

文章编号: 1007-4627(2006)01-0010-03

全同粒子维数与角动量耦合求和规则*

赵玉民

(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心, 甘肃 兰州 730000;

上海交通大学物理系, 上海 200240;

日本理化学研究所回旋加速器中心, 日本 埼玉 和光 351-0198)

摘要: 结合工作, 讨论了 3 个和 4 个全同粒子的状态数解析表达式与角动量耦合中的 $6j$ 和 $9j$ 系数的求和规则、单轨道中 J 级对力、核子系统的自旋和同位旋都确定的空间维数等核结构基本理论方面的新进展。

关键词: 角动量耦合; 维数; 求和规则; 同位旋

中图分类号: O571.21 **文献标识码:** A

1 引言

全同的微观粒子的状态数是量子多体理论, 特别是原子核结构理论的一个基础性问题。给定了原子核壳模型的价空间和价粒子数后, 人们马上就应当去找这样给定的粒子数和价空间的一组完备的基矢。因为原子核壳模型的哈密顿量满足角动量守恒, 具有相同的总角动量的空间构成一个子空间, 所以最简单和最基本的问题是在单轨道上若干个全同粒子某个固定总角动量的维数。

全同粒子在单个轨道上总角动量为某一确定的 I 的维数在理论上已经得到解决。例如, 在一般教科书上讨论的配分方法, 即总角动量为 I 的维数等于用 $M=I$ 的配分数减去 $M=I+1$ 的配分数。此外还有其它方法, 如 Racha 的辛弱数方法和生成函数方法等。然而, 因为对于给定粒子数, 维数的变化似乎无特别规则, 所以长期以来很少有人去努力给出单个轨道上总角动量为任意 I 的维数的解析表达式。人们为方便起见一般对几个单粒子轨道角动量很小的情形列表。

从另外的角度来看, 角动量耦合是低能原子核结构和原子物理的基本运算。长期以来, 人们积累了大量的各种各样的关于角动量耦合系数的求和规则。这些求和规则是很重要的, 它反映了角动量的某些本质问题。这个问题和上面谈的维数问题在表

面上似乎看来没有什么联系。然而研究表明: 通过研究单个轨道上总角动量为任意 I 的维数, 可以使人们得到一系列角动量耦合系数的新的求和规则, 而这些新的求和规则, 反过来又可以帮助人们得到过去无法得到的总角动量确定的维数的解析式。

把总角动量确定的维数问题和角动量耦合系数的求和规则联系起来的关键在于研究单 j 壳的 J 对的哈密顿量(总的哈密顿量则是所有的 J 对哈密顿量的和)。这里以 4 个粒子情形为例。首先, 可以证明如果把所有的 J 对哈密顿量的强度取为 1, 那么总的哈密顿量的所有的总自旋为 I 的本征值之和等于 4 个粒子两两配对的波函数的重叠之和, 而每个重叠都可以表示成某些 $9j$ 系数加上一些常数。另外, 人们早就知道, 所有的 J 对强度取为 1 的哈密顿量总自旋为 I 的本征值之和等于总自旋为 I 的唯数乘以 $N(N-1)/2=6$, 这里 $N=4$ 为粒子数(这一关系的本质是两体母分系数的正交归一性)。所以, 可以通过单 j 壳的哈密顿量把总自旋为 I 的唯数与 $9j$ 系数的求和联系起来。如果通过某些方法得到了总自旋为 I 的唯数, 那么通过上面的联系就可以得到角动量耦合系数(这里为 $9j$ 系数)的求和规则。

关于单个轨道上总角动量为任意 I 的维数的解析表达式对于 $N=1$ 和 $N=2$ 是已经知道的, 但对 $N=3$ 和 4 人们过去就不知道。较早的一个结果是

收稿日期: 2005-11-21

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10575070, 10545001)

作者简介: 赵玉民(1967-), 男(汉族), 河北抚宁人, 教授, 从事原子核结构理论研究; E-mail: ymzhao@sjtu.edu.cn

Ginocchio 和 Haxton^[1] 在研究分数维的量子霍尔效应时给出的。他用了很复杂的数学方法给出 4 个全同粒子的 $I=0$ 的维数。2003 年笔者和有马朗人一起, 给出了 $N=3, 4$ 的总角动量为任意 I 的维数和 $N=5$ 的某些 I 的维数的解析经验公式^[2], 不久对 $N=4$ 的总角动量为任意 I 的结果作了证明。此后这方面的工作开始活跃起来。例如, Zamick 及其合作者对 $N=4$ 时 $I=0$ 的维数重新进行了研究, Talmi 对不同粒子数和不同轨道的维数找到了一些很有意义的递推公式, 并对 $N=3$ 总自旋为 I 的维数经验公式进行了证明。给定一个维数的经验公式, 原则上都可以用 Talmi 递推公式来证明(或证伪)。因为以上研究给出了 $N=3, 4$ 的全同粒子的总角动量为任意 I 的维数, 所以我们可以由此得到一系列 $6j$ 和 $9j$ 系数的求和规则。此外, 研究发现对于任意粒子数的全同粒子体系的总角动量为任意 I 的维数有很多有趣的规律可寻, 如总自旋 I 接近最大值时的维数的规则、费米子和玻色子维数的对应关系等。

这里需要指出的是, 在真实的物理世界中要求两个全同粒子的总自旋为偶数。上面讨论的求和过程满足这个要求。然而在数学上还可以假定两个全同粒子的自旋为奇数, 此时要求假想的“费米子”波函数全对称、“玻色子”的波函数全反对称, 此时对应的维数是这些假想的“费米子”或“玻色子”的自旋为 I 的维数。由此我们可以得到另外一套新的 $6j$ 和 $9j$ 系数的求和规则。

单轨道的 $6j$ 和 $9j$ 系数的在两个粒子总自旋没有限制的求和规则比较简单, 在 20 世纪 60 年代 Schwinger 就研究过单轨道的在两个粒子总自旋没有限制的 $6j$ 系数的求和规则。这样我们就可以由两粒子自旋任意、两粒子自旋全为偶数和全为奇数

的求和规则给出 4 个粒子中两粒子自旋为偶数、另外两粒子自旋为奇数的单轨道的 $6j$ 和 $9j$ 系数的求和规则。

作为应用之一, 我们可以用这些求和规则给出单轨道壳质子中子系统的维数。这里与上面的全同粒子的差别是多了 1 个同位旋自由度。如果两个核子(质子中子)系统轨道(含自旋)部分对称, 那么其同位旋自由度为反对称($T=0$), 反之同位旋自由度为对称($T=1$)。类似地, 我们可以把单轨道壳 3 个或 4 个质子中子系统的哈密顿量的所有总自旋为 I 的本征值之和表示成 $6j$ 或 $9j$ 系数按照对称性给定的各种要求的求和加上某些常数。利用上面讨论的求和规则, 可以方便地给出壳 3 个或 4 个质子中子系统总自旋为 I 、同位旋为 T 的维数。

总之, 本文结合自己的工作, 简单讨论和回顾了最近在全同粒子体系的总角动量确定的维数问题及其与角动量耦合系数的求和规则之间的关系。对 3 个和 4 个粒子全同粒子体系, 已经可以给出总角动量确定的维数的解析表达式。利用角动量求和规则, 可以用角动量耦合系数的求和规则求出 3 个或 4 个质子中子系统总自旋为 I 、同位旋为 T 的维数。最后本文强调, 上面的讨论不仅适用于费米子, 也适用于玻色子体系。

通过原子物理和原子核物理的长期研究, 人们原本相信上述问题的认识已经很深入。然而本文介绍和讨论的有关内容, 比如角动量耦合系数的求和规则还有很多原来并不知道, 维数的简单解析表达式原来也没有充分研究。从这个意义上说, 如果可能我们有必要对教科书上大量的看似简单的内容重新梳理。本文的参考文献^[2-9]正是沿着这个方向的一些尝试。

参 考 文 献:

- [1] Ginocchio J N, Haxton W C. Symmetries in Science VI. In: Gruber B, Ramek M. New York: Plenum Press, 1993, 263.
- [2] Zhao Y M, Arima A. Phys Rev, 2003, **C68**: 044310.
- [3] Talmi I. Phys Rev, 2005, **C72**: 037302.
- [4] Zamick L, Escuderos A. Phys Rev, 2005, **C71**: 054308.
- [5] Zhao Y M, Arima A. Phys Rev, 2005, **C71**: 047304.
- [6] Zhao Y M, Arima A. Phys Rev, 2004, **C70**: 034306.
- [7] Zhao Y M, Arima A, Ginocchio J N, *et al.* Phys Rev, 2003, **C68**: 044320.
- [8] Zhao Y M, Arima A. Phys Rev, 2005, **C72**, in press.
- [9] Zamick L, Escuderos A. Phys Rev, 2005, **C72**: 044317.

Dimension of Identical Particles and Sum Rules for Angular Momentum Couplings*

ZHAO Yu-min

*(Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion
Accelerator of Lanzhou, Lanzhou 730000, China;*

Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;

Cyclotron Center, Institute of Physical Chemical Research, RIKEN, Hirosawa 2-1, Wako-shi, Saitama 351-0198, Japan)

Abstract: In this paper I would like to discuss the strategy in obtaining analytical formulas of number of spin I states of identical particles, and the relationship between dimension and sum rules for angular momentum couplings such as six- j and nine- j symbols. I shall also discuss the J -pairing interaction, number of states with spin I and isospin T , i. e., number of states for nucleons in a single- j shell.

Key words: angular momentum coupling; dimension; sum rule; isospin

* **Foundation item:** National Natural Science Foundation of China(10575070, 10545001)

《原子核物理评论》编辑部通告

为扩大交流,自 2005 年 9 月起《原子核物理评论》加入台湾中文电子期刊服务——思博网 (CEPS)。CEPS 是目前台湾地区最大的期刊全文数据库,读者可以通过访问 <http://www.ceps.com.tw> 检索《原子核物理评论》1997 年(含 1997 年)以后各期的全文。凡向本刊投稿者,均视为其文稿在本刊刊登后可同时收录到 CEPS,并由其转载和上网发行。作者的文章著作权使用费与本刊稿酬一次性付清,编辑部不再另付其它报酬。