_i m_j} \left( \frac{p^2}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}}{r^3} \right) +$$

$$\frac{C_{ij} \alpha_s}{m_i m_j} \left\{ -e^{-\mu r} \left[ \frac{p^2}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}}{r^3} \right] + \right.$$

$$\mu^{-2} r^{-2} \left[ \frac{p^2}{r} - 3 \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}}{r^3} \right] -$$

$$\left. \mu^{-2} (\mu + r^{-1}) \frac{e^{-\mu r}}{r} \left[ \frac{p^2}{r} - 3 \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}}{r^3} \right] \right\} -$$

$$C_{ij} \alpha_s \frac{2\pi}{3m_i m_j} (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j) \left( \frac{\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) -$$

$$\frac{C_{ij} \alpha_s}{4m_i m_j r^3} \left\{ 1 - (1 + \mu r) e^{-\mu r} \right\} (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}) -$$

$$\frac{3C_{ij} \alpha_s}{4m_i m_j r^3} \left\{ 1 - (1 + \mu r + \frac{1}{3} \mu^2 r^2) e^{-\mu r} \right\} S_{ij}^x +$$

$$C_{ij} (-V_0), \tag{4}$$

其中,  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = (2 + \frac{m_j}{m_i}) \boldsymbol{\sigma}_i + (2 + \frac{m_i}{m_j}) \boldsymbol{\sigma}_j$ ,  $S_{ij}^x = (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i)(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)/r^2 - (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)/3$ 。

禁闭势采用线性禁闭势, 并且不正正规化:

$$U^c(\mathbf{r}) = V^c(\mathbf{r}) = -C_{ij} \left( \frac{3}{4} b \right) |\mathbf{r}|, \tag{5}$$

这样总势函数为

$$U(\mathbf{r}) = U_{ij}(\mathbf{r}) + V^c(\mathbf{r}). \tag{6}$$

## 3 束缚态薛定谔本征方程和介子波函数

对于一个介子的束缚态薛定谔本征方程, 在坐标空间中的形式如下:

$$\frac{p^2}{2\mu_r} \Phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = E \Phi(\mathbf{r}), \tag{7}$$

其中,  $\mathbf{p} = (m_j \mathbf{p}_i - m_i \mathbf{p}_j / m_i + m_j)$ ,  $\mu_r = m_i m_j / (m_i + m_j)$  是相对动量和折合质量,  $\Phi(\mathbf{r})$  是介子波函数。对于介子, 有质量公式:

$$M = m_i + m_j + E, \tag{8}$$

用基函数  $\phi_{nl}(\mathbf{r})$  来展开  $\Phi(\mathbf{r})$ , 即

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_n a_{nl} \phi_{nl}(\mathbf{r}), \tag{9}$$

其中  $\phi_{nl}(\mathbf{r})$  已含空间、自旋、色波函数。求解上面的薛定谔方程, 以便确定介子质量  $M$ , 那么必须先给出此基函数  $\phi_{nl}(\mathbf{r})$  在坐标空间中的解析表达式。

它应该满足介子角动量平方的本征态这一要求。

在不同的文献中所采用的形式不同,但一般都取了谐振子波函数或稍加修改而得到。在这里采用文献[2]中所采取的形式,在动量空间中给出:

$$\phi_{nl}(\mathbf{p}) = N_{nl} (2p)^l \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)!!}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \times \exp\left(-\frac{(2\mathbf{p})^2}{8n\beta^2}\right) \chi_{s_m_s} c(i, j). \quad (10)$$

我们讨论的介子总角动量  $J=0$  和  $J=1$ , 所以上式中轨道角动量量子数取值:  $l=0, 1, 2$ . 脚标  $n=1, 2, 3, \dots, N$ , 在具体的计算中取  $N=6$ .  $\chi_{s_m_s}$ ,  $c(i, j)$  分别是介子自旋和色波函数。  $N_{nl}$  是归一化常数。由归一化条件  $\int d^3 p |\phi_{nl}(\mathbf{p})|^2 = 1$  定得:

$$N_{nl} = \left(\frac{1}{\pi n \beta^2}\right)^{3/4} \frac{1}{(2n\beta^2)^{l/2}}. \quad (11)$$

(10)式是动量空间中的形式,而求解坐标空间中的薛定谔方程,则需要坐标空间中的基函数  $\phi_{nl}(\mathbf{r})$ . 因此用傅立叶变换公式,把动量空间中的基函数变换到坐标空间中去,得到

$$\begin{aligned} \phi_{nl}(\mathbf{r}) &= R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{s_m_s} c(i, j) \\ &= D_{nl} r^l \exp\left(-\frac{n\beta^2}{2} r^2\right) Y_{lm_l}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{s_m_s} c(i, j), \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$D_{nl} = \frac{(\sqrt{2}i)^l}{4\pi} \sqrt{\frac{(2/\sqrt{\pi})^3}{(2l+1)!!}} (n\beta^2)^{\frac{1}{2}(l+\frac{3}{2})}. \quad (13)$$

把  $\Phi(\mathbf{r}) = \sum_n a_{nl} \phi_{nl}(\mathbf{r})$  代入上面的薛定谔方程,然后左乘  $(2\pi)^3 \phi_{ml'}^*(\mathbf{r})$  之后,对全空间积分:

$$\begin{aligned} \sum_n a_{nl} \left\{ (2\pi)^3 \int d^3 x \phi_{ml'}^*(\mathbf{r}) \frac{\hat{p}^2}{2\mu_r} \phi_{nl}(\mathbf{r}) + (2\pi)^3 \int d^3 x \phi_{ml'}^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \phi_{nl}(\mathbf{r}) \right\} \\ = E \sum_n a_{nl} (2\pi)^3 \int d^3 x \phi_{ml'}^*(\mathbf{r}) \phi_{nl}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (14)$$

在上式中定义:

$$\begin{aligned} T_{mn} &= \langle ml' | \hat{T} | nl \rangle = \langle ml' | \frac{\hat{p}^2}{2\mu_r} | nl \rangle \\ &= (2\pi)^3 \int d^3 x \phi_{ml'}^*(\mathbf{r}) \hat{T} \phi_{nl}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$B_{mn} = \langle ml' | nl \rangle$$

$$= (2\pi)^3 \int d^3 x \phi_{ml'}^*(\mathbf{r}) \phi_{nl}(\mathbf{r}), \quad (16)$$

$$V_{mn} = \langle ml' | V | nl \rangle$$

$$= (2\pi)^3 \int d^3 x \phi_{ml'}^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \phi_{nl}(\mathbf{r}), \quad (17)$$

当势函数中有自旋和轨道耦合项时,计算矩阵元必须考虑耦合系数问题(C-G 系数)。此时矩阵元公式是普遍的:

$$\begin{aligned} V_{mn} &= \sum_{m_l m_s m'_l m'_s} \langle l m_l s m_s | J m_J \rangle \times \\ &\quad \langle l' m'_l s' m'_s | J m'_J \rangle \times \\ &\quad (2\pi)^3 \int d^3 x \phi_{ml'}^*(\mathbf{r}) \chi_{s_m_s}^\dagger c^\dagger(ij) \times \\ &\quad V(\mathbf{r}) \phi_{nl}(\mathbf{r}) \chi_{s_m_s} c(ij), \end{aligned} \quad (18)$$

该式称为势函数在坐标空间中的矩阵元。当  $l'=l$  时,薛定谔方程(14)化为

$$\sum_n a_{nl} [T_{mn} + V_{mn}] = E \sum_n a_{nl} B_{mn}, \quad (19)$$

把它写成矩阵形式

$$Ha = EBa, \quad (20)$$

其中  $a$  是展开系数。它是个  $6 \times 1$  的列矩阵,矩阵  $H$  的阶数为  $N$ 。

$$a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)^\dagger. \quad (21)$$

## 4 正规化后的矩阵元

在计算矩阵元中用到了如下的积分,其中  $\text{erf}(x)$  是误差函数,

$$w_n = \int_0^\infty dx \cdot x^n e^{(-\nu x^2 - \mu x)}, \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$w_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}} \left[ 1 - \text{erf}\left(\frac{\mu}{2\sqrt{\nu}}\right) \right],$$

$$w_1 = \frac{1}{2\nu} (1 - \mu w_0),$$

$$w_2 = \frac{1}{2\nu^2} \left[ -\frac{\mu}{2} + \left(\nu + \frac{\mu^2}{2}\right) w_0 \right],$$

$$w_3 = \frac{1}{2\nu^3} \left[ \nu + \frac{\nu^2}{4} - \left(3\nu \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^3}{4}\right) w_0 \right],$$

$$w_4 = \frac{1}{4\nu^4} \left[ -5\nu \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^3}{4} + \left(3\nu^2 + 3\nu\mu^2 + \frac{\mu^4}{4}\right) w_0 \right],$$

$$\omega_5 = \frac{1}{4\nu^5} \left[ 4\nu^2 + 9\nu \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^4}{8} - \left( 15\nu^2 \frac{\mu}{2} + 5\nu \frac{\mu^3}{2} + \frac{\mu^5}{8} \right) \omega_0 \right]. \quad (22)$$

在下面的矩阵元中出现的因子  $A_l$  和  $\nu$  所取的表达式如下:

$$\nu = \frac{1}{2} \beta^2 (m+n),$$

$$A_l = \frac{2^{(l+2)}}{(2l+1)!!} \beta^{(2l+3)} (mn)^{\frac{1}{4}(2l+3)}. \quad (23)$$

因为计算的介子处于  $l=0, 1$  状态, 所以下面只给出  $l=0, 1$ , 并且  $l'=l$  时的矩阵元。方程(4)的第 1 项势是库仑势  $U_1$ , 矩阵元为

$$(U_1)_{mn} = (V_1)_{mn} = C_f \frac{4\pi\alpha_s}{(2\pi)^{3/2}} \beta \times \frac{2^l l!}{(2l+1)!!} \sqrt{m+n} B_{mn}. \quad (24)$$

方程(4)的第 2 项势  $U_2$  的矩阵元为

$$(U_2)_{mn} = -C_f \alpha_s \frac{(m_i^2 + m_j^2)}{8m_i^2 m_j^2} \times \mu^2 A_l \{ (1-l)\omega_1 + l\omega_3 \}, \quad (25)$$

方程(4)的第 3 项势  $U_3$  是轨道与轨道耦合项, 矩阵元为

$$(U_3)_{mn} = (V_3)_{mn} + \left( -C_f \frac{\alpha_s}{4m_i m_j} 4\mu^{-2} \right) \times A_l \left\{ - (n^2 \beta^4) \frac{l!}{\nu^{(l+1)}} + (2n\beta^2) l \frac{l!}{\nu^l} \right\} + \left( -C_f \frac{\alpha_s}{m_i m_j} \right) (2n\beta^2) A_l \{ (1-l)\omega_1 + l\omega_3 + \left( C_f \frac{\alpha_s}{2m_i m_j} 2\mu^{-1} \right) \{ - (2n^2 \beta^4) \times A_l [(1-l)\omega_2 + l\omega_4] + (4n\beta^2) A_l l\omega_2 \} + \left( C_f \frac{\alpha_s}{4m_i m_j} 4\mu^{-2} \right) \{ - (2n^2 \beta^4) \times A_l [(1-l)\omega_1 + l\omega_3] + (4n\beta^2) A_l l\omega_1 \} \}, \quad (26)$$

其中

$$(V_3)_{mn} = C_f \frac{4\pi\alpha_s \beta^3}{m_i m_j} \frac{2mn}{\sqrt{m+n}} \times \frac{B_{mn}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2^l (l+1)!}{(2l+1)!!}, \quad l=0, 1 \quad (27)$$

方程(4)的第 4 项势  $U_4$  是自旋与自旋耦合项, 矩阵元为

$$(U_4)_{mn} = -C_f \frac{\alpha_s}{6m_i m_j} 2[S(S+1) - 3/2] \times \mu^2 A_l \left\{ (1-l)\omega_1 + l\omega_3 \right\}, \quad (28)$$

方程(4)的第 5 项势  $U_5$  是自旋与轨道耦合项, 矩阵元为

$$(U_5)_{mn} = C_f \frac{\sqrt{6}\alpha_s}{4m_i m_j} \left( 4 + \frac{m_i}{m_j} + \frac{m_j}{m_i} \right) \times (\hat{S})^2 \hat{l} \sqrt{l(l+1)} (-1)^l \times \left\{ (2\pi)^3 \int d\mathbf{r} \phi_{ml}^*(\mathbf{r}) r^{-3} \phi_{nl}(\mathbf{r}) - A_l [\omega_1 + \mu \omega_2] \right\} (-1)^{l+J} \times \left\{ \begin{matrix} S & S & 1 \\ l & l & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S & S & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\}, \quad (29)$$

方程(4)的第 6 项势  $U_6$  是张量力项, 矩阵元为

$$(U_6)_{mn} = C_f \frac{3\alpha_s}{m_i m_j} \sqrt{\frac{5}{6}} \delta_{s,1} (\hat{l})^2 \times \left\{ \begin{matrix} l & l & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} (-1)^J \left\{ \begin{matrix} s & l & J \\ l & s & 2 \end{matrix} \right\} \times \left[ (2\pi)^3 \int d\mathbf{r} \phi_{ml}^*(\mathbf{r}) r^{-3} \phi_{nl}(\mathbf{r}) - A_l (\omega_1 + \mu \omega_2 + \frac{1}{3} \mu^2 \omega_3) \right], \quad (30)$$

其中积分项为

$$(2\pi)^3 \int d\mathbf{r} \phi_{ml}^*(\mathbf{r}) r^{-3} \phi_{nl}(\mathbf{r}) = A_l \frac{1}{2} (l-1)!, \quad \nu^{-l}, \quad l > 0 \quad (31)$$

常数项势矩阵元为

$$(V_7)_{mn} = C_f (-V_0) B_{mn}, \quad (32)$$

禁闭势矩阵元为

$$(V_1^c)_{mn} = C_f \left( -\frac{3}{4} \right) \frac{b}{\beta} \frac{8\pi}{(2\pi)^{3/2}} \times \frac{2^l (l+1)!}{(2l+1)!!} \frac{B_{mn}}{\sqrt{m+n}}. \quad (33)$$

这样便把修改后的矩阵元一一计算完毕。

## 5 讨论

最后求解一个介子束缚态薛定谔方程(20), 即  $Ha = EBa$ , 要解出介子质量的数值解, 以便来确定其他附带参量的值。

经过计算, 直接用 Breit 势或用正规化的 Breit 势,  $\pi$  和  $\rho$  的劈裂是很容易实现, 主要是  $\eta_c$  和  $J/\psi$  的劈裂难度大。人们采用的耦合常数  $\alpha_s$  与空间坐标无关, 直接用 Breit 势无法实现  $\eta_c$  和  $J/\psi$  的劈裂。

要实现劈裂首先必须对 Breit 势实施修改或正规化。经过本文的计算发现,  $\eta_c$  和  $J/\psi$  精确劈裂时所需要的屏蔽质量  $\mu$  值为 4.0 GeV 左右。如果对各介子使用统一的常数  $\mu$ , 并使之达到 4.0 GeV 左右时,  $\pi$  和  $\rho$  发散, 不允许这么做。因为  $\pi$  和  $\rho$  所需要的  $\mu$  值很小。所以使用统一常数  $\mu$  无法实现劈裂。

对于夸克势模型, 特别是 Breit 势, 当轻介子、重介子一起计算的时候, 使  $\eta_c$  和  $J/\psi$  劈裂是个难题。文献[15]采用不同于 Breit 势的夸克势模型, 使  $\eta_c$  和  $J/\psi$ ,  $\chi_{c0}$ ,  $\chi_{c1}$ ,  $\chi_{c2}$  之间劈裂过。但该文只算了结构为  $c\bar{c}$  的重介子。计算中无需兼顾轻介子问题, 此时很容易实现劈裂。

文献[16]中采用的势模型, 其中的一项与

yukawa 势  $e^{-\mu r}/r$  有关。在那里把  $\mu$  取为与折合质量  $\mu_r = m_i m_j / (m_i + m_j)$  成正比。本文从这点出发, 认为  $\mu$  是折合质量  $\mu_r$  的函数。然后把它展开成多项式, 用逐级近似的方法, 取到三阶多项式, 就能够实现这些介子的劈裂, 从而给出了一个有效的、稳定的夸克势模型。

$$\mu = c_0 + c_1 \mu_r + c_2 \mu_r^2 + c_3 \mu_r^3. \quad (34)$$

我们的势模型中可以调节的自由参量有弦张力系数  $b$ , 常数项势  $V_0$  和 5 种夸克质量  $m_u$  ( $m_u = m_d$ ),  $m_s$ ,  $m_c$ ,  $m_b$ , 4 个展开系数  $c_0, c_1, c_2, c_3$ 。经过计算, 在我们的模型中  $\alpha_s$  不再是可调参量了, 而采用文献[2]的耦合常数  $\alpha_s(Q^2) = (12\pi) / [(33 - 2n_f) \ln(A + Q^2/B^2)]$ , 其中  $A = 10, B = 0.31 \text{ GeV}$ 。波函数中的宽度系数  $\beta$  的取值, 也采用文献[2]中的  $\beta$  值。

为方便参考, 表 1 列出了多个计算结果, 其中第 1 列数据  $M(\text{exp})$  是取自文献[2]的实验质量, 第 2 列  $M^{\text{th1}}$  和第 3 列  $M^{\text{th2}}$  是本文使用统一的常数  $\mu$  和使用多项式  $\mu$  的计算结果。第 4 列是使用多项式  $\mu$  计算的介子半径, 第 5 列  $M^{[14]}$  和第 6 列  $M^{[2]}$  是理论质量, 第 7 列是文献[2]计算的介子半径。

表 1 本文计算结果与实验值的比较\*

Meson	$M^{\text{exp}}/\text{GeV}$	$M^{\text{th1}}/\text{GeV}$	$M^{\text{th2}}/\text{GeV}$	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}^{\text{th2}}/\text{fm}$	$M^{[14]}/\text{GeV}$	$M^{[2]}/\text{GeV}$	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}^{[2]}/\text{fm}$
$\pi(1^1S_0)$	0.140	0.140	0.140	0.356	0.143	0.140	0.512
$K(1^1S_0)$	0.494	0.498	0.493	0.405	0.494	0.495	0.521
$K^*(1^3S_1)$	0.892	0.874	0.906	0.567	0.907	0.904	0.674
$\rho(1^3S_1)$	0.770	0.774	0.771	0.613	0.788	0.774	0.769
$\phi(1^3S_1)$	1.020	0.972	1.013	0.531	1.031	0.992	0.647
$b_1(1^1P_1)$	1.235	1.267	1.348	0.850	1.397	1.330	0.978
$a_1(1^3P_1)$	1.260	1.234	1.315	0.841	1.573	1.353	0.993
$\phi(2^3S_1)$	1.686	1.770	1.887	0.904	1.852	1.870	0.983
$D(1^1S_0)$	1.869	1.983	2.034	0.547	1.865	1.913	0.585
$D^*(1^3S_1)$	2.010	2.034	2.104	0.579	1.998	1.998	0.626
$D_s(1^1S_0)$	1.969	2.040	2.050	0.450	1.976	2.000	0.508
$D_s^*(1^3S_1)$	2.112	2.088	2.145	0.498	2.121	2.072	0.546
$D_1(1^1P_1)$	2.422	2.499	2.628	0.787	2.408	2.506	0.840
$D_2(1^3P_2)$	2.460	2.483	2.599	0.777	2.381	2.514	0.845
$\eta_c(1^1S_0)$	2.979	3.032	2.981	0.316	2.975	3.033	0.388
$J/\psi(1^3S_1)$	3.097	3.056	3.094	0.371	3.128	3.069	0.404
$h_c(1^1P_1)$	3.570	3.456	3.525	0.549	3.520	3.462	0.602
$\chi_{c0}(1^3P_0)$	3.417	3.437	3.416	0.481	3.412		
$\chi_{c1}(1^3P_1)$	3.511	3.453	3.505	0.537	3.505		
$\chi_{c2}(1^3P_2)$	3.556	3.468	3.553	0.568	3.538		
$\psi'(2^3S_1)$	3.686	3.673	3.754	0.639	3.689	3.693	0.666

$B(1^1S_0)$	5.279	5.371	5.425	0.558	5.272	5.322	0.574
$B^*(1^3S_1)$	5.324	5.382	5.441	0.564	5.319	5.342	0.583
$B_s(1^1S_0)$	5.369	5.411	5.445	0.482	5.368	5.379	0.503
$B_s^*(1^3S_1)$	5.416	5.421	5.467	0.493	5.426	5.396	0.513
$\eta_b(1^1S_0)$	9.393	9.451	9.397	0.226			
$\Upsilon(1^3S_1)$	9.460	9.455	9.430	0.239	9.453	9.495	0.255
$\chi_b(1^3P_1)$	9.899	9.793	9.797	0.381	9.889	9.830	0.423
$\Upsilon(2^3S_1)$	10.020	9.908	9.940	0.482	10.023	9.944	0.519
$\chi_b(2^3P_1)$	10.260	10.131	10.190	0.563	10.257	10.166	0.604
$\Upsilon(3^3S_1)$	10.350	10.006	10.055	0.135	10.359	10.340	0.573

\*  $M^{\text{th1}}$ :  $b=0.183 \text{ GeV}^2$ ,  $V_{\text{con}}=-0.557 \text{ GeV}$ ,  $m_u=0.395 \text{ GeV}$ ,  $m_s=0.555 \text{ GeV}$ ,  $m_c=1.730 \text{ GeV}$ ,  $m_b=5.039 \text{ GeV}$ ,  $\mu=0.752 \text{ GeV}$ ;  $M^{\text{th2}}$ :  $b=0.235 \text{ GeV}^2$ ,  $V_{\text{con}}=-0.663 \text{ GeV}$ ,  $m_u=0.346 \text{ GeV}$ ,  $m_s=0.563 \text{ GeV}$ ,  $m_c=1.752 \text{ GeV}$ ,  $m_b=5.047 \text{ GeV}$ ,  $\mu=c_0+c_1\mu_r+c_2\mu_r^2+c_3\mu_r^3$ ,  $c_0=0.448 \text{ GeV}$ ,  $c_1=-0.108$ ,  $c_2=6.904 \text{ GeV}^{-1}$ ,  $c_3=-2.256 \text{ GeV}^{-2}$ 。

## 参考文献 (References):

- [1] Lucha W, Schoberl F F, Gromes D. Phys Rep, 1991, **200**: 127.
- [2] Wong C Y, Swanson E S, Barnes T. Phys Rev, 2001, **C65**: 014903.
- [3] Godfrey S, Kokoski R. Phys Rev, 1991, **D43**: 1679.
- [4] Godfrey S, Isgur N. Phys Rev, 1985, **D32**: 189.
- [5] Godfrey S. Phys Rev, 1985, **D31**: 2375.
- [6] Capstick S, Isgur N. Phys Rev, 1986, **D34**: 2809.
- [7] Barnes T, Black N. Phys Rev, 1999, **C60**: 045202.
- [8] Chen J X, Su J C. Phys Rev, 2001, **C64**: 065201.
- [9] Wang H J, Yang H, Su J C. Phys Rev, 2003, **C68**: 055204.
- [10] Zhao G Q, Jing X G, Su J C. Phys Rev, 1998, **D58**: 117503.
- [11] Wong C Y, Swanson E S, Barnes T. Phys Rev, 2000, **C62**: 045201.
- [12] Rujula A D, Georgi H, Glashow S L. Phys Rev, 1975, **D12**: 147.
- [13] Wong C Y. Phys Rev, 2004, **C69**: 055202.
- [14] Crater H, Vanalstine P. Phys Rev, 2004, **D70**: 034026.
- [15] Ebert D, Faustov R N. Phys Rev, 2000, **D62**: 034014.
- [16] Vijande J, Fernandez F, Valcarce A. J phys, 2005, **G31**: 481.

# Regularization of Breit Potential and Splitting of $\eta_c$ -J/ $\psi$ \*

JIRIMUTU<sup>1)</sup>

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150006, China)

**Abstract:** The study of the splittings between the masses of mesons with different spin and orbit quantum numbers is important for checking the quark potential model. In the previous calculations with quark potential models, the splitting between  $\eta_c$  and J/ $\psi$  is however too small to the experimental result. In this paper the mass splitting of  $\eta_c$ -J/ $\psi$  and the splitting between the new meson  $\eta_b$  and  $\Upsilon(1s)$  are investigated with the complete Breit quark potential regularized by applying the form factor  $\mu^2/(q^2+\mu^2)$  one time in momentum space. In addition, because the complete Breit potential includes the spin-orbit interaction, it can be used to investigate the splittings among  $\chi_{c0}$ ,  $\chi_{c1}$  and  $\chi_{c2}$ . The investigated results indicate that the screen mass  $\mu$  in the form factor of regularization is related to the reduced mass of meson. The splittings of  $\eta_c$ -J/ $\psi$ ,  $\eta_b$ - $\Upsilon$ , and  $\chi_{c0}$ - $\chi_{c1}$ - $\chi_{c2}$  can reproduce the experimental results with high accuracy when the screen mass is expanded to the third-order polynomial of meson reduced mass.

**Key words:** quark model; matrix element; meson bound state; regularized; masses splitting

\* Received date: 22 Jan. 2009; Revised date: 6 Jul. 2009

1) E-mail: jrmt2003@yahoo.com.cn