文章编号：1007－4627(2003)03－0222－04

正弦平方势与带电粒子的准沟道辐射

胡西多，邵明珠，罗诗裕
(东莞理工学院，广东 东莞 523106)

摘　要：在经典力学框架内，描述了带电粒子自发辐射的频谱分布与辐射频率；利用正弦平方势讨论了带电粒子准沟道辐射，指出了准沟道辐射与系统的旋转周期解相联系；分析了系统的相平面特征和准沟道粒子进入混沌的可能途径.

关 键 词：准沟道辐射；相对论效应；自发辐射；混沌；正弦平方势
中图分类号：O471.5；O571.33　　**文献标识码**：A

1　引言

当带电粒子的横向能量小于沟道位垒时，它将被沟道俘获. 从量子力学观点看，在势阱中运动的带电粒子，它的能量具有不同的分立值. 当粒子在这些能级之间跃迁时将自发地向外辐射能量. 经典物理学证明，任何一个带电粒子，在电磁场中作加速度运动时，都要自发地向外辐射电磁波，这种辐射称为自发辐射. 在晶格场中运动的带电粒子也不例外，强大的晶格场可以使辐射能量达到很高. 粒子在沟道中运动的自发辐射称为沟道辐射；粒子跨越沟道在晶体中运动的自发辐射称为准沟道辐射. 事实上，即使在理想情况下，也只有三分之一左右的粒子是沟道粒子，其余的粒子一部分是准沟道粒子，另一部分是随机粒子. 沟道和准沟道辐射强度主要集中在粒子运动方向、立体角为 $1/\gamma$ 的狭窄范围内. 随机粒子对沟道辐射的影响则是使本底增加.

本文引入正弦平方势，并考虑到运动阻尼和外激励的影响[1—3]，把粒子运动方程化为一个具有阻尼项和受迫项的摆方程. 无扰动系统的相平面轨道有 3 类：振荡型周期轨道、旋转型周期轨道和分界线. 沟道辐射与振荡型周期轨道有关，准沟道辐射与旋转型周期轨道相联系. 我们曾对沟道辐射作过比较仔细的研究[4—11]，大部分工作都是基于方程的振荡周期解. 本文将从旋转周期解出发进一步讨论准沟道辐射的一般特征，比如辐射能量、辐射谱分布以及系统的临界混沌行为等. 同其它粒子-晶体相互作用势(比如 Lindhard 和 Moliere 势)相比，引入正弦平方势可以使准沟道辐射的描述变得更加系统、自然，从而进一步保证了理论的完整性、自洽性和解析性.

2　电磁辐射的谱分布

当带电粒子在电磁场中作加速运动时，辐射谱密度分布可以表示为[1, 12]

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\omega}=\alpha h\sum_{l=1}^{\infty}\omega_l\mid\dot{\beta}_{lx}\mid^2\frac{f(u)}{\Omega^2}\ ,\tag{1}$$

其中，α 是精细结构常数，h 是普朗克常数，而

$$\Omega=\Omega_0\gamma^{-1/2}\ ,\tag{2}$$

Ω_0 是惯性系中粒子横向振动频率(由运动方程确定)，γ 是相对论因子，Ω_l 是 l 次谐波的最大辐射频率，且可表示为

$$\omega_l=2l\Omega_0\gamma^{3/2}\ ,\tag{3}$$

而

$$f(u)=\frac{u(1-2u+2u^2)\theta(\omega_l-\omega)}{l^2}\tag{4}$$

是辐射谱密度分布的线型因子，$\theta(\omega_l-\omega)$ 是单位阶跃函数，$u=\omega/\omega_l$ (ω 是辐射频率). 式(1)中的 $\dot{\beta}_{lx}$ 可以表示为

$$\dot{\beta}_{lx}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\dot{\beta}_x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Omega t}\mathrm{d}t\ ,\tag{5}$$

收稿日期：2002－12－25；修改日期：2003－04－15
作者简介：胡西多(1963－)，男(汉族)，江西九江人，博士后，从事凝聚态物理研究.

其中 $T=2\pi/\Omega$ 是粒子振动周期，$\dot{\beta}_x$ 是无量纲的横向加速度(由运动方程确定).

从式(1)到(5)可以看出，只要 $\dot{\beta}_{Lx}$ 和 Ω_0 已知，则辐射谱分布和辐射最大频率(或能量)就完全确定. 于是问题归结为寻找运动方程以及方程的解和粒子振动周期.

3 粒子运动方程

引入无量纲的正弦平方势[2]

$$V(X)=K\beta_1\sin^2\left(\frac{\pi X}{2}\right) \tag{6}$$

并考虑粒子运动阻尼和周期场的作用[2,3]，在牛顿力学框架内，粒子运动方程可化为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}&=\zeta,\\ \dot{\zeta}&=-\sin\xi-a\frac{d\xi}{d\tau}+b\sin(\omega_0\tau),\end{aligned} \tag{7}$$

其中，$\dot{\zeta}=d\zeta/d\tau$，而

$$\begin{gathered}\xi=\pi X,\quad X=\frac{2x}{d_p},\\ \tau=\frac{2v\sqrt{\delta}}{d_p}t,\quad \delta=\frac{\pi^2\beta_1}{4},\\ \varepsilon^2=\frac{K}{m_0c^2\gamma},\quad K=\pi Z_1Z_2e^4Nd_p^2,\end{gathered} \tag{8}$$

x 是粒子偏离沟道中心的距离(也是粒子振动方向)，d_p 是晶面间距，Z_1 和 Z_2 分别是入射粒子与晶体原子的原子序数，Nd_p^2 是晶体原子面密度，m_0 是入射粒子的静止质量，β_1 是势参数. a 和 b 分别是无量纲的阻尼系数和外周期场振幅，且由下式给出

$$a=\frac{4\pi n_e e^4Z_1^2L}{\sqrt{\delta}\gamma^2m_em_0(v^*)^3v},\qquad b=\frac{f}{\delta^{1/2}}, \tag{9}$$

其中，v^* 是粒子有效速度，而

$$\begin{gathered}\delta=\frac{2\pi^2K\beta_1}{d_p^2pv},\qquad p=\gamma m_0v,\\ \omega_0=\frac{\omega_e}{\delta^{1/2}},\qquad L=\ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right)\end{gathered} \tag{10}$$

ω_e 是外场频率，ω_0 是无量纲的外场激励频率，f 是外场振幅，m_e 是电子静止质量，b_{max} 和 b_{min} 分别是最大和最小碰撞参数. 其它参数见文献[2，3].

4 无扰动系统的相平面特征

系统(7)的无扰动方程为

$$\dot{\xi}=\zeta,\qquad \dot{\zeta}=-\sin\xi. \tag{11}$$

方程(11)是一个 Hamilton 系统，相应的 Hamilton 量为

$$H=\frac{1}{2}\zeta^2+(1-\cos\xi)=h_0, \tag{12}$$

其中 h_0 是常数，由系统的初值确定. 根据 h_0 的大小，相平面上的轨道分为 3 类.

(1) $h_0=2$，异宿轨道. 又称分界线，它把相平面分成了上下两个区域. 其轨道方程为

$$\begin{aligned}\xi&=\pm2\arcsin(th\tau),\\ \zeta&=\pm2\operatorname{sech}(\tau),\end{aligned} \tag{13}$$

相应的粒子运动周期为无穷.

(2) $0<h_0<2$，振荡型周期轨道：相应的解为

$$\begin{aligned}\xi&=2\arcsin(\kappa sn\tau),\\ \zeta&=2\kappa cn\tau,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\kappa^2=h_0/2$，$sn\tau$ 和 $cn\tau$ 为 Jacobian 椭圆函数. 其周期由

$$\tau^0=4K(\kappa) \tag{15}$$

给出，$K(\kappa)$为第一类全椭圆积分. 当 h_0 单调增加时，轨道逐渐向异宿轨道逼近，粒子运动周期由 2π 增加到无穷.

(3) $h_0>2$，旋转型周期轨道. 相应的解由公式

$$\begin{aligned}\xi&=\pm2\arcsin\left(sn\frac{\tau}{\kappa'}\right),\\ \zeta&=\pm\frac{2}{\kappa'}dn\frac{\tau}{\kappa'}\end{aligned} \tag{16}$$

给出，其中 $\kappa'=\sqrt{2/h_0}$，而 $dn(\tau/\kappa')$为 Jacobian 椭圆函数，其周期为

$$\tau^r=2\kappa'K(\kappa'). \tag{17}$$

当 h_0 单调减少时，旋转周期解逐渐向异宿轨道逼近，相应的运动周期由零增加到无穷. 方程(16)和(17)给出了准沟道辐射的全部信息.

5 粒子准沟道辐射

由方程(17)和(8)，可将无量纲的振动周期化

为以时间为单位的振动周期

$$T=\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{d_p\kappa'}{\sqrt{\delta}v}K(\kappa') . \tag{18}$$

由式(16)和(8)可得粒子的横向加速度

$$\dot{\beta}_x=\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\sqrt{\delta}}{a\kappa'}dn\left(\frac{2\sqrt{\delta v}}{\kappa' d_p}\right) . \tag{19}$$

将式(18)和(19)代入式(5)，并完成积分可得

$$\dot{\beta}_{lx}=\mathrm{i}(-1)^l\frac{2\pi\sqrt{\delta}l\Omega}{a\kappa' Tc_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_1^n n}{1+q_1^{2n}}\delta_{n,2l} , \tag{20}$$

其中

$$c_1=\frac{2\sqrt{\delta v}}{\kappa' d_p},\quad q_1=\mathrm{e}^{-\pi K'/K},\quad K'=K(\kappa') . \tag{21}$$

从式(1)可以看出，l 可取(1，∞)区间上的任意整数值，考虑到势阱深度的限制和辐射谱密度随谐波数 l 的增加成平方反比减小，对于高次谐波的贡献常常被本底辐射淹没，因此，一般情况下 l 只取少数几个值.

我们以正电子为例，讨论它在硅晶体中的准沟道辐射. 选择与入射粒子有关的参数为 $Z_1=1$，$\kappa'=0.5$，能量为 5 GeV；与晶体有关的参数 $Z_2=14$，$d_p=0.192$ nm，$N=4.97\times10^{25}$ m^{-3}；与正弦平方势有关的参数 $\beta_1=0.2$，由此可导出 $K=115$ eV. 由式(18)和(5)可求得准沟道辐射的最大频率. 对于如上一组参数，并考虑 $l=1$，可计算出最大辐射能量为 153 MeV，相应的线型因子由式(4)给出.

由式(17)和(15)可将准沟道辐射和沟道辐射的频率(或能量)比表示为

$$g=\frac{2K(\kappa)}{\kappa' K(\kappa')} . \tag{22}$$

上式表明，对于不同的 κ 或 κ'，g 的值可以大于 1，小于 1 或等于 1. 这说明准沟道辐射的能量可能比沟道辐射大，也可能比沟道辐射小，这是与文献[13]的结果不同的. 虽然人们从实验上发现了准沟道辐射，并从理论上进行了描述[13]，但是由于相互作用势比较复杂(比如常用的 Lindhard 势和 Moliere 势)，粒子的运动行为(包括沟道和准沟道粒子)只能数值求解. 文献[13]在相互作用的抛物线近似下，对准沟道辐射进行了描述，并指出准沟道辐射能量至少比沟道辐射大两倍. 因为作者人为地定义了准沟道粒子的运动周期为粒子在相邻晶面之间的飞行时间，我们认为这一定义是欠妥的，再加上相互作用势的抛物线近似也显得粗造. 为此，我们利用曾经提出的正弦平方势，解析地导出了粒子的运动周期；而且发现，仅当我们考察异宿轨道附近的沟道粒子和准沟道粒子行为时，它们之间的能量关系才有文献[13]的结果. 文献[14，15]进一步对超晶格的沟道现象作了描述.

6 准沟道辐射的混沌行为

我们关心系统如何通过旋转型周期轨道式(16)走向混沌的可能方式. 为此，讨论在这些轨道中产生周期 $T=2\kappa' K(\kappa')=2m\pi/n\omega_0$ 的超次谐分叉. 由方程(16)构造如下形式的 Melnikov 函数

$$M^{m/n}(\tau_0)=\int_0^{nT}\zeta(\tau)\{-a\zeta+b\sin\omega_0(\tau+\tau_0)\}\mathrm{d}\tau , \tag{23}$$

其中 $\zeta(\tau)$ 由式(16)给出. 对于 $n=1$，完成上式积分[15]，可得 m 阶次谐分叉的 Melnikov 函数[16]

$$M^{m/1}(\tau_0)=\frac{8a}{\kappa}E(\kappa')+2\pi b\sin(\omega_0\tau_0)\mathrm{sech}(\omega_0\kappa' K') , \tag{24}$$

$$\omega_0=\frac{m\pi}{\kappa' K(\kappa')} , m=1, 2, 3, \cdots .$$

上式在区间 $\tau_0\in(0,2\pi m/\omega_0)$ 内有简单零点的条件为

$$\frac{b}{a}>\frac{4E(\kappa')}{\pi\kappa}ch\omega_0\kappa K' , \tag{25}$$

即系统经无限次旋转型次谐分叉趋近于混沌阈值，并出现 Smale 马蹄. 这就是说，在弱阻尼和弱激励情形下，对于充分小的 a，b 和固定的 ω_0，当参数 b/a 逐渐增加时，旋转型周期轨道可通过无限次次谐分叉进入混沌.

实验发现，当选用不同的晶体进行考察时，准沟道辐射的本底各不相同，这除了人们关心的几种因素(如晶体结构、晶格振动和电子多重散射等)外，同沟道辐射的混沌行为直接相关. 因为，当系统进入混沌状态时，一部分准沟道粒子将转变为随机粒子，而随机粒子的无规行为将使辐射本底增加.

参 考 文 献：

[1] 罗诗裕，邵明珠. 正电子面沟道辐射的经典描述[J]. 中国激光，1986，**13**(10)：607.

[2] 罗诗裕，邵明珠. 面沟道粒子的正弦平方势与带电粒子的库马霍夫辐射[J]. 中国激光，1984，**11**(2)：69.

[3] 罗诗裕，邵明珠. 运动阻尼对沟道辐射的影响[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1995，**20**(3)：257.

[4] 罗诗裕，邵明珠. 弯晶沟道的退道效应[J]. 物理学报，1986，**35**(8)：1 002.

[5] 罗诗裕，刘曾荣，邵明珠. 半导体光磁电效应的非线性特征[J]. 物理学报，1987，**36**(5)：547.

[6] 罗诗裕，邵明珠，刘曾荣等. 弯晶沟道的混沌行为[J]. 物理学报，1988，**37**(8)：1 394.

[7] 邵明珠，Hofmann I，罗诗裕. 一维晶化束的非线性动力学(I)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 189.

[8] 邵明珠，Hofmann I，罗诗裕. 一维晶化束的非线性动力学(II)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 200.

[9] 邵明珠，Hofmann I，罗诗裕. 一维晶化束的非线性动力学(III)[J]. 物理学报，1990，**39**(8)：1 207.

[10] 邵明珠. 变曲率弯晶的粒子退道行为[J]. 物理学报，1993，**41**(11)：1 825.

[11] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Dechanneling Effects by Penetrating Barrier[J]. Radiation Effects Express, 1988, **1**: 239.

[12] Jackson J D. Classical Electrondynamics[M]. Second editon, Johen Wiley and Sons, Inc, 1975, 358—379.

[13] Bazylev V V. Channeling Radiating of Porsitron[J]. Radiation Effects, 1981, **56**(1): 73.

[14] 罗诗裕，马如康，邵明珠. 形变超晶格的沟道效应与系统的相平面特征[J]. 原子核物理评论，2002，**19**(4)：407.

[15] 林钧锋，周小方，罗诗裕等. 应变超晶格的退道效应与系统的全局分叉[J]. 原子核物理评论，2003，**20**(1)：55.

[16] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products[M]. New York: Academic Press, 1980, 435—443.

Sine-square Potential and Quasichanneling Radiation of Charged Particles

HU Xi-duo, SHAO Ming-zhu, LUO Shi-yu

(*Dongguan University of Technology*, *Dongguan*, 523106, *Guangdong*, *China*)

Abstract: In the general case the spectral distribution and the radiation frequency are derived for the spontaneous radiation of charged particles. The quasichanneling radiation is described by using a sine-square potential, and point out that the quasichanneling radiation is related directly to the rotation periodic solution; The properties of the phase plane and the possible model approaching to chaos for the system is analyzed.

Key words: quasichanneling radiation; relativistic effect; spontaneous radiation; chaos; sine-square potential