文章编号：1007－4627(2003)04－0277－04

等效磁场与弯晶沟道辐射

罗诗裕，邵明珠，吴木营
(东莞理工学院，广东 东莞 523106)

摘　要：引入场指标和等效磁场概念，把粒子在弯晶沟道中的运动行为等效为回旋加速器中的粒子运动. 结果表明，描写粒子的运动方程是一个非线性薛定谔方程. 在小振幅近似下找到了系统的严格解和粒子振动周期，导出了瞬时辐射强度和最大辐射频率.

关 键 词：弯晶；沟道辐射；等效磁场；椭圆函数

中图分类号：O471.5；O571.33　　　**文献标识码**：A

1　引言

20 世纪 40 年代，前苏联物理学家维克斯勒发现，在高频场中运动的带电粒子有保持相位稳定的能力；接着人们指出，只要磁场中运动粒子的轨道长度与它的能量正比相关，粒子就可能被聚束. 20 世纪 50 年代初，H. Motz 首次提出自由电子激光设想，70 年代中期，美国斯坦福大学宣布第一台自由电子激光器问世. 这一新的激光光源引起了人们极大兴趣，而且找到非常广泛的应用. 但是，要用这种方法获得 X-激光或 γ-激光比较困难. 带电粒子沟道辐射可能作为 X-激光或 γ-激光给人们带来了新的希望. 但是，沟道辐射是自发辐射，如何把它改造为相干辐射是问题的关键.

在晶格场中运动的带电粒子将不断向外辐射电磁波. 带电粒子在晶体沟道中的运动行为同摆动器中的自由电子十分类似，不同的是沟道粒子将经受高达百 T 的晶格场，而晶面间距只有 Å 的量级，因此，沟道辐射能量一般都很高. 比如，对于能量为 50 MeV 左右的电子(或正电子)，辐射能量可达 keV 量级.

自由电子激光的相干性是自由电子通过摆动器(场)同辐射场相互作用形成“拍波”，并被“拍波”俘获来实现的. 如果能在晶体中形成一种稳定驻波，则带电粒子同驻波场相互作用，也可望得到一种相干的沟道辐射. 不过与无镜自由电子激光器更加类似，有人提出将晶体弯曲(弯晶)，让沟道辐射同时作为动力学衍射波，可望得到短波长的 X-激光或 γ-激光.

注意到晶体弯曲可以使平衡轨道偏转，而磁场也可以使带电粒子轨道弯曲. 基于二者的类似性，我们借助加速器概念，引入等效磁场模拟晶体弯曲，引入磁场梯度描写晶面之间的聚焦作用. 本文继续利用曾经提出的正弦平方势，把粒子运动方程化为非线性薛定谔方程，在小振幅近似下，严格求解了运动方程和粒子振动周期，并导出了瞬时辐射强度和最大辐射频率. 沟道辐射如何同弯晶相互作用形成动力学衍射波，我们将另外讨论. 不过采用超晶格的多层薄膜结构作为介质也是可能的途径之一. 文献[1, 2]作了部分前期工作.

2　运动方程

设弯晶的曲率为 κ，粒子在弯晶中的运动由两部分组成，一部分是粒子沿平衡轨道绕曲率中心做圆周运动；另一部分是粒子绕平衡轨道的自由振荡(Betatron Oscillation)，这种运动同加速器中的粒子径向运动十分相似. 引入等效磁感应强度 B，并注意到做这种运动的带电粒子受两个力作用：洛伦兹力 $F_L = qvB$ 和离心力 $F_c = mv^2/r$. 在经典力学框架内，粒子的运动方程可表示为

$$m_0\gamma\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{mv^2}{r}-qvB(r)\right)=0\ , \tag{1}$$

其中，m_0 是粒子的静止质量，γ 是相对论因子，v

收稿日期：2003－04－15；**修改日期**：2003－06－27
作者简介：罗诗裕(1940－)，男(汉族)，四川射洪人，教授，从事带电粒子沟道效应和沟道辐射研究.

是粒子的速度，q 是粒子电荷，r 是 t 时刻粒子的径向位置.

方程(1)的一个特解是 $r=r_e=$常数，相应的轨道称为平衡轨道，其定义为 $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2=0$，由此可导出

$$r_e=\frac{1}{\kappa}=\frac{mv}{qB}\ , \tag{2}$$

其中 $m=m_0\gamma$. 引入无量纲的位移

$$X=\frac{r-r_e}{d_p/2}=\frac{x}{d_p/2}\ , \tag{3}$$

d_p 是晶面间距. 方程(1)化为

$$m_0\gamma\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{d_p}{2}X+r_e\right)-\left[\frac{mv^2}{\frac{d_p}{2}X+r_e}-qvB(X)\right]=0\ , \tag{4}$$

注意到

$$\frac{1}{\frac{d_p}{2}X+r_e}\cong\frac{1}{r_e}\left(1-\frac{\frac{d_p}{2}X}{r_e}\right)\ , \tag{5}$$

$$B(X)\cong B_e+\frac{\partial B(X)}{\partial X}X\ , \tag{6}$$

其中 B_e 是平衡轨道上的磁感应强度. 于是，方程(4)可进一步化为

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2(1-n)X=0\ , \tag{7}$$

其中

$$\omega=\frac{v}{r_e}=\frac{qB_e}{m}\ , \tag{8}$$

而

$$n=-\frac{r_e}{B_e}\frac{\partial B}{\partial x} \tag{9}$$

是等效场指标，$\partial B/\partial x$ 是磁场的径向梯度. 方程(7)正是回旋加速器中粒子的径向运动方程. 注意到 $F_L=qvB$ 是粒子所受的洛伦兹力，场指标 n 可表示为

$$n=-\frac{r_e}{qvB_e}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{r_e}{qvB_e}\frac{\partial^2V(x)}{\partial x^2}\ , \tag{10}$$

其中 $V(x)$是粒子-晶体相互作用势. 常用的平面连续势有 Lindhard 势和 Moliere 势. 我们引入新的粒子-晶体相互作用势(正弦平方势)[3—5]

$$V(x)=K\beta\sin^2(\alpha X)\ , \tag{11}$$

其中 α 和 β 是势参数，X 由式(3)给出，而

$$K=\pi Z_1Z_2e^2Nd_p^2, \tag{12}$$

Z_1 和 Z_2 是入射粒子和晶体的原子序数，e 是电子电荷，Nd_p 是晶体原子的面密度. 将式(11)代入式(10)可得

$$n=4R_e^2\varepsilon^2\alpha^2\beta\cos(2\alpha X)\ , \tag{13}$$

其中

$$\varepsilon^2=\frac{K}{mv^2},\quad R_e=\frac{2r_e}{d_p}\ . \tag{14}$$

将式(13)代入方程(7)，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2[1+\delta\cos(2\alpha X)]X=0\ , \tag{15}$$

其中 $\delta=-4R_e^2\varepsilon^2\alpha^2\beta$. 方程(15)是一个非线性薛定谔方程.

引入无量纲参数

$$s=\frac{z}{d_p}\ , \tag{16}$$

其中 $z=r_e\theta$, $\theta=\omega t$，则方程(15)可化为无量纲形式

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{R_e^2}[1+\delta\cos(2\alpha X)]X=0\ . \tag{17}$$

3 小振幅近似

当粒子振幅比较小时，

$$\cos(2\alpha X)\cong1-\frac{(2\alpha X)^2}{2}\ ,$$

由此可将方程(17)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}s^2}+aX+bX^3=0\ , \tag{18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{1}{R_e^2}(1+\delta)\\ b&=-\frac{2}{R_e^2}\alpha^2\delta\end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

由式(19)可以看出，方程(18)中的系数恒有 $a>0$, $b>0$，该方程描写的是一个硬弹簧系统. 它的解可

表示为

$$X = X_0 sn\left(\sqrt{\frac{2a+bX_0^2}{2}}s\right), \tag{20}$$

式中 X_0 是无量纲的初始振幅，$sn(u)$是 Jacobian 椭圆函数. 粒子运动周期由下式给出：

$$T = \frac{4}{\sqrt{\frac{2a+bX_0^2}{2}}}K(k), \tag{21}$$

其中 $K(k)$是第一类全椭圆积分，而

$$k = \left(\frac{bX_0^2}{bX_0^2 - 2a}\right)^{1/2} \tag{22}$$

是椭圆函数的摸.

4 辐射特征

4.1 瞬时辐射强度

对于超相对论带电粒子，瞬时辐射强度可表示为

$$I_{in}(t) = \frac{2q^2(qvB)_e^2\gamma^2}{3m_0^2c^5}, \tag{23}$$

而$(qvB)_e = -\partial V_e(x)/\partial x$. 在小振幅近似下，上式可化为

$$I_{in}(t) = \frac{8q^2(aX_0 snu + bX_0^3 sn^3 u)^2}{3m_0^2c^3d_p^2}\gamma^2, \tag{24}$$

其中

$$u = \sqrt{a+\frac{bX_0^2}{2}},\ s = \sqrt{a+\frac{bX_0^2}{2}}\frac{r_e\omega t}{d_p}. \tag{25}$$

4.2 最大辐射频率

沟道辐射集中在角宽 $\Delta\theta \approx \gamma^{-1}$ 范围内，辐射谱强度与无量纲偏转角 ζ 有关. 令 $\Delta\varphi$ 为沟道粒子与平衡轨道之间的最大偏转角，则 ζ 定义为

$$\zeta = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\theta} = \left[\frac{K\gamma}{m_0c^2}\left(a+\frac{b}{2}\right)\right]^{1/2}. \tag{26}$$

下面分两种情况进行讨论：

(1) $\zeta \gg 1$

当 $\zeta \gg 1$ 时，最大辐射频率

$$\omega_1 = \left|\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right|_{\max}\frac{\gamma^2}{m_0c}, \tag{27}$$

其中

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\max} = \frac{d_p}{2}n\omega^2[1+n(X_c)]X_c, \tag{28}$$

X_c 由超越方程

$$1+\cos(2\alpha X_c) - 2\alpha X_c\sin(2\alpha X_c) = 0 \tag{29}$$

的解给出. 对于小振幅近似，式(27)化为

$$\omega_1 = \frac{1}{2c}d_p\omega^2\gamma^2[1+n(X_c)]X_c, \tag{30}$$

其中 ω 由式(8)给出.

(2) $\zeta \ll 1$

当 $\zeta \ll 1$ 时最大辐射频率为

$$\omega_2 = \frac{v_x}{x_m}\gamma^2 = \frac{4}{T}\gamma^2, \tag{31}$$

其中

$$T = 4\int_0^{x_m}\frac{\sqrt{E}}{c\sqrt{2(E_x - V_e(x))}}dx. \tag{32}$$

E 是粒子总能量，E_x 是粒子横向能量，x_m 是粒子运动的振幅，c 是光速. 对于小振幅近似，

$$T = \frac{d_p}{2v}s = \frac{2d_p}{v}\frac{K(k)}{\sqrt{a+\frac{bX_0^2}{2}}}, \tag{33}$$

于是式(31)可化为

$$\omega_2 = \frac{2c\gamma^2}{d_pK(k)}\sqrt{a+\frac{bX_0^2}{2}}. \tag{34}$$

式(30)和(34)给出了两种特殊情况下弯晶沟道辐射的最大频率.

5 结果和讨论

我们以正电子在硅单晶(110)面沟道中的辐射为例. 对于正电子，它的电荷数 $Z_1=1$，选择入射能量 $E=53$ MeV，与初始条件有关的参数 $k=0.5$. 选择硅(110)面沟道辐射作为考察对象，硅的电荷数 $Z_2=14$，(110)晶面间距 $d_p=0.192$ nm，晶体原子密度 $N=4.97\times10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}$. 选择粒子-晶体相互作用势参数 $\beta=0.2$. 由此可以导出 $K=115$ eV，而势阱深度 V_0 也可以导出，且 $V_0=K\beta=0.23$ eV. 由式(34)可求得弯晶沟道辐射的最大能量(频率)$\omega=\hbar\omega_2=1.05$ keV.

我们曾对弯晶沟道效应进行过一些研究，并将

弯晶中的粒子运动方程化为具有常力矩的摆方程[6−11]. 本文引入等效磁场和场指标概念，把弯晶沟道中粒子的运动行为等效为回旋加速器中的粒子运动. 结果表明，在正弦平方势假设下，粒子运动方程是一个非线性薛定谔方程，在小振幅近似下，方程的解和粒子振动周期可以用Jacobian椭圆函数和第一类全椭圆积分来表示. 最后，导出了弯晶沟道辐射的瞬时强度和最大辐射频率，为利用弯晶来获得动力学衍射波提供了前期工作.

参 考 文 献:

[1] 罗诗裕，马如康，邵明珠. 形(应)变超晶格的沟道效应与系统的相平面特征[J]. 原子核物理评论，2002，**19**(4)：407.

[2] 林钧锋，周小方，罗诗裕等. 形(应)变超晶格的退道效应与系统的全局分叉[J]. 原子核物理评论，2003，**20**(1)：55.

[3] 邵明珠，罗诗裕，Hofmann I. 一维晶化束的非线性动力学(I)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 189.

[4] 邵明珠，罗诗裕，Hofmann I. 一维晶化束的非线性动力学(II)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 200.

[5] 邵明珠，罗诗裕，Hofmann I. 一维晶化束的非线性动力学(III)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 207.

[6] 罗诗裕，邵明珠. 一维库仑系统的相干纵振动[J]. 数学物理学报，1993，**13**(1)：391.

[7] 罗诗裕，邵明珠. 正电子面沟道辐射的经典描述[J]. 中国激光，1986，**13**(10)：607.

[8] 罗诗裕，邵明珠. 正弦平方势及其面沟道辐射的一般特征[J]. 数学物理学报，1986，**6**(3)：255.

[9] 罗诗裕，邵明珠. 弯晶沟道的全局分叉及其混沌行为[J]. 物理学报，1988，**37**(8)：1 278.

[10] 罗诗裕，邵明珠. 形变超晶格的位错模型与粒子的退道效应[J]. 半导体学报，2003，**24**(5)：485.

[11] 罗诗裕，邵明珠. 一维晶化束的电磁辐射与冷却效应[J]. 强激光与粒子束，2003，**15**(7)：713.

Equivalent Magnetic Field and Channelling Radiation in Bent Crystal

LUO Shi-yu, SHAO Ming-zhu, WU Mu-ying

(*Dongguan University of Technology, Dongguan*, 523106, *Guangdong*, *China*)

Abstract: The sine-squared potential and the equivalent magnetic field intensity have been introduced, the motion equation of the particle in bent crystal has been derived, the motion equation and the oscillation period of the particle have been solved exactly by Jacobian elliptic fuanction and the first kind of complet elliptic integrals, the intensity and the spectral properties of channelling radiation in bent crystal discussed.

Key words: bent crystal; channelling radiation; equivalent magnetic field; elliptic function