文章编号: 1007－4627(2007)04－0268－06

$SU(2)$ Chern-Simons 涡旋解的拓扑结构*

刘紫玉[1,3], 李希国[1,2,#], 张鹏鸣[1,2], 李永青[1,3]

(1 中国科学院近代物理研究所, 甘肃 兰州 730000;
2 兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心, 甘肃 兰州 730000;
3 中国科学院研究生院, 北京 100049)

摘　要: 运用规范势分解理论研究了 Dunne-Jackiw-Pi-Trugenberger 模型中的自对偶方程, 得到一个静态的自对偶 Chern-Simons 多涡旋解, 每个涡旋由 5 个参数描述。发现了自对偶解与拓扑数之间的关系, 而拓扑数由 Brouwer 度与 Hopf 指标确定。同时, 也研究了该涡旋解的磁通量的拓扑量子化。

关 键 词: Chern-Simons 理论; Dunne-Jackiw-Pi-Trugenberger 模型; 涡旋

中图分类号: O189.11; O413.4　　**文献标识码**: A

1　引言

涡旋(涡线)是一个很有趣的物理现象, 在研究凝聚态物理中扮演了重要的角色。从物理现象而言, 它是在物质凝聚体中形成的, 例如, 流体中的涡旋; 在第二类超导中, 当磁场 H 超过 H_c 时, 磁力线可以穿过超导体内部形成一些管状结构, 每个管内部的磁通量是量子化的, 这一现象称为涡线。这是 Abrikosov 利用描述外磁场中超导体的 Ginsburg-Landau 方程预言的, 后来被实验所证实。1973 年, Nielson 和 Olesen 研究发现[1], 在 2+1 时空中, 标量场与规范场耦合的相对论模型中也存在涡线解。从纯数学角度看, 涡旋是一类拓扑孤粒子, 与对称群的拓扑性质相关, 是经典标量场的一类稳定解。近来, 在自旋 1/2 分量的 Bose-Einstein 凝聚体中也发现了涡旋结构[2]。对于像磁通这样的涡旋其解给出磁通量量子化的最小单位 $\Phi_0=2\pi c\hbar/e$, 总磁通 $\Phi=n\Phi_0$, 其中 $n=\pm0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$是与 $U(1)$群的同伦群 $\pi_1(U(1))=z$ 相联系的。实际上, 这个整数就是涡旋解的映射度。所以, 类涡旋的物理现象反映了时空的对称与整体性质, 也就是拓扑性质。

Chern-Simons 形式是纤维丛上的次级示性类, 它在物理学的研究中有着非常重要的作用[3]。早在 1981 年, Schonfeld 第一次将 Chern-Simons 理论应用到物理上, 得到了所谓的具有质量的拓扑规范理论[4]。1982 年, Deser 等[5]在研究 2 维物理现象时考虑了所谓的 Chern-Simons 理论, 也就是在 2+1 维空间中考虑 Chern-Simons 规范场理论后, 发现了许多新的物理效应, 例如, 分数角动量和分数统计[6]等, 而且, 能够解释量子霍尔效应[7]。1989 年, Witten 发现 3 维流形中纽结的拓扑不变量分类可以用 Chern-Simons 规范场理论的 Wilson 圈算子的配分函数重新解释。同时, 也发现这种理论提供了 3 维流形的一种新的拓扑不变量, 并且, 通过 Chern-Simons 规范理论的精确解, 他给出了纽结的拓扑不变量与这种新的拓扑不变量的关系[8]。实际上, Chern-Simons 规范场理论来源于 4 维流形中规范场的 Chern-Simons 第二特征类[9]——一个拓扑不变量, 因此, 在研究 3 维流形的物理和整体数学结构时是应该考虑的。所以, Chern-Simons 规范理论不但是研究 3 维空间拓扑特征的理论基础, 而且与低维物理的拓扑性质有着深刻的联系。Chern-Simons 规范场与其它场耦合可以得到各种 2+1 维场论模型, 当系统的 Hamilton 量取最小值, 就可以得到静态的孤立子解, 轴对称的孤立子解即为涡旋(涡线)。研究 $U(1)$ Chern-Simons 规范场一类模型时, 发现了自对偶 Chern-Simons 涡旋解。例如, 将 Chern-Simons 理论与 Abelian-Higgs 模型相结

*　**收稿日期**: 2007－02－17; **修改日期**: 2007－03－29

*　**基金项目**: 中国科学院知识创新工程重点方向性资助项目(KJX2-SW-No16, KJCX3-SYW-No2); 国家自然科学基金资助项目(10435080, 10575123)

作者简介: 刘紫玉(1979－), 男(汉族), 河北高邑人, 博士研究生, 从事理论物理研究工作。

\#　**通讯联系人**: 李希国, E-mail: xgl@impcas.ac.cn

合可得到磁通型的涡旋[10—12]，将 Chern-Simons 理论与非线性薛定谔方程结合可得非相对论的 Jackiw-Pi 模型[13]。R. Jackiw 和 So-Young Pi 在研究 Jackiw-Pi 模型时得到了一个静态的自对偶 Chern-Smons 涡旋解，满足刘维尔方程。但他们只得到了考虑电子几率密度 $\rho\neq 0$ 的情况。把 Jackiw-Pi 模型推广到非Abel情况，即为 Dunne-Jackiw-Pi-Trugenberger（DJPT）模型[14]。

本文运用段一士教授建立的 ϕ-映射拓扑流理论[15]研究了 $SU(2)$ 规范下 DJPT 模型中 $\rho=0$ 处，即涡旋中心位置的奇点性质，得到了满足一个带有 δ 函数项的刘维尔方程的自对偶解。加入 δ 函数项后应不改变 $\rho\neq 0$ 时的解的形式，但对刘维尔方程积分后 δ 函数项会给涡旋解一个约束。这就将自对偶解与涡旋奇点的拓扑性质联系起来，从而得出一个完整的带有拓扑信息的涡旋解。利用此涡旋解在全空间积分可得到涡旋的磁通是量子化的。

2　(2+1) 维 ϕ-映射拓扑流理论

近年来，人们发现在物理体系中存在两类守恒流，一类是 Notherl 流，它依赖于物理体系的作用量；另一类是拓扑守恒流，依赖于物理体系的拓扑性质，它是自然守恒的。这节中将介绍低维平直时空的拓扑流理论。

设 $M\otimes R$ 是一个 2+1 维光滑流形，局域坐标为 $x^{\mu}(\mu=0,1,2)$，其中 $x^0=t\in R$ 表示时间变量。考虑一个光滑映射 $\phi: M\otimes R\to R^2$，其中 R^2 是一个 2 维欧氏空间，可得一个 2 维光滑矢量场

$$\phi^a=\phi^a(\boldsymbol{x},t),\qquad a=1,2 \tag{1}$$

可以定义 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的单位矢量场为[15]

$$n^a=\frac{\phi^a}{\phi}, \tag{2}$$

其中 $\phi\geqslant 0$，$\phi^2=|\boldsymbol{\phi}|^2=\phi^a\phi^a$，采用爱因斯坦求和规则，下同。显然满足约束条件

$$n^a n^a=1, \tag{3}$$

此条件表明单位矢量场是 $M\otimes R\to S^1$ 的一个映射。用这个单位矢量可构造 M 流形上的一个守恒流

$$j^{\mu}(x)=\frac{1}{2\pi}\varepsilon^{\mu\mu_1\mu_2}\varepsilon_{a_1a_2}\partial_{\mu_1}n^{a_1}\partial_{\mu_2}n^{a_2}, \tag{4}$$

自然满足守恒条件

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=0。 \tag{5}$$

由于这个守恒流不是 Lagrange 变分原理下的守恒量，所以称为拓扑流。

利用微分关系

$$\partial_{\mu}n^a=\frac{\delta^{ab}\phi^2-\phi^a\phi^b}{\phi^3}\partial_{\mu}\phi^b, \tag{6}$$

若定义雅可比行列式为

$$\varepsilon^{a_1a_2}D^{\mu}\left(\frac{\phi}{x}\right)=\varepsilon^{\mu\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_1}\phi^{a_1}\partial_{\mu_2}\phi^{a_2},$$
$$D^0\left(\frac{\phi}{x}\right)=D\left(\frac{\phi}{x}\right), \tag{7}$$

在 R^2 中使用 $\boldsymbol{\phi}$ 场满足的拉普拉斯算子关系

$$\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\partial\phi^a}\ln(\phi)=2\pi\delta(\boldsymbol{\phi}), \tag{8}$$

拓扑流 $j^{\mu}(x)$ 可表示为如下形式[16]：

$$j^{\mu}=\delta(\boldsymbol{\phi})\,D^{\mu}\left(\frac{\phi}{x}\right)。 \tag{9}$$

设 $\boldsymbol{\phi}$ 场有 m 个独立的零点，且它的第 i 个零点在 $\boldsymbol{x}=z_i$ 处，根据 δ 函数理论[15]有

$$\delta(\boldsymbol{\phi})=\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i\delta(\boldsymbol{x}-z_i)}{|D(\phi/x)|_{\boldsymbol{x}=z_i}},$$

并且由 $\boldsymbol{\phi}(z_i(t),t)=0$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}z_i(t)}{\mathrm{d}t}=\left.\frac{D^{\mu}(\phi/x)}{D(\phi/x)}\right|_{\boldsymbol{x}=z_i}。$$

将上述两式代入(9)式得

$$j^{\mu}=\sum_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i\delta(\boldsymbol{x}-z_i(t))\frac{\mathrm{d}z_i^{\mu}}{\mathrm{d}t}, \tag{10}$$

其中

$$\eta_i=\frac{D(\phi/x)}{\|D(\phi/x)\|}=\pm 1 \tag{11}$$

为 ϕ-映射的 Brouwer 度，而 β_i 是 ϕ-映射的 Hopf 指标[17]，是一个正整数。

拓扑数密度为

$$j^0=\sum_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i\delta(\boldsymbol{x}-z_i), \tag{12}$$

相应的拓扑数为

$$Q = \int_M j^0 \mathrm{d}^2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \eta_i \quad 。 \tag{13}$$

3 DJPT 模型的自对偶方程

2+1 维非相对论的自对偶 Chern-Simons 系统描述物质场 Ψ 的非相对论动力学,它与规范势 A_μ 耦合时, 系统的拉氏量一般可写为[14]

$$L_{\mathrm{CS}} = -k\varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathrm{tr}(A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\rho) + \mathrm{itr}(\Psi^+ D_0\Psi) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}((D_i\Psi)^+ D_i\Psi) + \frac{1}{4\kappa}\mathrm{tr}([\Psi^+, \Psi]^2) , \quad (\hbar = c = m = 1) \tag{14}$$

设 U 是 $SU(2)$群的一个表示, 则 $SU(2)$群的规范势 A_μ 满足如下规范变换:

$$A_\mu \rightarrow U^{-1}A_\mu U + U^{-1}\partial_\mu U , \tag{15}$$

$$A_\mu = A_\mu^a T^a , \tag{16}$$

$$T^a = \frac{1}{2\mathrm{i}}\sigma^a , \tag{17}$$

其中 σ^a 是 Pauli 矩阵。

由(14)式, 可知非线性 Schrödinger 方程为[14]

$$\mathrm{i}D_0\Psi = -\frac{1}{2}\boldsymbol{D}^2\Psi - \frac{1}{2\kappa}\rho[[\Psi, \Psi^+], \Psi] , \tag{18}$$

Ψ 的协变微商为

$$D_\mu\Psi \equiv \partial_\mu\Psi + [A_\mu, \Psi] , \tag{19}$$

密度矩阵为

$$\rho = [\Psi, \Psi^+] 。 \tag{20}$$

Chern-Simons 方程为

$$\partial_x A_y - \partial_y A_x + [A_x, A_y] \equiv -B = \frac{\mathrm{i}}{\kappa}\rho , \tag{21}$$

$$\partial_i A_0 - \partial_t A_i + [A_i, A_0] \equiv -E^i = \frac{1}{\kappa}\varepsilon^{ij}j^j , \tag{22}$$

这里 j^i 是空间流密度

$$j^i = -\frac{\mathrm{i}}{2}([\Psi^+, D_i\Psi] - [(D_i\Psi)^+, \Psi]) 。 \tag{23}$$

利用如下变换

$$A_\pm = A_x \pm \mathrm{i}A_y , \tag{24}$$

$$\partial_\pm = \partial_x \pm \mathrm{i}\partial_y 。 \tag{25}$$

由(14)式可导出自对偶方程和 Chern-Simons 方程[14]为

$$\partial_\pm \Psi + [A_\mp, \Psi] = 0 , \tag{26}$$

$$\partial_\mp \Psi^+ + [A_\mp, \Psi^+] = 0 , \tag{27}$$

$$\partial_\pm A_\mp - \partial_\mp A_\pm + [A_\pm, A_\mp] = \pm\frac{2}{\kappa}[\Psi, \Psi^+] 。 \tag{28}$$

假设规范势和物质场矩阵 Ψ 可以由 $su(2)$李代数的 Chevallay 基进行分解[14]

$$\Psi = \phi E_1 , \tag{29}$$

$$A_+ = -a^* H , \tag{30}$$

$$A_- = aH , \tag{31}$$

这里 H 和 $E_{\pm1}$为 $su(2)$李代数的 Chevally 基, 满足如下关系

$$H = \sigma_z , \tag{32}$$

$$E_{\pm1} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm \mathrm{i}\sigma_y) , \tag{33}$$

$$[E_1, E_{-1}] = H , \tag{34}$$

$$[H, E_{\pm1}] = \pm 2E_{\pm1} , \tag{35}$$

$su(2)$李代数的嘉当矩阵为 1×1, 其元素为 2。将(29)式和(33)式代入(20)式, 并注意(34)式, 可得

$$\rho = \phi^*\phi H = \rho_0 H , \tag{36}$$

其中

$$\rho_0 = \phi^*\phi 。 \tag{37}$$

对 ϕ 和 a 做如下分解[18]

$$\phi = \phi_1 + \mathrm{i}\phi_2 , \quad \phi^* = \phi_1 - \mathrm{i}\phi_2 ; \tag{38}$$

$$a = a_1 - \mathrm{i}a_2 , \quad a^* = a_1 + \mathrm{i}a_2 , \tag{39}$$

其中 ϕ_a 和 a_a 均为实标量场, 定义单位矢量场

$$n_a = \frac{\phi^a}{\|\phi\|} , \quad a = 1, 2 \tag{40}$$

这里

$$\|\phi\|^2 = \phi^+\phi = \phi_a\phi_a 。 \tag{41}$$

将(31)式代入$\partial_-\Psi + [A_-, \Psi] = 0$, 并利用(38)式和(39)式可得[18]

$$\nabla^2 \ln\rho_0 = -\frac{4}{\kappa}\rho_0 - \varepsilon^{ij}\varepsilon^{ab}\partial_i n^a \partial_j n^b 。 \tag{42}$$

同理, 由$\partial_+\Psi + [A_+, \Psi] = 0$, 可得

$$\nabla^2 \ln\rho_0 = \frac{4}{\kappa}\rho_0 + \varepsilon^{ij}\varepsilon^{ab}\partial_i n^a \partial_j n^b 。\qquad (43)$$

利用(6)式、(7)式和(8)式，(42)式和(43)式可以合写为

$$\nabla^2 \ln\rho_0 = \mp \frac{4}{\kappa}\rho_0 \mp 4\pi\delta^2(\boldsymbol{\phi}) J\left(\frac{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{r}}\right), \qquad (44)$$

其中 $J(\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{x})$ 是雅可比行列式，

$$J\left(\frac{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{x}}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{ij}\frac{\partial\phi_a}{\partial x^i}\frac{\partial\phi_b}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, 2 。\qquad (45)$$

当 $\rho_0 \neq 0$，(44)式会变为刘维尔方程

$$\nabla^2 \ln\rho_0 = \mp \frac{4}{\kappa}\rho_0, \qquad (46)$$

其轴对称解为[13]

$$\rho_0 = 2|k|\frac{|f'(z)|^2}{(|f(z)|^2 + 1)^2}, \qquad (47)$$

其中 $z = x + \mathrm{i}y$，$f(z)$ 是 z 的任意函数。由于 $\rho \geqslant 0$，则(44)式只能是

$$\nabla^2 \ln\rho_0 = -\frac{4}{|\kappa|}\rho_0 - \mathrm{sgn}\kappa 4\pi\delta^2(\boldsymbol{\phi}) D\left(\frac{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{r}}\right), \qquad (48)$$

当且仅当 $f(z)$ 取比例函数形式时

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad (49)$$

其中

$$\deg P < \deg Q,$$

亚纯函数 $f(z)$ 可产生一具有有限磁通量规则的涡旋解[19]。通常我们可将 $f(z)$ 写成一些函数的和[20]：

$$f(z) = \sum_{a=1}^{m}\left(\frac{c_a}{z - z_a}\right)^{N_a}, \qquad (50)$$

其中 z_a 和 c_a 是复平面上的常量。由于 $\deg P < \deg Q$，所以这里要求 $N_a > 0$。(50)式是描述了 m 个涡旋的多涡旋解，其中第 a 个涡旋的荷为 N_a。所以在此多涡旋解中包含了 $5m$ 个参量：z_a 中包含 $2m$ 个实参量，它描述了每个涡旋的位置；而 c_a 中的 $2m$ 个实参量描述了每个涡旋的尺度和相位；还有 m 个参量 N_a 描述了每个涡旋的荷。

4　DJPT 模型多涡旋解的拓扑结构

这节从(48)式出发讨论涡旋解的具体形式以及其拓扑结构，$\nabla^2 \ln\rho_0$ 在极坐标系下可做如下展开：

$$\nabla^2 \ln\rho_0 = \frac{\partial^2}{\partial^2 r}\ln\rho_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\ln\rho_0, \qquad (51)$$

而在极坐标系中

$$z_a = r_a \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad (52)$$

其中 $\boldsymbol{r}_a$ 就是第 a 个涡旋中心处的坐标，将方程(48)式在每个涡旋的中心附近进行积分，可得

$$\int_r^{r+r_\varepsilon}\nabla^2 \ln\rho_0 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -4\mathrm{sgn}\kappa\pi\int_r^{r+r_\varepsilon}\delta^2(\boldsymbol{\phi}) J\left(\frac{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{r}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad (53)$$

式中 $\boldsymbol{r}_\varepsilon$ 为无穷小矢量。

由(9)式可知

$$\delta^2(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{a=1}^{m}\frac{\beta_a}{\left|J\left(\frac{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{r}}\right)\right|_{r=r_a}}\delta^2(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a) 。$$

我们可得

$$\int_r^{r+r_\varepsilon}\delta^2(\boldsymbol{\phi}) J\left(\frac{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{r}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \beta_a\eta_a, \qquad (54)$$

其中 β_a 称为 Hopf 指标，它是一个正整数，表示当 $\boldsymbol{r}$ 覆盖零点 z_a 的邻域一次，矢量场 $\boldsymbol{\phi}$ 将覆盖 ϕ 空间的相应邻域 β_a 次。而

$$\eta_a = \mathrm{sgn}J\left(\frac{\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{r}}\right)\bigg|_{r-r_a} = \pm 1 \qquad (55)$$

称为矢量场 $\boldsymbol{\phi}$ 的 Brouwer 度。

如果定义拓扑数

$$Q_a = \beta_a\eta_a (\text{不求和}), \qquad (56)$$

则从(53)式可解出

$$N_a - 1 = -\mathrm{sgn}\kappa\, Q_a, \qquad (57)$$

由此看出 κ 的符号应与雅可比行列式 $J(\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{r})$ 的符号相反。其实，拓扑数 Q 局域拓扑性质是由涡旋的中心位置附近 ψ 场的拓扑指数 β 和 η 决定，而其整体性质是由 ψ 场的映射度决定[21]。

由(36)式可得涡旋的密度矩阵

$$\rho = \rho_0 H, \qquad (58)$$

图 1 和图 2 分别给出了 2 个和 3 个涡旋的示意图。

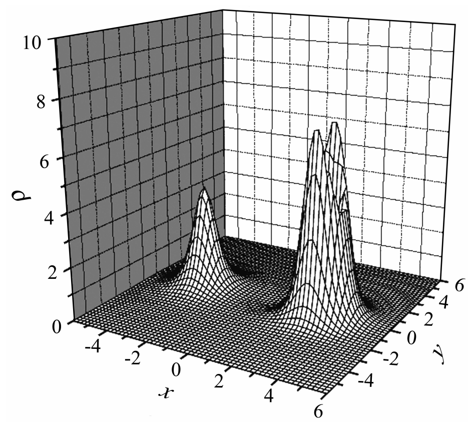

图 1 2 个涡旋 ρ 的分布($Q_1=0$, $Q_2=1$)

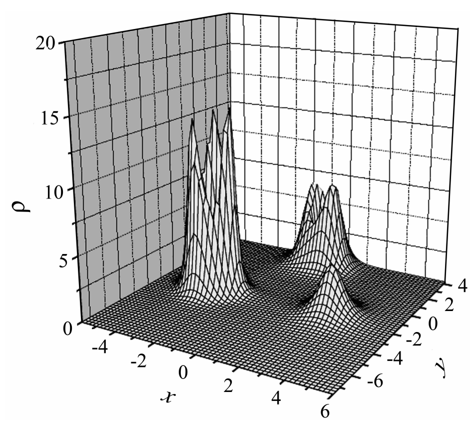

图 2 3 个涡旋 ρ 的分布($Q_1=0$, $Q_2=1$, $Q_3=2$)

如果定义单位磁通

$$\Phi_0 = 2\mathrm{i}\pi H , \tag{59}$$

利用(21)式可得涡旋总的磁通

$$\Phi = \int_0^{\infty} \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -2\mathrm{sgn}\kappa\Phi_0[-\mathrm{sgn}\kappa Q + m] , \tag{60}$$

其中

$$Q = \sum_{a=1}^{m} \beta_a \eta_a \tag{61}$$

是体系的总拓扑数。

5 结论

2 + 1 维 DJPT 模型是描述 Chern-Simons 场与非相对论复标量场耦合的理论，是与传统非 Abel 规范理论不同的规范理论。通过求系统的哈密顿量的极小值，就可以得到自对偶方程。当这个系统的对称群为 $SU(2)$ 群时，通过 ϕ-映射理论研究了物质场在奇点处的性质。结果表明，物质场在奇点处的性质反映了涡旋的拓扑性质，所以包含奇点的自对偶解自然地带有拓扑信息，通过对自对偶解在全空间的积分得到了每个涡旋的荷，是由 Hopf 指标和 Brower 度共同确定的。另外，可以看出磁通是量子化的，并得到体系的磁通量与体系的拓扑数之间的关系，即物理体系的总磁通量是由其拓扑性质决定的，是个拓扑不变量。2 + 1 维 DJPT 模型中也可以存在多个涡旋解，其磁通量关系满足(60)式。

参考文献(References):

[1] Nielsen H B, Olesen P. Nucl Phys, 1973, **B61**: 45.

[2] Jia Duojie, Duan Yishi, Li Xiguo. Phys Lett, 2001, **A289**: 245; Li Xiguo, Jia Duojie, Gao Yuan. High Energy Physics and Nuclear Physics, 2003, **27**: 12(in Chinese).
(李希国, 贾多杰, 高 远. 高能物理与核物理, 2003, **27**: 12.)

[3] Chern S S. Simons Ann Math, 1974, **99**: 48.

[4] Schonfeld J. Nucl Phys, 1981, **B185**: 157.

[5] Deser S, Jackiw R, Templeton S. Phys Rev Lett, 1982, **48**: 975.

[6] Forte S. Rev Mod Phys, 1992, **64**: 193.

[7] Nayak C, Wilczek F. Phys Rev Lett, 1996, **77**: 4 418.

[8] Witten E. Commun Math Phys, 1989, **121**: 351.

[9] Nash C. Differential Topology and Quantun Field Theory. London: Academic Press, 1992, 223.

[10] Jackiw R, Weinberg E J. Phys Rev Lett, 1990, **64**: 2 234.

[11] Jackiw R, Lee K, Weinberg E J. Phys Rev, 1990, **D42**: 3 488.

[12] Jackiw R, Pi S Y. Phys Rev, 1990, **D42**: 3 500.

[13] Jackiw R, Pi S Y. Phys Rev Lett, 1990, **64**: 2 969.

[14] Dunne G V, Jackiw R, Pi S Y, *et al*. Phys Rev, 1991, **D43**: 1 332.

[15] Duan Yishi. 1984, SLAC-PUB-3301.

[16] Li Xiguo. Nuclear Physics Review, 2000, **17**(4): 201 (in Chinese).
(李希国. 原子核物理评论, 2000, **17**(4): 201.)

[17] Duan Yishi, Zhang Hong, Jia Guang. Phys Lett, 1999, **A253**: 57.

[18] Lee Xiguo, Liu Ziyu, Li Yongqing, *et al*. Common Theor Phys, 2007, **48**: 143.

[19] Lee Xiguo, Liu Ziyu, Li Yongqing, *et al*. arXiv: hep-th/0610142.

[20] Horvathy P A, Yera J C. Lett Math Phys, 1998, **46**: 111.

[21] Duan Yishi, Lee Xiguo. Helv Phys Acta, 1995, **68**: 513.

Topological Structure of $SU(2)$ Chern-Simons Vortices*

LIU Zi-yu[1,3], LI Xi-guo[1,2,#], ZHANG Peng-ming[1,2], LI Yong-qing[1,3]

(1 *Institute of Modern Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Lanzhou* 730000, *China*;

2 *Center of Theoretical Nuclear Physics*, *National Laboratory of Heavy Ion Collisions*, *Lanzhou* 730000, *China*;

3 *Graduate School of Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100049, *China*)

Abstract: The self-dual equation and its solution in $SU(2)$ Dunne-Jackiw-Pi-Trugenberger model has been discussed with special ansatz for the Lie algebraic structures of $su(2)$ and gauge potential decomposition. We obtained a new concrete self-dual equation and found the relationship between $SU(2)$ Chern-Simons vortices and topological number which is determined by Hopf indices and Brouwer degrees of ϕ-mapping. M-vortices solutions are discribed by using $5m$ parameters (two positions, one scale, one phase per vortex and one charge of each vortex). The quantization of flux is also studied in this case.

Key words: Chern-Simons theory; Dunne-Jackiw-Pi-Trugenberger model; vortex

* **Received date**: 7 Feb. 2007; **Revised date**: 29 Mar. 2007

* **Foundation item**: Knowledge Innovation Project of Chinese Acadmy of Sciences (KJX2-SW-No16, KJCX3-SYW-No2); National Natural Science Foundation of China (10435080, 10575123)

Corresponding author: Li Xi-guo, E-mail: xgl@impcas.ac.cn