文章编号：1007－4627(2009)01－0019－04

非对易空间中耦合谐振子的能级分裂*

王亚辉，王剑华，任亚杰，黄文登
（陕西理工学院物理系，陕西 汉中 723001）

摘　要：非对易空间效应的出现引起了物理学界的广泛兴趣。介绍了非对易空间中量子力学的代数关系，在所考虑的空间变量的对易关系中包含了坐标-坐标的非对易性，并且把 Moyal-Weyl 乘法在非对易空间中通过一个Bopp变换转变成普通的乘法。然后给出了非对易空间中耦合谐振子的能级分裂情况。

关 键 词：非对易空间；耦合谐振子；能级分裂
中图分类号：O413.1　　　**文献标识码**：A

1　引言

近年来发现[1—7]，在弦的尺度下出现了空间的非对易效应。在具有非零背景场的D膜理论的低能效应研究的推动下，非对易空间问题在物理学界引起了极大的兴趣和关注。通常研究非对易空间问题的理论和方法主要来自量子场论，然而，在量子力学的框架下研究一些可解模型的非对易空间效应也是非常有意义的工作。文献[8—12]对非对易量子力学的非微扰方面有了广泛的研究。我们感兴趣的是在微扰的情况下探讨非对易量子力学的一些具有本质性的问题。

本文探讨非对易量子力学的一种可解模型——非对易空间中耦合谐振子。耦合谐振子模型在量子理论中对耗散系统的研究不仅有重要的理论意义，而且还和实际应用密切相关。事实上，任何微观系统都总是处于一定的宏观环境之中，而不能孤立存在。在高能物理、宇宙学、凝聚态物理、量子相变理论和其他的物理分支中都有耗散现象的出现，耦合耦合谐振子模型在研究多体问题和关联系统中的相互作用具有重要的作用，因此研究非对易空间中耦合谐振子具有重要的意义。

我们首先讨论非对易量子力学代数的一般情况，把Schrödinger方程通过一个Bopp变换，使$H(x, p)\rightarrow H(\hat{x}, p)$。我们的重点是把单粒子量子力学的产生和消灭算符推广到非对易空间中服从玻色-爱因斯坦统计的态矢量空间的玻色子系统，在所给出的相空间变量的对易关系中包含了空间-空间的非对易性，并重新定义了产生和消灭算符。利用这些对易关系，进而讨论了二维耦合谐振子的能级分裂情况。

2　非对易量子力学代数

在量子力学中，坐标和动量的对易关系为

$$[x_i, p_j]=\mathrm{i}\hbar\delta_{ij},\quad [x_i, x_j]=0,$$
$$[p_i, p_j]=0,\quad i, j=1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

这种情况称为对易空间。在非对易空间中，用$\hat{x}$和$\hat{p}$表示坐标和动量算符，它们的对易关系由下面的公式给出[3,4]：

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j]=\mathrm{i}\hbar\delta_{ij},\quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j]=\mathrm{i}\Theta_{ij},$$
$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j]=0,\ i, j=1,2,\cdots, n \tag{2}$$

其中Θ_{ij}是完全反对称矩阵。在对易空间中，定态Schrödinger方程通常被写成

$$H(x, p)*\Psi=E\Psi\ 。\tag{3}$$

在非对易空间中，可以通过一个Bopp变换，把$H(x, p)\rightarrow H(\hat{x}, p)$[1,2]。这样，Schrödinger方程

* 收稿日期：2008－09－27；修改日期：2008－11－03
* 基金项目：国家自然科学基金资助项目(10447005)；陕西省教育厅自然科学基础研究计划资助项目(07JK207)；陕西理工学院科研资助项目(SLG0521)
作者简介：王亚辉(1978－)，男(汉族)，陕西宝鸡人，硕士研究生，讲师，从事量子场论方面的研究；
E-mail：wangyahui8312469@163.com

可以写成

$$H(\hat{x}_i,\ p_i)\Psi=H(x_i-\frac{1}{2\hbar}\Theta_{ij}p_j,\ p_i)\Psi=E\Psi\ 。\tag{4}$$

这里Moyal-Weyl乘(星乘)被定义为

$$\begin{aligned}(f*g)(x)&=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta_{ij}\partial_i^x\partial_j^x}f(x)g(x)\\&=f(x)g(x)+\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta_{ij}\partial_i f\partial_j g\,|_{x_i=x_j}+\cdots\ ,\end{aligned}\tag{5}$$

其中$f(x)$和$g(x)$是两个任意函数。

由文献[5]可以得到非对易空间中的坐标$\hat{x}$和动量$\hat{p}$用对易空间中的坐标x和动量p线性表示出来的基本形式:

$$\begin{cases}\hat{x}_i=x_i-\frac{1}{2\hbar}\Theta_{ij}p_j\ ,\\ \hat{p}_i=p_i\ ,\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{cases}\tag{6}$$

由文献[6],当$n=2$时,可以解出:

$$\Theta=\begin{pmatrix}0&\theta\\-\theta&0\end{pmatrix}\tag{7}$$

(6)式变为

$$\begin{cases}\hat{x}_1=x_1-\frac{1}{2\hbar}\theta p_2\ ,\ \hat{p}_1=p_1\\ \hat{x}_2=x_2+\frac{1}{2\hbar}\theta p_1\ ,\ \hat{p}_2=p_2\ 。\end{cases}\tag{8}$$

3 非对易空间中耦合谐振子的能级

二维耦合谐振子的Hamiltonian算符为

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2(x_1^2+x_2^2)-\\&\frac{\lambda}{2}(x_1x_2+x_2x_1)\ 。\end{aligned}\tag{9}$$

在非对易空间中,根据Moyal-Weyl乘(星乘)的意义,进行Bopp 变换,把$H(x,\ p)\rightarrow H(\hat{x},\ \hat{p})$,星乘就转变成了普通的乘法。因此,在非对易空间中耦合谐振子的Hamiltonian算符为

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\frac{1}{2\mu}(\hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2)+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2(\hat{x}_1^2+\hat{x}_2^2)-\\&\frac{\lambda}{2}(\hat{x}_1\hat{x}_2+\hat{x}_2\hat{x}_1)\ 。\end{aligned}\tag{10}$$

将(8)式代入(10)式得:

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2\Big[\Big(x_1-\frac{1}{2\hbar}\theta p_2\Big)^2+\\&\Big(x_2+\frac{1}{2\hbar}\theta p_1\Big)^2\Big]-\frac{\lambda}{2}\Big[\Big(x_1-\frac{1}{2\hbar}\theta p_2\Big)\times\\&\Big(x_2+\frac{1}{2\hbar}\theta p_1\Big)+\Big(x_2+\frac{1}{2\hbar}\theta p_1\Big)\Big(x_1-\frac{1}{2\hbar}\theta p_2\Big)\Big]\ ,\end{aligned}\tag{11}$$

整理后为

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2(x_1^2+x_2^2)-\\&\frac{\mu\,\omega^2\theta}{2\hbar}(x_1p_2-x_2p_1)+\\&\frac{1}{2}\mu\,\omega^2\Big(\frac{1}{4\hbar^2}\theta^2p_1^2+\frac{1}{4\hbar^2}\theta^2p_2^2\Big)-\\&\frac{\lambda}{2}\Big(x_1x_2+\frac{\theta}{2\hbar}x_1p_1-\frac{\theta}{2\hbar}p_2x_2-\\&\frac{1}{4\hbar^2}\theta^2p_2p_1+x_2x_1-\frac{\theta}{2\hbar}x_2p_2+\\&\frac{\theta}{2\hbar}p_1x_1-\frac{1}{4\hbar^2}\theta^2p_1p_2\Big)\ ,\end{aligned}\tag{12}$$

其中θ表示一个小量,文献[2]曾经指出,$\theta\leqslant(10^4\ \mathrm{GeV})^{-2}$,将含有$\theta^2$的项忽略后得:

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\frac{1}{2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2(x_1^2+x_2^2)-\\&\frac{\mu\,\omega^2\theta}{2\hbar}(x_1p_2-x_2p_1)-\\&\frac{\lambda}{2}\Big(x_1x_2+\frac{\theta}{2\hbar}x_1p_1-\frac{\theta}{2\hbar}p_2x_2+\\&x_2x_1-\frac{\theta}{2\hbar}x_2p_2+\frac{\theta}{2\hbar}p_1x_1\Big)\ 。\end{aligned}\tag{13}$$

令 $$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1+x'_2),\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1-x'_2)\ ,\tag{14}$$

所以 $$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(p'_1+p'_2),\ p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(p'_1-p'_2)\ 。\tag{15}$$

将(14)和(15)式代入(13)式得:

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\frac{1}{2\mu}(p'^2_1+p'^2_2)+\frac{1}{2}\mu\,\omega^2(x'^2_1+x'^2_2)-\\&\frac{\mu\,\omega^2\theta}{2\hbar}[x'_1(p'_1-p'_2)-x'_1(p'_1+p'_2)+\\&x'_2(p'_1-p'_2)+x'_2(p'_1+p'_2)]-\\&\frac{\lambda}{2}[(x'^2_1-x'^2_2)+\frac{\theta}{4\hbar}(x'_1+x'_2)(p'_1+p'_2)+\\&\frac{\theta}{4\hbar}(p'_1+p'_2)(x'_1+x'_2)-\\&\frac{\theta}{4\hbar}(p'_1-p'_2)(x'_1-x'_2)-\\&\frac{\theta}{4\hbar}(x'_1-x'_2)(p'_1-p'_2)]\ 。\end{aligned}\tag{16}$$

经整理得：

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}(p'^2_1+p'^2_2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x'^2_1+x'^2_2)-\frac{\mu\omega^2\theta}{\hbar}(x'_2p'_1-x'_1p'_2)-\frac{\lambda}{2}\left[(x'^2_1+x'^2_2)+\frac{\theta}{\hbar}(x'_1p'_2+x'_2p'_1)\right]$$
$$=\frac{1}{2\mu}p'^2_1+\frac{1}{2}\mu\omega_1^2x'^2_1+\frac{1}{2\mu}p'^2_2+\frac{1}{2}\mu\omega_2^2x'^2_2-\frac{\mu\omega^2\theta}{\hbar}(x'_2p'_1-x'_1p'_2)-\frac{\lambda\theta}{2\hbar}(x'_1p'_2+x'_2p'_1)\ ,\tag{17}$$

其中

$$\omega_1=\sqrt{\omega^2-\frac{\lambda}{\mu}},\qquad \omega_2=\sqrt{\omega^2+\frac{\lambda}{\mu}}\ 。$$

(17)式可以写成 $\hat{H}=H_1+H_2+H_{1z}+H'$

其中
$$H_1=\frac{1}{2\mu}p'^2_1+\frac{1}{2}\mu\omega_1^2x'^2_1,$$
$$H_2=\frac{1}{2\mu}p'^2_2+\frac{1}{2}\mu\omega_2^2x'^2_2,$$
$$H_{1z}=-\frac{\mu\omega^2\theta}{\hbar}(x'_2p'_1-x'_1p'_2)\ ,\tag{18}$$
$$H'=-\frac{\lambda\theta}{2\hbar}(x'_1p'_2+x'_2p'_1)\ ,\tag{19}$$

式中，H_1和H_2分别为两个独立谐振子(频率ω_1，ω_2)的能量算符，H_{1z}为角动量算符，H' 为修正项。

把(19)式中变量 x'_i和p'_i按下面的方式变换成X_a和P_b(这里和后面的a，$b=1$，2)

$$\begin{cases}X_a=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x'_1-\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p'_2\ ,\\ X_b=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x'_1+\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p'_2\ ;\\ P_a=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p'_1+\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x'_2\ ,\\ P_b=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p'_1-\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x'_2\ 。\end{cases}\tag{20}$$

上面的X_a和P_b满足如下的关系：

$$X_a=X_a^+\ ,\ P_a=P_a^+\ ,$$
$$[X_a,\ X_b]=[P_a,\ P_b]=0\ ,$$
$$[X_a,\ P_b]=\mathrm{i}\delta_{ab}\ 。\tag{21}$$

再定义消灭—产生算符A_a和A_a^+：

$$A_a=\sqrt{\frac{1}{2\hbar}}X_a+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\hbar}}P_a\ ,$$
$$A_a^+=\sqrt{\frac{1}{2\hbar}}X_a-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\hbar}}P_a\ ,\tag{22}$$

(22)式中的A_a和A_a^+满足如下的关系：

$$[A_a,\ A_b]=[A_a^+,\ A_b^+]=0\ ,$$
$$[A_a,\ A_b^+]=\delta_{ab}\ 。\tag{23}$$

将产生、消灭算符代入(19)式得：

$$H'=-\frac{\lambda\theta}{2\hbar}(x'_1p'_2+x'_2p'_1)=\frac{\lambda\theta}{2\hbar}\left(\frac{A_a^2+A_a^{+2}-A_b^{+2}-A_b^2}{2\mu\omega}\right)\ 。\tag{24}$$

根据微扰理论的方法，在H^0本征态$|n_an_b\rangle$的表象中计算H'的矩阵元：

$$H'_{n'_an'_b,\ n_an_b}=\left\langle n'_an'_b\left|\frac{\lambda\theta}{2}\left(\frac{A_a^2+A_a^{+2}-A_b^{+2}-A_b^2}{2\mu\omega}\right)\right|n_an_b\right\rangle$$
$$=\frac{\lambda\theta}{4\mu\omega}[(n_a+1)\delta_{n'_a,n_a+1}\delta_{n'_b,n_b}\delta_{n'_a,n_a+1}\delta_{n'_b,n_b}-(n_b+1)\delta_{n'_b,n_b+1}\delta_{n'_a,n_a}\delta_{n'_b,n_b+1}\delta_{n'_a,n_a}+n_a\delta_{n'_a,n_a-1}\delta_{n'_b,n_b}\delta_{n'_a,n_a-1}\delta_{n'_b,n_b}-n_b\delta_{n'_b,n_b-1}\delta_{n'_a,n_a}\delta_{n'_b,n_b-1}\delta_{n'_a,n_a}]\ ,\tag{25}$$

所以一级修正，二级修正分别为

$$E'^{(1)}=H'_{n'_an'_b,\ n_an_b}=0\ ,\tag{26}$$
$$E'^{(2)}=\sum_{n'}\frac{|H'_{n'_an'_b,n_an_b}|^2}{E_n^{(0)}-E_{n'}^{(0)}}=\left(\frac{\lambda\theta}{4\mu\omega}\right)^2\times\left[\frac{(n_a+1)^2}{-\hbar\omega}+\frac{(n_b+1)^2}{-\hbar\omega}+\frac{n_a^2}{\hbar\omega}+\frac{n_b^2}{\hbar\omega}\right]=-\frac{\lambda^2\theta^2(n_a+n_b+1)}{8\hbar\omega^3}\ 。\tag{27}$$

(27)式中含θ^2，因为θ是一个小量，因此含有θ^2的项可以被忽略。所以Hamiltonian算符能量的本征值为

$$E_{n_a,\ n_b}=\hbar\omega_1\left(n_a+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_2\left(n_b+\frac{1}{2}\right)-\mu\omega^2\theta(n_b-n_a),$$
$$n_a,\ n_b=0\ ,1,\ 2,\ \ldots\ ,n\ 。\tag{28}$$

由于$E_{n_a,\ n_b}$取分立值，零点能量绝对值是$(\hbar/2)(\omega_1+\omega_2)$。对于$n_a=n_b=n$的情况，本征值为$\hbar\omega_1[n+(1/2)]+\hbar\omega_2[n+(1/2)]$；对于$n_a=-n_b=n$的情况，本征值为 $\hbar\omega_1[n+(1/2)]-\hbar\omega_2\times[n+(1/2)]+2\mu\omega^2\theta n$。从公式(28)得到本征值的间隔为$\Delta n_a\hbar\omega_1+\Delta n_b\hbar\omega_2-\mu\omega^2\theta(\Delta n_b-\Delta n_a)$，显然这

种情况能级的间隔是依靠着参数θ而分裂的。

在θ趋近于零的极限情况下，本征值为$\omega_1\hbar[n_a+(1/2)]+\omega_2\hbar[n_b+(1/2)]$，这就回到了对易空间时的结果。

4 讨论

在本文中，首先是把单粒子量子力学的产生和消灭算符推广到非对易空间中服从玻色-爱因斯坦统计的态矢量空间的玻色子系统，并且给出的空间变量的对易关系中包含了空间-空间的非对易性。利用这些对易相关系，我们进一步讨论了二维耦合谐振子的能级和能级分裂情况。所得到的结果在θ趋近于零的极限情况下，回到了对易空间时的结果。

空间的非对易效应在超弦场论中有着非常重要的作用。而非对易空间量子力学问题研究的大部分工作(尤其是在微扰情况下)的研究才刚刚展开，非对易空间中问题在各个物理领域的理论和实验探讨都是非常必要的。

参考文献(References)：

[1] Christiansen H R, Schaposnik F A. Noncommutative Quantum Mechanics and Rotating Frames. arxiv:hep－th/0106181.

[2] Gamboa J, Loewe M, Rojas J C. Non-commutative Quantum Mechanics. arXiv: hep-th/0010220.

[3] Seiberg N, Witten E. String Theory and Noncommutative Geometry. arXiv: hep-th/9908142.

[4] Li Kang, Wang Jianhua, Chen Chiyi. Modern Physics Letter, 2005, A20(28): 2 165.

[5] Chaichian M, Sheikh Jabbari M M, Tureanu A. Phys Rev Lett, 2001, 86: 2 716.

[6] Wang Jianhua, Li Kang, Liu Peng. High Energy Physics and Nuclear Physcis, 2006, 30(5): 387(in Chinese).
(王剑华，李　康，刘　鹏. 高能物理与核物理，2006，30(5)：387.)

[7] Wang Yahui, Wang Jianhua, Huang Wendeng. Nuclear Physcis Review, 2008, 25(3): 218(in Chinese).
(王亚辉，王剑华，黄文登. 原子核物理评论，2008，25(3)：218.)

[8] Wang Jianhua, Li Kang. High Energy Physics and Nuclear Physcis, 2006, 30(11): 1 053(in Chinese).
(王剑华，李　康. 高能物理与核物理，2006，30(11)：1 053.)

[9] Muthukumar B, Mitra P. Phys Rev, 2002, D66: 027 701.

[10] Sayipjamal Dulat, Kang Li. Mod Phys Lett, 2006, A21(39): 2 971.

[11] Li Kang, Chamoun Nidal. Chinese Physics Letters, 2006, 23(5): 1 122.

[12] Wang Jianhua, Li Kang. Chinese Physics Letters, 2007, 24(1): 5.

Energy Splitting of Coupling Harmonic Oscillator in Non-commutative Space*

WANG Ya-hui[1)], WANG Jian-hua, REN Ya-jie, HANG Wen-deng

(*Department of Physics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong* 723001, *Shaanxi, China*)

Abstract: The effect of noncommutativity of space have caused the physical academic circles widespread interest. In this paper, the non-commutative (NC) is introduced, which contain non-commutative of coordinate-coordinate, and find that the Moyal-Weyl product in NC space can be replaced with a Bopp shift. Then, the energy splitting of the coupling harmonic oscillator in non-commutative spaces are discussed.

Key words: non-commutative space; coupling harmonic oscillator; energy splitting

* **Received date**: 27 Sep. 2008; **Revised date**: 3 Nov. 2008

* **Foundation item**: National Natural Science Foundation of China(10447005); Natural Science Foundation of Education Bureau of Shaanxi Province(07JK207); Foundation of Shaanxi University of Technology(SLG0521)

1) E-mail: wangyahui8312469@163.com