第 24 卷　第 1 期　　原子核物理评论　　Vol. 24, No. 1
2007 年 3 月　　Nuclear Physics Review　　Mar., 2007

文章编号：1007-4627(2007)01-0006-04

Skyrme 模型的 3 个非球对称双重子手征孤子*

周小方

（漳州师范学院物理与电子信息工程系，福建 漳州 363000）

摘　要：简要介绍了 Skyrme 模型及其对重子的描述，给出了 3 个不同于 Balachandran 解的双重子手征孤子解，并用 Witten 的方法量子化这些孤子，得出双重子手征孤子质量谱，这些孤子的空间对称性质不同，有相同的质量谱。

关 键 词：Skyrme 模型；双重子；手征孤子；量子化；质量谱

中图分类号：O572.34　　　**文献标识码**：A

1　引言

在大 N-QCD 理论中，重子可以认为是一种孤子，它与弱电耦合理论中的 Polyakov-t'Hooft 单极子相似[1—3]。Skyrme 模型是大 N-QCD 理论的一种近似[4—6]，在非微扰领域内，该模型能有效地描述低能强相互作用。在 Skyrme 模型中存在孤子，孤子可以量子化为费米子和玻色子[7]，这种孤子就是通常的重子，而通常的核子则是孤子的基态。在 $SU(3)$自发破缺为 $SO(3)$的情况下，Skyrme 模型亦存在色流管，夸克是禁闭的[7, 8]。1984 年，Balachandran等[9]提出了 Skyrme 模型双重子手征孤子解；1985 年，Jaffe 等[10]采用 Witten 的方法[11]将该孤子量子化，得出双重子质量谱。尽管多重子孤子($B\geqslant 2$)解陆续被提出，近年来对扩展 Skyrme 模型孤子解的研究也取得一些进展[12—15]，但仍有必要对 Balachandran 的双重子手征孤子进行细致的研究。本文将简要介绍 Skyrme 模型，然后给出另外 3 个非球对称双重子手征孤子解，量子化这些孤子，计算它们的质量，并讨论它们的对称性质。

2　Skyrme 模型

只考虑 3 种味夸克 u，d 和 s 时，手征 QCD 理论是 $SU(3)_{\rm L}\times SU(3)_{\rm R}$自发破缺为对角 $SU(3)_{\rm V}$ 的理论，与破缺生成元相对应，存在 Goldstone 玻色场 $U(x)$，$U(x)\in SU(3)$。把 $U(x)$ 参数化为

$$U(x)=\exp\left\{\left(\frac{2\mathrm{i}}{F_\pi}\right)\lambda_\alpha\pi_\alpha(x)\right\}\ ,\qquad(1)$$

其中，λ_α（$\alpha=1,2,\cdots,8$）是 Gell-Mann 生成元，$\pi_\alpha(x)$ 是 8 个 Goldstone 介子场，$F_\pi\approx 190$ MeV 是 π 介子的衰变常数。Skyrme 模型[5, 6]是描述 Goldstone 玻色场的有效理论，其作用量为

$$I=\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{F_\pi^2}{16}\mathrm{Tr}(R_\mu R^\mu)+\frac{1}{32e^2}\mathrm{Tr}[R_\mu,R^\nu][R_\nu,R^\mu]\right\}+N\Gamma(U)\ ,\qquad(2)$$

其中 $R_\mu=U^{-1}(\partial_\mu U)$ 是右手征流。(2)式第 1 项就是非线性 σ 模型的作用量，第 2 项是由 Skyrme 首先提出的孤子稳定项[5, 6]，e 是无量纲常数，第 3 项由 Witten 首先引入[4]，是描述反常效应的 Wess-Zumino 项[16]，

$$\Gamma(U)=\int_D W_{ijklm}\mathrm{d}\Sigma^{ijklm}\ ,\qquad(3)$$

$$W_{ijklm}=\frac{-1}{240\ \pi^2}\mathrm{Tr}[R_iR_jR_kR_lR_m]\ ,\qquad(4)$$

D 是 $SU(3)$ 流形上的一个五维盘，$U(x)$ 把四维时空映射成 D 的边缘，$\mathrm{d}\Sigma^{ijklm}$ 是五维盘的面积元(其中，i，j，k，l 和 m 分别为五维空间的坐标分量)，N 是夸克的色数。(3)式具有手征、电荷共轭和宇称对称性，其对称性质与手征 QCD 理论相同。

对有限能量位形 $U(x)$，它必须满足边界条件：当 $(\boldsymbol{x},t)\to\infty$时，$U(\boldsymbol{x},t)\to 1$。时间 t 一定时，由于

* 收稿日期：2006-05-19；修改日期：2006-06-06

作者简介：周小方(1963-)，男(汉族)，福建漳州人，研究生毕业，副教授，从事理论物理研究；E-mail：zhou9190@vip.sina.com

$|\boldsymbol{x}|\to\infty$，$U(\boldsymbol{x},t)\to 1$，因此空间 $\{\boldsymbol{x}\}$ 可紧致化为 S^3。这样 $U(\boldsymbol{x},t)$ 就定义了由 S^3 到 $SU(3)$ 流形的同伦映射，可用环绕数 $W(U)$ 来表征拓扑非平庸位形 $U(x)$：

$$W(U)=\int\frac{\varepsilon_{ijk}\mathrm{d}^3x}{24\pi^2}\mathrm{Tr}(R_iR_jR_k)\ 。\tag{5}$$

因为 $\pi_3(SU(3))=Z$（τ_3 为 $SU(3)$ 流形的 S^3 同伦群），所以 $W(U)=$ 整数。因为 $U(\boldsymbol{x},t)$ 是连续的，当 t 平滑变化时，得到一簇由 S^3 到 $SU(3)$ 流形的映射，它们属于 $\pi_3(SU(3))$ 的同一同伦类，具有相同的环绕数，所以 $W(U)$ 是与时间无关的拓扑守恒量。

Skyrme 模型存在有限能量的孤子，孤子带有一个守恒的环绕数，它不会衰变，由于有 Skyrme 稳定项，它亦不会收缩。1983 年，Witten 引入 Wess-Zumino 项[4]，采用流代数的方法得出重子数流 B^μ 和重子数 $B(U)$：

$$B^\mu=\frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2}\mathrm{Tr}(R_\nu R_\alpha R_\beta)\ ,$$

$$B(U)=\int\mathrm{d}^3xB^0=W(U)\ ,\tag{6}$$

因此 Skyrme 模型中的孤子可以解释为重子，孤子所带的拓扑守恒量就是重子数。当重子数为偶数时，孤子可量子化为玻色子；当重子数为奇数时，孤子可量子化为费米子[7]。

3　双重子手征孤子解

设 $\lambda_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,8)$ 是 Gell-Mann 生成元，令 $g_1=\{\lambda_7,-\lambda_5,\lambda_2\}$，$g_2=\{\lambda_6,\lambda_5,\lambda_1\}$，$g_3=\{\lambda_7,-\lambda_4,\lambda_1\}$，$g_4=\{\lambda_6,-\lambda_4,\lambda_2\}$，它们是 $SU(3)$ 李代数的 4 个子代数，记 $g=\{\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3\}$ 是以上 4 个子代数中的一个，容易验证 g 具有以下性质：

$$[\Lambda_i,\Lambda_j]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\Lambda_k\ ,\tag{7}$$

$$\mathrm{Tr}(\Lambda_i\Lambda_j)=2\delta_{ij}\ ,\tag{8}$$

$$\mathrm{Tr}(\Lambda_i\Lambda_j\Lambda_k)=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\ ,\tag{9}$$

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda})\Lambda_i(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda})=x_i(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda})\ 。\tag{10}$$

由(10)式可知，$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}/r)^3=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}/r)$，即 $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}/r)$ 是素幂等元，由(8)式得 $\mathrm{Tr}[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}/r)^2-(2/3)]=0$，所以可用无迹、厄米的矩阵 $[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}/r)^2-(2/3)]$ 和 $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}/r)$ 来构造 $SU(3)$ 的静态位形 $U_2(\boldsymbol{x})$：

$$\begin{aligned}U_2(\boldsymbol{x})&=\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}}{r}F(r)+\mathrm{i}\left[\left(\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}}{r}\right)^2-\frac{2}{3}\right]G(r)\right\}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2/3)G}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1/3)G}\,\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}}{r}\sin F+\\&\quad(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1/3)G}\cos F-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2/3)G})\left(\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Lambda}}{r}\right)^2\ 。\end{aligned}\tag{11}$$

有限能量要求 $U_2(\infty)=1$，因此必须有边界条件 $F(\infty)=0$ 和 $G(\infty)=0$；$U_2(\boldsymbol{x})$在 $r=0$ 处连续要求有边界条件 $F(0)=\pi$ 和 $G(0)=\pi$。由(6)式得位形 $U_2(\boldsymbol{x})$的重子数为

$$B(U_2)=\frac{2}{\pi}[F(0)-F(\infty)]=2\ ,\tag{12}$$

因此静态位形 $U_2(\boldsymbol{x})$ 是双重子手征孤子。

决定双重子孤子空间对称性的角动量算符[9]为

$$J_i=-\mathrm{i}(\boldsymbol{x}\times\nabla)_i+\Sigma_i\ ,\tag{13}$$

这里 Σ_i是自旋角动量算符，Σ_i是 $SO(3)$ 的李代数元，即$(\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3)=(\lambda_7,-\lambda_5,\lambda_2)$。定义 J_i对场的作用为

$$J_iU(x)=-\mathrm{i}(\boldsymbol{x}\times\nabla)_iU(x)+[\Sigma_i,U(x)]\ ,\tag{14}$$

由 g_1 子代数构成的双重子孤子有 $J_iU_2=0(i=1,2,3)$，所以此孤子具有球对称，它由 Balachandran 等[9]首先提出。由 g_2子代数构成的双重子孤子有 $J_iU_2\neq 0(i=1,2,3)$，此孤子为非轴对称；由 g_3 子代数构成的双重子孤子有 $J_1U_2=0$，$J_iU_2\neq 0(i=2,3)$，由 g_4 子代数构成的双重子孤子有 $J_3U_2\neq 0$，$J_iU_2\neq 0(i=1,2)$，这两个孤子是轴对称。

4　双重子手征孤子的量子化

根据 Witten[11]的方法，引入含时的 $SU(3)$ 矩阵 $A(t)$ 作为系统的动力学变量，令

$$U(x)=A(t)U_2(\boldsymbol{x})A^+(t)\ ,\tag{15}$$

则 $U(x)$ 是与时间有关的双重子孤子。把 $U(x)$ 代入(3)式，得以 $A(t)$ 为集体坐标的拉氏量 $L[A,\dot{A}]$：

$$\begin{aligned}L=&-M_0-M_1\mathrm{Tr}(A^+\dot{A}A^+\dot{A})+\\&M_2\mathrm{Tr}(A^+\dot{A}\Lambda_iA^+\dot{A}\Lambda_i)\ 。\end{aligned}\tag{16}$$

设 $\theta_\alpha(t)(\alpha=1,2,\cdots,8)$ 是表征 $A(t)$ 的 8 个参量，记：

$$A^{+}\frac{\partial A}{\partial\theta_{\alpha}}=\mathrm{i}h_{\alpha\beta}\frac{\lambda_{\beta}}{2}\ ,\tag{17}$$

则有

$$\mathrm{Tr}(A^{+}\dot{A}A^{+}\dot{A})=-\frac{1}{2}\dot{\theta}^{T}hh^{T}\dot{\theta}\ ,\tag{18}$$

$$\mathrm{Tr}(A^{+}\dot{A}\Lambda_{i}A^{+}\dot{A}\Lambda_{i})=\frac{1}{2}\dot{\theta}^{T}hh^{T}\dot{\theta}-\dot{\theta}^{T}hQh^{T}\dot{\theta}\ 。\tag{19}$$

这里 $h=(h_{\alpha\beta})$，$\dot{\theta}^{T}=(\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2,\cdots,\dot{\theta}_8)$，$Q$ 是把 h 矩阵投影到 $SO(3)$ 子群的投影算符，

$$Q_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\lambda_{\alpha}\Lambda_{i}\lambda_{\beta}\Lambda_{i})+\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}\delta_{\alpha\beta}, & \lambda_{\beta}\in g\\ 0, & \lambda_{\beta}\notin g\end{cases}\tag{20}$$

$$Q^{2}=Q\ ,\tag{21}$$

因此拉氏量可表示为

$$L=M_{0}+\frac{1}{2M}\dot{\theta}^{T}hh^{T}\dot{\theta}+\frac{1}{2m}\dot{\theta}^{T}hQh^{T}\dot{\theta}\ ,\tag{22}$$

其中 M_0 为孤子的静态能量(即孤子质量)，M 和 m 为具有质量量纲的量，它们分别可表示为

$$M_{0}=\frac{F_{\pi}}{e}(I_{1}+I_{2})\ ,\tag{23}$$

$$M=\frac{15e^{3}F_{\pi}}{\pi}\frac{1}{m_{1}+m_{2}}\ ,\tag{24}$$

$$m=\frac{15e^{3}F_{\pi}}{\pi}\frac{1}{m_{3}+m_{4}}\ ,\tag{25}$$

其中 I_{1-2} 和 m_{1-4} 是无量纲量，可表示为

$$I_{1}=2\pi\int_{0}^{\infty}\xi^{2}\left[\frac{G'^{2}}{12}+\frac{F'^{2}}{4}+\frac{(1-\cos F\cos G)}{\xi^{2}}\right]\mathrm{d}\xi\ ,\tag{26}$$

$$I_{2}=2\pi\int_{0}^{\infty}\Big\{[G'^{2}+F'^{2}](1-\cos F\cos G)+2F'G'\sin F\sin G+\frac{(1-\cos F\cos G)^{2}+3\sin^{2}F\sin^{2}G}{\xi^{2}}\Big\}\mathrm{d}\xi\ ,\tag{27}$$

$$m_{1}=3\int_{0}^{\infty}\xi^{2}(1-\cos F\cos G+2\sin^{2}F)\mathrm{d}\xi\ ,\tag{28}$$

$$m_{2}=\int_{0}^{\infty}\{(1-\cos F\cos G)[4+28(1-\cos F\cos G)+24\sin^{2}F]-2\sin^{2}F-2\sin^{2}G-4\sin^{2}F\sin^{2}G+3\xi^{2}F'^{2}(1-\cos F\cos G+8\sin^{2}F)+3\xi^{2}G'^{2}(1-\cos F\cos G)+6\xi^{2}F'G'\sin F\sin G\}\mathrm{d}\xi\ ,\tag{29}$$

$$m_{3}=2\int_{0}^{\infty}\xi^{2}(1-\cos F\cos G-3\sin^{2}F)\mathrm{d}\xi\ ,\tag{30}$$

$$m_{4}=\int_{0}^{\infty}\{(1-\cos F\cos G)[-64+12(1-\cos F\cos G)-24\sin^{2}F]+32\sin^{2}F+32\sin^{2}G+4\sin^{2}F\sin^{2}G+2\xi^{2}F'^{2}\cdot(1-\cos F\cos G-12\sin^{2}F)+2\xi^{2}G'^{2}\cdot(1-\cos F\cos G)+4\xi^{2}F'G'\sin F\sin G\}\mathrm{d}\xi\ ,\tag{31}$$

$\xi=eF_{\pi}r$ 是无量纲量。

θ 的共轭动量 $P=K\dot{\theta}$，其中 K 为

$$K=\frac{1}{M}hh^{T}+\frac{1}{m}hQh^{T}\ ,\tag{32}$$

所以孤子的哈密顿量为

$$H=P^{T}K^{-1}P-L\ ,\tag{33}$$

$$K^{-1}=M(h^{-1})^{T}h^{-1}-\frac{M^{2}}{M+m}(h^{-1})^{T}Qh^{-1}\ 。\tag{34}$$

把(22)式和(34)式代入(33)式得：

$$H=M_{0}+\frac{M}{2}P^{T}(h^{-1})^{T}h^{-1}P-\frac{M^{2}}{2(M+m)}P^{T}(h^{-1})^{T}Qh^{-1}P\ 。\tag{35}$$

用正则量子化方法，令 $P_{\alpha}=-\mathrm{i}\partial/\partial\theta_{\alpha}$，由(17)式得：

$$(h^{-1}P)_{\alpha}A(\theta)=A\frac{\lambda_{\alpha}}{2}\ 。\tag{36}$$

所以当 $(h^{-1}P)_{\alpha}$ 作用于 $A(\theta)$ 时，它表现为 $SU(3)$ 的第 α 个生成元，这样就有

$$HA(\theta)=\left[M_{0}+\frac{M}{2}C_{1}-\frac{M^{2}}{2(M+m)}\frac{C_{2}}{4}\right]A(\theta)\ ,\tag{37}$$

其中 $C_1=(1/4)\lambda_{\alpha}\lambda_{\alpha}$ 和 $C_2=\Lambda_i\Lambda_i$ 分别是 $SU(3)$ 和 $SO(3)$ 的 Casimir 算符，所以孤子的能量为

$$E=M_{0}+\frac{M}{2}C_{1}-\frac{M^{2}}{8(M+m)}J(J+1)\ ,\tag{38}$$

J 为双重子孤子的角动量，对单态 $C_1=0$，对 8 重态 $C_1=3$，对 10 重态 $C_1=6$。由(38)式可见，4 个双重子手征孤子具有相同的质量谱。由 $g_1=\{\lambda_7, -\lambda_5, \lambda_2\}$ 子代数构成的双重子孤子的量子化结果由 Jaffe 等[10]首先得出，Balachandrant 等[17]也得出一些量子化结果。

5　结论和讨论

Balachandrant 等于 1984 年提出了 Skyrme 模型的球对称双重子手征孤子位形，Jaffe 等用 Witten 的半经典方法量子化该孤子得出与夸克模型基本一致的结果。在此基础上，本文提出 Skyrme 模型的另 3 个非球对称双重子手征孤子位形，讨论 4 个双重子手征孤子的对称性和质量谱。4 种双重子手征孤子位形的空间对称性质不同，具有相同的质量谱。

参考文献(References)：

[1]　't Hooft G. Nucl Phys，1974，**B72**：451.

[2]　't Hooft G. Nucl Phys，1974，**B75**：461.

[3]　Witten E. Nucl Phys，1979，**B160**：57.

[4]　Witten E. Nucl Phys，1983，**B223**：422.

[5]　Skyrme T H R. Proc Roy Soc，1961，**A260**：127.

[6]　Skyrme T H R. Nucl Phys，1962，**31**：556.

[7]　Witten E. Nucl Phys，1983，**B223**：433.

[8]　Zhou Xiaofang. Nuclear Physics Review，2006，**23**(3)：271(in Chinese).
(周小方. 原子核物理评论，2006，**23**(3)：271.)

[9]　Balachandran A P，Barducci A，Lizzi F，*et al*. Phys Rev Lett，1984，**52**：887.

[10]　Jaffe R L，Korpa C L. Nucl Phys，1985，**B258**：468.

[11]　Witten E. Nucl Phys，1983，**B228**：552.

[12]　Battye R A，Sutcliffe P M. Phys Rev Lett，1997，**79**：363.

[13]　Houghton C J，Manton N S，Sutcliffe P M. Nucl Phys，1998，**B510**：507.

[14]　Ioannidou T，Piette B，Zakrzewski. J Math Phys，1999，**40**：6 353.

[15]　Marleau L. Phys Rev，2001，**D63**：036 007.

[16]　Wess J，Zumino B. Phys Lett，1971，**37B**：95.

[17]　Balachandran A P，Lizzi F，J Rodgers V G，*et al*. Nucl Phys，1985，**B256**：525.

Three Non-spherical Symmetry Dibaryon Chiral Soliton in Skyrme Model*

ZHOU Xiao-fang[1)]

(*Department of Physics and Electronics Information Engineering*，*Zhangzhou Normal College*，*Zhangzhou* 363000，*Fujian*，*China*)

Abstract：The Skyrme model and its descriptions for baryons have been introduced briefly. Then，we give three dibaryon chiral soliton solutions which are different from Balachandran's configuration. By Witten's way，we quantize these solitons and obtain dibaryon mass spectrum. These solitons have different spatial symmetry，but the same mass spectrum.

Key words：Skyrme model；dibaryon；chiral soliton；quantization；mass spectrum

*　**Received date**：19 May. 2006；**Revised date**：6 Jun. 2006

1)　E-mail：zhou9190@vip.sina.com