文章编号：1007－4627(2006)03－0271－04

Skyrme 模型的色流管位形*

周小方
（漳州师范学院物理与电子信息工程系，福建 漳州 363000）

摘 要：简要介绍了 Skyrme 模型及其对重子的描述，给出一个色流管解，计算该色流管的能量线密度，导出色流管解满足的方程式，该方程可用于研究色流管的性质。色流管解的存在说明 Skyrme 模型中夸克是禁闭的。

关 键 词：Skyrme 模型；色流管；夸克禁闭
中图分类号：O572.34 **文献标识码**：A

1 引言

非微扰量子色动力学(QCD)理论可较好地解释夸克的禁闭问题，当 QCD 真空被看成对偶超导体时，这一问题可得到直观的解释[1,2]。磁单极在 QCD 真空的凝聚将产生对偶迈斯纳效应，连接 q-$\bar{\mathrm{q}}$ 的色电流线被压缩到一个准一维的流管中，引出 q-$\bar{\mathrm{q}}$ 之间一个线性上升囚禁势，使 q-$\bar{\mathrm{q}}$ 不能无限分离[3—5]。与描述普通超导体的金斯堡－朗道模型相对应，定量描述对偶超导体的是对偶阿贝尔希格斯(DAH) 模型，该模型存在一个静态 q-$\bar{\mathrm{q}}$ 体系的流管解[5]，称此流管为 DAH 流管。Skyrme 模型是大 N-QCD 理论的一种近似[6—8]，是一种非微扰的半经典理论，在 $SU(3)$自发破缺为 $SO(3)$的情况下，Skyrme 模型亦存在色流管[9]。

在最大阿贝尔规范(MAG)下，用阿贝尔投影(AP)格点 QCD 理论进行 32^4 格点的大规模模拟，在数值上支持这一直观图像[10—12]，模拟还测出流管轮廓，称此流管为 AP 流管。现已对 AP 流管和 DAH 流管的性质及它们之间的联系进行了详细的研究[13, 14]。研究表明，电的流管由两个可区分的分量叠加而成，一个是直接由电荷诱导的库仑电场，另一个是由单极超流诱导的螺线管电场，分别对应夸克间相互作用势的库仑势部分和线性上升囚禁势部分。然而 Skyrme 模型的色流管尚未得到细致的研究，本文研究 Skyrme 色流管解。

本文第 2 节简要介绍 Skyrme 模型及其对重子的描述。第 3 节简要介绍 E. Witten 对 Skyrme 色流管的论述。第 4 节给出我们的能量线密度有限的色流管位形，讨论该色流管的性质，计算该色流管的能量线密度。第 5 节结论。

2 Skyrme 模型

设 QCD 有 n 种味夸克，用 $SU(n)$群元 $U(x)$来描述大 N-QCD 理论的介子场[6]，则 Skyrme 模型的拉氏量为

$$L(U, \partial_\mu U)=\int \mathrm{d}^4 x\left\{\frac{F_\pi^2}{16} \operatorname{Tr}(U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu U)+\frac{1}{32e^2}\operatorname{Tr}[U^{-1}\partial_\mu U, U^{-1}\partial_\mu U]^2\right\}+N\Gamma(U) \quad , \tag{1}$$

其中，第一项就是非线性 σ 模型的拉氏量，第二项是由 Skyrme 首先提出的孤子稳定项[7,8]，e 是无量纲常数，第三项是描述反常效应的 Wess-Zumino 项[15]，

$$\Gamma(U)=\int_Q W_{ijklm}\,\mathrm{d}\Sigma^{ijklm} \quad , \tag{2}$$

$$W_{ijklm}=\frac{-1}{240\pi^2}\operatorname{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^j}\cdot U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^k}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^l}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^m}\right] \quad 。 \tag{3}$$

由 Wess-Zumino 项可得出重子流 J^μ 和重子数 B，

* 收稿日期：2005－12－30；修改日期：2006－04－11
作者简介：周小方(1963－)，男(汉族)，福建漳州人，副教授，从事理论物理研究；E-mail：zhou9190@vip.sina.com

$$J^{\mu}=\frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^{2}}\mathrm{Tr}(U^{-1}\partial_{\nu}UU^{-1}\partial_{\alpha}UU^{-1}\partial_{\beta}U) \quad , \tag{4}$$

$$B=\frac{\varepsilon_{ijk}}{24\pi^{2}}\int d^{3}x\,\mathrm{Tr}(U^{-1}\partial_{i}UU^{-1}\partial_{j}UU^{-1}\partial_{k}U) \quad 。\tag{5}$$

对有限能量位形 $U(x)$，它必须满足边界条件：当 $(\boldsymbol{x}, t)\to\infty$ 时，$U(\boldsymbol{x}, t)\to 1$。$U(\boldsymbol{x}, t)$ 定义了由 S^3 到 $SU(n)$ 流形的一簇同伦映射，它们属于 $\pi_3(SU(n))$ 的同一同伦类，具有相同的环绕数，这环绕数就是介子场 $U(x)$ 的重子数 B，它是一个拓扑守恒量。因为 $\pi_3(SU(n))=Z$，所以 Skyrme 模型中存在着孤子谱，这种孤子就是通常的重子，而通常的核子则是孤子的基态。当 N 为偶数时，孤子可量子化为玻色子；当 N 为奇数时，孤子可量子化为费米子[9]。

3 色流管

如果以 $O(N)$ 为色规范群，则反常的味对称群为 $SU(3)$，它将自发破缺为其最大子群 $SO(3)$，对应于破缺生成元，存在着 Goldstone 玻色场 $N(x)$，它取值在破缺陪集空间 $SU(3)/SO(3)$。静态场 $N(x, y, z)$ 的能量为

$$E=\int d^{3}x\left\{\frac{F_{\pi}^{2}}{16}\mathrm{Tr}(\partial_{i}N\partial_{i}N^{+})-\frac{1}{32e^{2}}\mathrm{Tr}[N^{+}\partial_{i}N, N^{+}\partial_{j}N]^{2}\right\} \quad 。\tag{6}$$

色流管是种与 z 无关的管状位形 $N(x, y)$，它在 x-y 平面上具有非平庸的拓扑[9]。色流管的能量线密度为

$$\varepsilon=\int d^{3}x\left\{\frac{F_{\pi}^{2}}{16}\mathrm{Tr}(\partial_{i}N\partial_{i}N^{+})-\frac{1}{32e^{2}}\mathrm{Tr}[N^{+}\partial_{i}N, N^{+}\partial_{j}N]^{2}\right\} \quad , \tag{7}$$

$i, j=1, 2$。有限能量线密度的色流管 $N(x, y)$ 必须满足边界条件：当 $(x, y)\to\infty$ 时，$N(x, y)\to 1$。$N(x, y)$ 定义了由 S^2 到 $SU(3)/SO(3)$ 流形的同伦映射。因为 $\pi_2(SU(3)/SO(3))=Z_2$，所以在 $SU(3)$ 自发破缺为 $SO(3)$ 的 Skyrme 模型中只存在一种色流管，且 2 个色流管可以湮灭。

因为 $SU(3)/SO(3)$ 是 $SU(3)$ 的子流形，所以 $N(x, y)$ 仍是 $SU(3)$ 群元，对自发破缺理论，通常采用伴随表示，即存在 $SU(3)$ 基础表示中的场 $V(x, y)$，使得：

$$V\lambda_{\alpha}V^{+}=\lambda_{\beta}\lambda_{\alpha\beta} \quad , \tag{8}$$

其中 $\lambda_{\alpha}(\alpha=1, 2, \cdots, 8)$ 是 Gell-Mann 生成元。可以证明：

$$\mathrm{Tr}(\partial_{i}N\partial_{i}N^{+})=6\mathrm{Tr}(\partial_{i}V\partial_{i}V^{+}) \quad , \tag{9}$$

$$\mathrm{Tr}[N^{+}\partial_{i}N, N^{+}\partial_{j}N]^{2}=6\mathrm{Tr}[V^{+}\partial_{i}V, V^{+}\partial_{j}V]^{2} \quad , \tag{10}$$

所以色流管的能量线密度为

$$\varepsilon=6\int d^{2}x\left\{\frac{F_{\pi}^{2}}{16}\mathrm{Tr}(\partial_{i}V\partial_{i}V^{+})-\frac{1}{32e^{2}}\mathrm{Tr}[V^{+}\partial_{i}V, V^{+}\partial_{j}V]^{2}\right\} \quad 。\tag{11}$$

4 色流管位形

记味对称群 $SU(3)=G$，子群 $SO(3)=H$，则 $G/H=\{gH\,|\,g\in G\}$ 是左陪集空间。设 S 为 $SU(3)$ 的全体对称矩阵的集合，即 $S=\{s\,|\,s\in G, s^{T}=s\}$，由 Schur 定理，对于 S 中的任意元 s，存在 $SU(3)$ 元 $g\in G$，使得：

$$g^{T}sg=1 \quad 。\tag{12}$$

对任意的 $h\in H$，因为 $h^{T}h=1$，所以有：

$$(gh)^{T}s(gh)=1 \quad 。\tag{13}$$

这样就可以在 S 与 G/H 之间建立对应关系 f，

$$f: S\to G/H \quad , \tag{14}$$

$$f: s\to g/H\,|_{g^{T}sg=1} \quad 。\tag{15}$$

显见，这种对应关系是 1—1 对应的。因此在同胚的意义下，S 空间就是左陪集空间 G/H[16—19]。既然在 $SU(3)$ 自发破缺为 $SO(3)$ 的 Skyrme 模型中，只存在一种色流管位形 $V(x, y)$，且 $V(x, y)$ 是对称的 $SU(3)$ 群元，那么不妨设：

$$V(x, y)=\begin{pmatrix} W(x, y) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{16}$$

$W(x, y)$ 是对称的 $SU(2)$ 群元，它可表示为

$$W(x, y)=\phi_{1}+i\phi_{2}\sigma_{1}+i\phi_{3}\sigma_{3} \tag{17}$$

$$\phi_{\alpha}\phi_{\alpha}=\phi_{1}^{2}+\phi_{2}^{2}+\phi_{3}^{2}=1 \quad , \tag{18}$$

所以 $V(x, y)$ 定义了由紧致化的 x-y 平面（即 S^2）到 $S=SU(3)/SO(3)$ 空间的一个同伦映射，其环绕数

为

$$Q(V)=\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^2 x\varepsilon_{ij}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\phi^{\alpha}\partial_i\phi^{\beta}\partial_j\phi^{\gamma}\quad。\tag{19}$$

令 $Z(V)=\exp\{\mathrm{i}\pi Q(V)\}\in Z_2$，则 $Z(V)$ 就是色流管的拓扑荷。取 $W(x,y)$ 为以下最简单的形式：

$$\begin{aligned}W(x,y)&=\exp\left\{\mathrm{i}\left(\frac{x}{\rho}\sigma_1+\frac{y}{\rho}\sigma_3\right)T(\rho)\right\}\\&=\cos T+\mathrm{i}\,\frac{x}{\rho}\sigma_1\sin T+\mathrm{i}\,\frac{y}{\rho}\sigma_3\sin T\quad,\end{aligned}\tag{20}$$

其中 $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$。因为在 x-y 平面的无穷远点，$V(x,y)=1$，这就要求有：

$$T(\infty)=0\quad。\tag{21}$$

因为 $V(x,y)$ 必须是连续的，所以当 $\rho\to 0$ 时，$V(x,y)$ 必须有确定的值，这就要求有：

$$T(0)=\pi\quad。\tag{22}$$

(21)和(22)两式是色流管位形的边界条件。因为：

$$Q(V)=\frac{1}{2}[\cos T(0)-\cos T(\infty)]=-1\quad,\tag{23}$$

$$Z(V)=\exp(-\mathrm{i}\pi)=-1\quad,\tag{24}$$

所以 $V(x,y)$ 在 x-y 平面有非平庸的拓扑，它是色流管位形。因为

$$Q(V^2)=\frac{1}{2}[\cos 2T(0)-\cos 2T(\infty)]=0\quad,\tag{25}$$

$$Z(V^2)=1\quad,\tag{26}$$

所以两个这样的色流管可以湮灭。把(16)和(20)两式代入(11)式可得色流管的能量线密度为

$$\begin{aligned}\varepsilon=&\frac{3}{2}\pi F_\pi^2\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\ \left\{\eta\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\eta}\right)^2+\right.\\&\left.4\,\frac{1}{\eta}\sin^2 T\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\eta}\right)^2+\frac{1}{\eta}\sin^2 T\right\}\quad,\end{aligned}\tag{27}$$

其中 $\eta=F_\pi e\rho$ 是无量纲量。(27)式的欧拉方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[\left(\eta+4\,\frac{1}{\eta}\sin^2 T\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\eta}\right]-\\&\frac{1}{2\eta}\left[4\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\eta}\right)^2+1\right]\sin 2T=0\quad。\end{aligned}\tag{28}$$

可见，(16)和(20)两式所给出的位形正是能量线密度有限、在 x-y 平面具有非平庸拓扑的色流管。

5　结论

Witten 在文献[9]中论述了 Skyrme 模型的色流管及夸克禁闭问题，而本文进一步给出了色流管位形，它说明在 Skyrme 模型中色夸克是禁闭的。Skyrme 色流管位形是进一步研究流管的复杂结构以及它与 AP 流管和 DAH 流管之间联系的重要基础。

参　考　文　献：

[1] Hooft G't. In High-energy Physics. Proceedings of the EPS International Conference, Palermo, Italy, 1975, In: Zichichi A ed. Bologna: Editrice Compositori, 1976, **2**: 1 225—1 249.

[2] Mandelstam S. Phys Rep, 1976, **C23**: 245.

[3] Abrikosov A A. Sov Phys, 1957, **JETP 5**: 1 174.

[4] Nielsen H B, Olesen P. Nucl Phys, 1973, **B61**: 45.

[5] Nambu Y. Phys Rev, 1974, **D10**: 4 262.

[6] Witten E. Nucl Phys, 1983, **B223**: 422.

[7] Skyrme T H R. Proc Roy Soc, 1961, **A260**: 127.

[8] Skyrme T H R. Nucl Phys, 1962, **31**: 556.

[9] Witten E. Nucl Phys, 1983, **B223**: 433.

[10] Singh V, Browne D A, Haymaker R W. Phys Lett, 1993, **B306**: 115.

[11] Matsubara Y, Ejiri S, Suzuki T. Nucl Phys, 1994, **B34** (Proc. Suppl.): 176.

[12] Bali G S, Schlichter C, Schilling K. Prog Theor Phys Suppl, 1998, **131**: 645.

[13] Koma Y, Koma M, Ilgenfritz E M, *et al*. Phys Rev, 2003, **D68**: 094 018.

[14] Koma Y, Koma M, Ilgenfritz E M, *et al*. Phys Rev, 2003, **D68**: 114 504.

[15] Wess J, Zumino B. Phys Lett, 1971, **B37**: 95.

[16] Balachandran A P, Nair V P, Rajeev S G, *et al*. Phys Rev Lett, 1982, **49**: 1 124.

[17] Balachandran A P, Nair V P, Rajeev S G, *et al*. Phys Rev Lett, 1983, **50**: 1 630.

[18] Balachandran A P, Nair V P, Rajeev S G, *et al*. Phys Rev, 1983, **D27**: 1 153.

[19] Balachandran A P, Nair V P, Rajeev S G, *et al*. Phys Rev, 1983, **D27**: 2 772.

A Color Flux Tube Configuration in Skyrme Model

ZHOU Xiao-fang

(*Deptartment of Physics and Electronics Information Engineering*, *Zhangzhou Normal College*, *Zhangzhou* 363000, *Fujian*, *China*)

Abstract: The Skyrme Model and its descriptions for baryons are introduced briefly. We have proposed a color flux tube configuration, and calculated the energy line density of the color flux tube and derived a equation of the color flux tube configuration which can be used to study the features of the color flux tube. The existence of the color flux tube configuration in Skyrme Model shows that the quarks are confined.

Key words: Skyrme model; color flux tube; quark confinement