

Grover 量子搜索算法及改进*

龙桂鲁, 李岩松, 肖 丽, 屠长存, 孙 扬

(清华大学物理系, 北京 100084)

(量子信息与测量教育部重点实验室, 北京 100084)

摘 要: 简单地介绍了量子搜索算法中的相位匹配条件、改进的成功率为 100% 的量子搜索算法和量子搜索算法中的主要误差等。

关键词: 量子搜索; 相位匹配; Grover 算法; 量子计算

中图分类号: O413.1; O411.1 **文献标识码:** A

1 引言

Grover 量子搜索算法^[1]和 Shor 大数质因子分解算法是两个最著名的量子算法。在量子搜索算法的 4 个步骤中, 有两个相位取反操作, 即 180° 的相位旋转。Grover^[2]认为, 这个相位取反可以换成任意角度的旋转。取代的结果只是搜索的速度变慢了。我们的研究发现, Grover 搜索算法中的相位匹配不能用任意的角度旋转代替, 只能采用满足相位匹配条件的角度代替。此外, 标准的 Grover 算法的搜索效率并不是 100% 的成功率, 我们提出了一个改进的量子搜索算法, 这个改进算法的效率是 100%。下面简单介绍相关内容。

2 Grover 算法

Grover 算法^[1]的初始态是

$$|\Psi_0\rangle = \sqrt{\frac{1}{N}}(|0\rangle + |1\rangle + \dots + |\tau\rangle + \dots + |N-1\rangle),$$

其中 $|\tau\rangle$ 是我们要寻找的标记态。Grover 搜索算法中包括以下步骤: (1) 将标记态取反, 其算符为 H ; (2) 做 Hadmard-Walsch 操作, 即对每个比特做如下操作:

$$H|0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

$$H|1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

(3) 对 $|0\rangle$ 态取反, 即 $I_0 = I - 2|0\rangle\langle 0|$; (4) 再做 Hadmard-Walsch 变换。

3 Grover 算法推广中的一个错误

当把对标记态的相位取反改为一般相位旋转时, 其算符为 $I_\tau = I + (e^{i\theta} - 1)|\tau\rangle\langle\tau|$ 。如果保持其它 3 个步骤不变, 这样的搜索算法根本不能进行量子搜索算法。不管搜索多少次, 标记态的系数仍然很小, 量子搜索算法失败。Grover 预言这样仍然可以作搜索^[2]是不对的。这个结果是我们开展量子计算研究后的第一个结果^[3]。

4 量子搜索算法中的相位匹配及 SU(3) 图像

当把两个相位取反, 都换成任意的相位旋转, 即

$$I_\tau = I + (e^{i\theta} - 1)|\tau\rangle\langle\tau|, \\ I_0 = I + (e^{i\phi} - 1)|0\rangle\langle 0|,$$

我们发现, 当取任意的角度 ϕ 和 θ 时, 量子搜索算法是失败的。只有在 ϕ 和 θ 满足相位匹配条件

$$\theta = \phi$$

收稿日期: 2004-01-18; 修改日期: 2004-02-27

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60073009); 国家重点基础研究规划资助项目(001CB309308); 教育部博士点基金资助项目

作者简介: 龙桂鲁(1962-), 男(汉族), 广西玉林人, 博士, 教授, 从事核结构理论与量子信息研究。

时,量子搜索才能够成功.我们首次提出了量子搜索算法的相位匹配条件.结果见文献[4].

郁思夏和孙昌璞提出了量子搜索算法的 $SU(2)$ 图像^[5].我们利用 $SU(2)$ 群和 $O(3)$ 群的同构关系,构造了量子搜索算法的 $SO(3)$ 图像^[6].在 $SO(3)$ 图像中,可以直观地看出量子搜索的相位匹配条件,以及量子搜索的几何图像.

当量子搜索的数据库,即初始态,不是均匀的迭加态时,相位匹配条件将随着变化,对于如下形式的数据库

$$|\Psi_0\rangle = \sin\theta_0 |\tau\rangle + \cos\theta_0 e^{i\delta} |c\rangle,$$

$$|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{i \neq \tau} |i\rangle$$

时,我们给出了相应的相位匹配条件为

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(2\beta) + \tan\theta_0 \cos\delta \sin(2\beta)]$$

$$= \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[1 - \tan\theta_0 \sin\delta \sin(2\beta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

其中, ϕ 和 θ 是相位旋转的角度, δ 和 θ_0 是初始态中的参数^[7].现在已经知道的几种相位匹配条件都是这个匹配条件的特殊情况.

5 改进的 Grover 算法

标准的 Grover 算法的成功率不是 100%.只有在数据库是无穷大时, Grover 算法的成功率才接近于 1.在数据库不是很大时, Grover 算法有一定的失败率.我们提出了一个改进的 Grover 算法,可以达到 100% 的成功率^[8].改进的关键就是将相位取

反替换成一个与数据库的大小 N 有关的相位旋转,此相位旋转角度比 π 略小,为

$$\phi = \theta = 2 \arcsin \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4J+6}\right)}{\sin\beta} \right]$$

$$= 2 \arcsin \left[\sin\left(\frac{\pi}{4J+6}\right) \sqrt{N} \right],$$

$$J_{\text{op}} = \left(\frac{\pi/2 - \beta}{2\beta} \right) = \left(\frac{\pi}{4\beta} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

其中 $J \geq J_{\text{op}}$. 这样的算法在一些问题中比标准的 Grover 算法更好,如在量子模式识别问题中,使用我们精确的量子搜索算法比标准的 Grover 算法更好些^[9].

我们发现在 Grover 算法中,误差的主要来源有两类:对于 Hadmard 变换,其主要误差是随机误差;而对于相位旋转,其主要误差是来自系统误差.误差容忍度随着数据库大小的关系是 $\propto 1/\sqrt{N}$ ^[10].

6 结论

量子搜索的相位匹配条件在我们组的核磁共振实验中得到检验^[11],丹麦 Spreeuw 组在光学实验中也作了部分检验^[12].在理论上, Hoyer^[13], Bigham 等^[14]和 Li^[15]用其他方法证实了我们的相位匹配条件.

致 谢 感谢吴式枢先生的帮助.

参 考 文 献:

- [1] Grover L K. Phys Rev Lett, 1997, **79**: 325.
- [2] Grover L K. Phys Rev Lett, 1998, **80**: 4 329.
- [3] Long G L, Zhang W L, Li Y S, *et al.* Commun Theor Phys, 1999, **32**: 335.
- [4] Long G L, Li Y S, Zhang W L, *et al.* Phys Lett, 1999, **A262**: 27.
- [5] Yu S X, Sun C P. arXiv: quant-ph/9903075.
- [6] Long G L, Tu C C, Li Y S, *et al.* J Phys, 2001, **A34**: 861.
- [7] Long G L, Xiao L, Sun Y. Phys Lett, 2002, **A294**: 143.
- [8] Long G L. Phys Rev, 2001, **A64**: 022307.
- [9] Truegenberger C A. arXiv: quant-ph/0210176.
- [10] Long G L, Li Y S, Zhang W L, *et al.* Phys Rev, 2000, **A61**: 042305.
- [11] Long G L, Yan H Y, Li Y S, *et al.* Phys Lett, 2001, **A286**: 121.
- [12] Bhattacharya N, van den Heuvel HBV, Spreeuw RJC. Phys Rev Lett, 2002, **88**: 137901.
- [13] Hoyer P. Phys Rev, 2000, **A62**: 052304.
- [14] Bigham E, Bigham O, Biron D, Grassl M, *et al.* Phys Rev, 2001, **A63**: 012310.
- [15] Li D F, Li X X. Phys Lett, 2001, **A287**: 304.

Phase Matching in Quantum Searching and the Improved Grover Algorithm*

LONG Gui-lu, LI Yan-song, XIAO Li, TU Chang-cun, SUN Yang

(*Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(*Key Laboratory For Quantum Information and Measurements, MOE, Beijing 100084, China*)

Abstract: We briefly introduced some of our recent work related to the phase matching condition in quantum searching algorithms and the improved Grover algorithm. When one replaces the two phase inversions in the Grover algorithm with arbitrary phase rotations, the modified algorithm usually fails in searching the marked state unless a phase matching condition is satisfied between the two phases. The Grover algorithm is not 100% in success rate, an improved Grover algorithm with zero-failure rate is given by replacing the phase inversions with angles that depends on the size of the database. Other aspects of the Grover algorithm such as the $SO(3)$ picture of quantum searching, the dominant gate imperfections in the Grover algorithm are also mentioned.

Key words: quantum searching; phase matching; grover algorithm; quantum computing

* **Foundation item:** National Natural Science Foundation of China (60073009); National Major Fundamental Basic Research Project (001CB309308), The SRFDP Program of Education Ministry of China