

文章编号: 1007-4627(2005)04-0444-03

## 关于 $K^-p$ 两体问题的相对论修正\*

王万章, 张启仁, 高春媛

(北京大学物理学院技术物理系, 北京 100871)

**摘要:** 从基本理论出发, 导出并求解了含有相对论修正的  $K^-$  介子与质子的两体薛定谔方程。其解可看作有统计解释的波函数。计算了  $K^-p$  的散射长度, 结果表明相对论效应是很明显的。

**关键词:**  $K^-p$  系统; 相对论修正; 散射长度

**中图分类号:** O571.5; O564 **文献标识码:** A

### 1 引言

很长一段时期内,  $K^-N$  低能散射数据和  $K^-$  氢原子 X 射线测量的数据对  $K^-p$  散射长度给出了相反的符号。对于这个矛盾, KEK 实验室对  $K^-$  氢原子 X 射线进行了重新测量<sup>[1, 2]</sup>, 得到了不同于以往的强相互作用能级移动和宽度数据。否定了以前 X 射线测量的数据, 而与  $K^-N$  低能散射数据所反映的散射长度趋于一致。Yamazaki 与 Akaishi 等<sup>[3, 4]</sup> 对  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  和  $^8\text{Be}$  的  $K^-$  核束缚态进行了理论分析, 并预言存在分立能级。他们给出了  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  和  $^8\text{Be}$  的  $K^-$  核束缚态结合能的理论值分别为 108, 86 和 113 MeV, 而宽度分别为 20, 34 和 38 MeV。  $K^-$  轻核深束缚态以及  $K^-$  凝聚等使我们产生了浓厚的兴趣, 但只有首先获得  $K^-N$  相互作用才能较好地讨论这些问题。我们打算利用低中能  $K^-N$  散射数据, 采用介子交换模型研究  $K^-N$  相互作用。但在这个能量区域内, 相对论效应已经不能被忽略。

同时, 相对论量子力学的多体问题研究一直在进行<sup>[5]</sup>, 但始终没有比较完美解决。对于两体问题, Bethe-Salpeter 方程是比较好的方法。但其解与两个时间坐标有关, 就很难对它作几率解释。

我们的工作就是导出并求解含相对论修正的  $K^-p$  两体薛定谔方程, 其解有统计解释。并最后计算了  $K^-p$  的散射振幅, 与薛定谔方程对比说明相对论效应, 为将来采用介子交换模型研究  $K^-N$  相

互作用提供平台。

### 2 $K^-p$ 两体问题的含相对论修正的薛定谔方程

$K^- (J^P=0^-)$  是玻色子, 在没有矢势只有标势  $V$  的作用下, 其场拉氏量密度可以写为

$$L = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \frac{iV}{\hbar} \Psi^* \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{iV}{\hbar} \Psi \right) - \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi - \frac{m_K^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^* \Psi, \quad (1)$$

其中  $\Psi$  代表  $K^-$  场。那么  $K^-$  满足的 K-G 方程可以通过最小作用量原理得到

$$\nabla^2 \Psi - \frac{m_K^2 c^2}{\hbar^2} \Psi - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iV}{\hbar} \right)^2 \Psi = 0. \quad (2)$$

利用  $K^-$  场拉氏量密度, 得到其广义动量 ( $\pi$ ,  $\pi^*$ ) 和  $K^-$  场哈密顿量密度 ( $H$ ), 从而可以得到  $K^-$  场哈密顿方程。

如果  $K^-$  的动能和标势  $V$  远小于其静止质量  $m_K c^2$ , 就可以作非相对论近似。作一级近似有

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \hat{H}_1 \Psi_1, \quad (3)$$

其中哈密顿量为

$$\hat{H}_1 = \frac{p_i^2}{2m_K} + \frac{p_i^4}{8m_K^3 c^2} + V.$$

收稿日期: 2005-09-16

\* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10305001, 10475002); 中国高性能计算基金资助项目; 部分计算在北京大学科学与工程计算中心的 IBM RS/6000 SP3 上完成

作者简介: 王万章(1979-), 男(汉族), 湖南湘潭人, 助理工程师, 从事反应堆堆芯燃料管理工作;

E-mail: wzhwang@gms.phy.pku.edu.cn

同样对于质子也满足狄拉克方程, 也可以作相对论近似, 所满足的方程<sup>[6]</sup>为

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hat{H}_2 \psi_2, \quad (4)$$

$$\hat{H}_2 = \frac{\hat{p}_2^2}{2m_p} - \frac{\hat{p}_2^4}{8m_p^3 c^2} + V + \frac{\hbar^2}{8m_p^2 c^2} \nabla^2 V + \frac{1}{2m_p^2 c^2} \hat{S} \cdot [(\nabla V) \times \hat{p}_2].$$

综合上面的  $K^-$  与  $p$  的单体方程, 有  $K^-p$  两体含相对论修正的方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial t} = \hat{H} \psi_{1,2}, \quad (5)$$

其中,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_p} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_K} - \frac{\hat{p}_1^4}{8m_p^3 c^2} - \frac{\hat{p}_2^4}{8m_K^3 c^2} + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{\hbar^2}{8m_p^2 c^2} \nabla_{r_2}^2 V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{1}{2m_p^2 c^2} \hat{S} \cdot [(\nabla_{r_2} V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \hat{p}_2),$$

$\psi_{1,2}$  为两粒子系统的总波函数。

质心系中推出  $K^-p$  的相对运动波函数方程:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, s_z, t)}{\partial t} = \hat{H}_r \psi(\mathbf{r}, s_z, t), \quad (6)$$

其中,

$$\hat{H}_r = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(r) - \left( \frac{1}{8m_p^3 c^2} + \frac{1}{8m_K^3 c^2} \right) \hat{p}^4 + \frac{\hbar^2}{8m_p^2 c^2} \nabla^2 V(r) + \frac{1}{2m_p^2 c^2} \hat{S} \cdot [\nabla_r V(r) \times \hat{p}],$$

$$\mu = \frac{m_p m_K}{m_p + m_K}.$$

下面讨论(6)式的严格求解方法。 $K^-p$  的相互作用主要是强相互作用, 是短程的, 且设相互作用是球对称的, 故(6)式就可以变为定态方程:

$$\hat{H}_r \psi(\mathbf{r}, s_z) = E \psi(\mathbf{r}, s_z), \quad (7)$$

其解就可以写为

$$\psi(\mathbf{r}, s_z) = \sum_{l,j} \frac{\chi_{Ej}^{(A)}(r)}{r} \phi_{ljm_j}(\theta, \varphi, s_z),$$

故  $l$  分波的径向方程为

$$\left( \frac{1}{8m_p^3 c^2} + \frac{1}{8m_K^3 c^2} \right) \hbar^4 \left\{ \chi_{Ej}^{(A)}(r) -$$

$$\frac{2l(l+1)}{r^2} \chi_{Ej}^{(2)}(r) + \frac{4l(l+1)}{r^3} \chi_{Ej}^{(1)}(r) + \left[ \frac{l^2(l+1)^2 - 6l(l+1)}{r^4} \right] \chi_{Ej}(r) \right\} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \chi_{Ej}^{(2)}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \chi_{Ej}(r) \right] - V(r) \chi_{Ej}(r) - \frac{\hbar^2}{8m_p^2 c^2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV(r)) + 2[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V(r) \right\} \chi_{Ej}(r) + E \chi_{Ej}(r) = 0. \quad (8)$$

(8)式在势场外的解为

$$\begin{aligned} \chi_{11}(r) &= (k_1 r) j_1(k_1 r), \\ \chi_{12}(r) &= -(k_1 r) n_1(k_1 r), \\ \chi_{13}(r) &= (k_2 r) j_1(k_2 r), \\ \chi_{14}(r) &= -(k_2 r) n_1(k_2 r), \end{aligned}$$

其中,

$$k_1^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{8\mu EA}{\hbar^2}}}{2A},$$

$$k_2^2 = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{8\mu EA}{\hbar^2}}}{2A},$$

$$A = 2\mu \left( \frac{1}{8m_p^3 c^2} + \frac{1}{8m_K^3 c^2} \right) \hbar^2,$$

其中  $j_l(k, r)$  和  $n_l(k, r)$  分别为球 Bessel 函数和球 Neumann 函数, 若  $E$  比较小, 则有

$$\left| \frac{8\mu EA}{\hbar^2} \right| = \left| 16 \left( \frac{1}{8m_p^3 c^2} + \frac{1}{8m_K^3 c^2} \right) \mu^2 E \right| \ll 1,$$

也就有

$$k_1^2 \simeq \frac{2\mu E}{\hbar^2}.$$

这是一个好的近似, 表明  $\chi_{11}(r)$  与  $\chi_{12}(r)$  是物理解。而另外两个是非物理解, 必须消除掉。

另外, 在原点附近求(8)式的正则解, 有

$$\chi_{Ej}(r) = r^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \quad (9)$$

可以求出指标的解为

$$-l \quad -l+2 \quad l+1 \quad l+3$$

在这里, 可以假设势中有一个硬排斥芯, 其有

$$\chi_{Ei} |_{r \leq r_0} = 0.$$

这样就有 4 个独立系数 ( $a_0, a_2, a_{2l+1}, a_{2l+3}$ ), 它们被 4 个条件(在势场外的两个非物理的系数必须为 0, 排斥芯条件, 归一化条件)决定。对于没有排斥芯的势场, 可以取极限, 令  $r_0 \rightarrow 0$ 。

对于束缚态情况, 同样可以类似处理。

### 3 数值计算结果以及讨论

利用  $K^-$  在势场中的散射来讨论我们这个方法的有效性。设

$$V(r) = -55 \exp\left[-\left(\frac{r}{1.0 \text{ fm}}\right)^2\right] \text{ MeV} \quad (10)$$

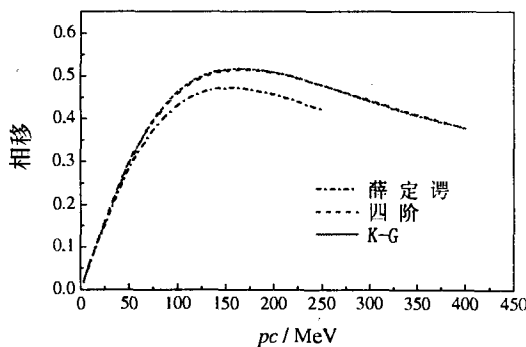


图 1  $l=0$  的相移随动量的变化

在相对论修正方程、非相对论薛定谔方程以及 K-G 方程下,  $l=0$  散射相移对比的计算结果见图 1。从图中可以看出, 四阶方程与 K-G 方程是很符

#### 参 考 文 献:

[1] Iwasaki M, Hayano R S, Ito T M, *et al.* Phys Rev Lett, 1997, **78**(16), 3 067.  
 [2] Ito T M, Hayano R S, Nakamura S N, *et al.* Phys Rev, 1998, **C58**, 2 366.

合的, 小动量时才与非相对论薛定谔方程符合。

下面讨论  $K^-p$  两体系统下的相对论效应。这里利用文献[3, 4]确定势场的实验数据, 不同同位旋的势场为

$$V_{K^-N}^{I=0}(r) = (-312.56 - 58.94 i) \cdot$$

$$\exp\left[-\left(\frac{r}{1.0 \text{ fm}}\right)^2\right] \text{ MeV},$$

$$V_{K^-N}^{I=1}(r) = (-54.75 - 41.65 i) \cdot$$

$$\exp\left[-\left(\frac{r}{1.0 \text{ fm}}\right)^2\right] \text{ MeV}.$$

表 1 给出了不同同位旋下散射长度的相对论效应。从表中可以看到, 相对论修正对  $I=0$  的散射长度影响较大, 其原因是有束缚态的存在。

从上面的计算可以看出, 在较大动量下, 四阶方程比非相对论薛定谔方程更有效, 而且对于很强的势场更能反映出相对论效应。

表 1 散射长度 fm

	NRS	RKS	RKPS
$I=0$	$-1.99+0.45 i$	$-1.81+0.40 i$	$-1.85+0.42 i$
$I=1$	$0.374+0.593 i$	$0.368+0.604 i$	$0.370+0.600 i$

注: NRS 代表非相对论的薛定谔方程, RKS 代表四阶修正方程(不含势的修正), RKPS 代表四阶修正方程(含势的修正)。

## Relativistic Corrections of $K^-p$ System\*

WANG Wán-zhang, ZHANG Qi-ren, GAO Chong-yuan

(Department of Technical Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** A two-body equation of the kaon-proton system with relativistic correction is derived and solved. The solution can be considered as a wave function with the probability interpretation. The scattering lengths are calculated, and the numerical result shows that the relativistic effect is apparent.

**Key words:**  $K^-p$  system; relativistic correction; scattering length

\* **Foundation item:** National Natural Science Foundation of China(10305001, 10475002); Calculations Supported by the High Performance Computing Center of China (Beijing); Partly Were Undertaken on IBM RS/6000 SP3 at CCSE of Peking University