第 18 卷 第 4 期
2001 年 12 月

原子核物理评论
Nuclear Physics Review

Vol. 18, No. 4
Dec., 2001

文章编号：1007－4627(2001)04－0231－06

$^{87}Rb_2$ 的奇怪简并与低激发惰性气体表现的 Yangian 结构*

白承铭，葛墨林

（南开大学数学研究所理论物理研究室，天津 300071）

摘 要：指出$^{87}Rb_2$ 蒸汽实验中出现的奇怪简并态应当用 Yangian 描述，并推广这一概念进一步建议用加压的低激发态惰性气体实验检验与 Yangian 有关的谱.

关 键 词：奇怪简并；Yangian；子表示；低激发惰性气体

中图分类号：O413.3 　　**文献标识码**：A

1 量子张量空间

在量子力学中，状态用波函数(或态矢量)描述，即$|\Psi\rangle$是希尔伯特空间的矢量，它的空间记为V. $|\Psi\rangle$描述的是单粒子行为. 如果描述两个有互作用的粒子态，即$|\Psi_{12}\rangle$，则为量子张量空间，记为$V\odot V$. 原则上$|\Psi_{12}\rangle$与$|\Psi_1\rangle$，$|\Psi_2\rangle$是独立的. 当$|\Psi_{12}\rangle$可以用$|\Psi_1\rangle$和$|\Psi_2\rangle$的知识表达出来时，原则上可以解$|\Psi_{12}\rangle$相应的本征值问题. 当然这要看互作用哈密顿量的具体形式. 但这时$V\odot V$这种张量空间仍表现出不同于V的性质. 为了说明这个问题，举 Beite-Rabi 哈密顿量的例子. 这时[1]

$$H_{BR}=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{s}+xks_3\ , \tag{1}$$

其中s为自旋 1/2 矢量，K为碱金属原子核的自旋 $K^2=K(K+1)$，$k=K+1/2$，x表示外加沿z轴恒磁场. 其物理图像为外层电子在外磁场作用时受到核自旋K的影响，即在j-j耦合时的 Zeeman 效应. 这个问题的严格解很易求得. 由于K^2与$m=K_3+s_3$守恒，可引入两个独立态(能量态)：

$$|\alpha_1\rangle=|K,m-\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\ ,$$
$$|\alpha_2\rangle=|K,m+\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\ . \tag{2}$$

易得

$$(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{s})\begin{pmatrix}|\alpha_1\rangle\\|\alpha_2\rangle\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}m-\frac{1}{2} & \sqrt{(K+\frac{1}{2})^2-m^2}\\ \sqrt{(K+\frac{1}{2})^2-m^2} & -(m-\frac{1}{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\alpha_1\rangle\\|\alpha_2\rangle\end{pmatrix}\ , \tag{3}$$

从而在$\Phi=\begin{pmatrix}|\alpha_1\rangle\\|\alpha_2\rangle\end{pmatrix}$基底下，哈密顿量$H_{BR}$可写为

$$H_{BR}^{(m)}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[(xk-m)\sigma_3+\sqrt{k^2-m^2}\sigma_1]\ , \tag{4}$$

其中$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$为泡里矩阵. 易将(4)对角化，得

$$U(\varphi_m)H_{BR}^{(m)}U(\varphi_m)^{-1}=H_{BR}^{(m)}(\varphi_m)\ ,$$
$$\Phi^{(m)}(\varphi_m)=U(\varphi_m)\Phi^{(m)}\ , \tag{5}$$

其中m为守恒量，故$\Phi^{(m)}$与相应哈密顿量表示中特别标出对m的依赖性，且

收稿日期：2001－10－17；**修改日期**：2001－11－05

* **基金项目**：国家自然科学基金资助项目(19677104)

作者简介：白承铭(1971－)，男(汉族)，黑龙江双城人，副教授，从事理论物理研究.

$$\Phi^{(m)}(\varphi_m) = \begin{vmatrix} (\cos\frac{\varphi_m}{2})|\alpha_1\rangle - (\sin\frac{\varphi_m}{2})|\alpha_2\rangle \\ (\sin\frac{\varphi_m}{2})|\alpha_1\rangle + (\cos\frac{\varphi_m}{2})|\alpha_2\rangle \end{vmatrix}. \tag{6}$$

$$E = -\frac{1}{4} - \omega_m s_3, \tag{7}$$

其中

$$\cos\varphi_m = \frac{xk - m}{\omega_m}.$$

$$\omega_m^2 = (1 + x^2)k^2 + 2xmk. \tag{8}$$

从(3)可以看出 $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{s}$ 作用在 Φ 上而，将 $|\alpha_1\rangle$ 与 $|\alpha_2\rangle$ 混合起来，从而影响了进动频率 ω_m. 这种混合并不是由 C-G 系数决定的，从而不是通常的李代数的本征态. 事实上 $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{s}$ 项是典型 j-j 耦合，而 xks_3 项可视为蜕化的 L-S 耦合(见以后的讨论)，所以(1)式实际是介乎 j-j 与 L-S 耦合的蜕化情况. 处理这些问题的特点是：整个量子空间不能再简单地分解为对角块形式(像李代数表示分解那样)，而是存在非对角元，从而需要处理整个张量空间.

当自旋为 1 时，张量空间表现出特殊效应. 将(1)式推广到[1]

$$H = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{S} + xks_3, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{S}^2 = S(S+1)$，$S=1$. 一个重要的实验事实是在 $x=\pm1$ (即磁场特殊值)时 Zeeman 效应消失. 这在量子向量空间是无法理解的：加了磁场，谱线便应当分裂，为什么在某些磁场值时它反而不分裂呢？以后会看到，在谱线分裂时，随着磁场的不同，存在一个向量空间与张量空间的竞争过程，在某特定磁场值，它们恰好平衡，因而已分裂的谱线反而又"缩回到一个点". 而这种描述肯定会越出李代数，从而需要 Yangian[2,3].

2　Happer 奇怪简并

在文献[4]中报告了有关^{87}Rb 蒸汽的实验. 在约 220 C，外加磁场大约在 0.15 T 并加压力时，形成$^{87}Rb_2$ 即 spin-dimer 的碱金属"分子"，此时由于核矩为 $K=2k$，而 $S=1$(洪德法则)忽略核矩互作用，故本征态应为($\boldsymbol{G}=\boldsymbol{K}+\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{G}^2=G(G+1)$)$G=K-1$、$K$，$K-1$ 三种态的线性组合，由于 K 与 $G_3=m$ 为守恒量，故可用固定 m 与 K 标志态. 因而原则上有三族本征矢：

$$H\Psi_m = E_m\Psi_m. \tag{10}$$

Happer 求解了(10)，发现有三族类型的解：α_T、α_D 与 α_B[1]. 相应的能量 $E_T > E_D > E_B$. 而当 $x=\pm1$ 时 $E_D=-1/2$，即这族对应的能量与 m 无关，$H\alpha_{Dm} = -1/2\ \alpha_{Dm}$，简称为 Happer 简并. α_D 即为奇怪简并态. 这种"Anti-crossing"奇怪简并已获实验支持. Happer 的结果给在表 1 中. 由表 1 可以看出 H 总共有($2K+1$)个对应于 $E_{Dm}=-1/2$的本征向量.

表 1

	$G=K+1$	$G=K$	$G=K-1$	S	D 集合	T 集合	B 集合
$m=K+1$	---			→		$\alpha_{T,m=K+1}$	
$m=K$	---	---		→	$\alpha_{D,m=K}$	$\alpha_{T,m=K}$	
$m=K-1$	---	---	---	→	$\alpha_{D,m=K-1}$	$\alpha_{T,m=K-1}$	$\alpha_{B,m=K-1}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	---	---	---	→	α_{Dm}	α_{Tm}	α_{Bm}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$m=-K+1$	---		---	→	$\alpha_{D,m=-K+1}$	$\alpha_{T,m=-K+1}$	$\alpha_{B,m=-K+1}$
$m=-K$	---	---		→		$\alpha_{T,m=-K}$	$\alpha_{B,m=-K}$
$m=-K-1$	---			→	$\alpha_{D,m=-K-1}$		

它们皆由 $G=K+1$、K、$K-1$ 的态(水平虚线)组合而成. 在 D 集合中，不存在具有 $m=K+1$ 和 $m=-K$的态(当 $x=-1$ 时，不存在具有 $m=-K-1$ 和 $m=K$ 的态). 亦即在 $\alpha_{D,m=-K+1}$和 $\alpha_{D,m=-K-1}$之间任意具有 $m=-K$ 的 $G=K+1$ 与 $G=K$ 两态的线性组合不属于 D 集合. 除了 D 集合(具有简并)，还有另外两个集合，即没有简并的 T 集合与 B 集合. 如果我们将 D，T 与 B 看成三个"方向"，那么 D"方

向"代表的是简并态的集合. 虽然 Happer 在文献[1]中进行了很好的讨论，但是仍然有下面比较本质的问题没有得到解释[1]：

· 这种奇怪的简并为什么只发生在 $S=1$?

· 这些奇怪的简并态用什么区分?

· 解除这种简并的算子的性质?

这些都是没解决的问题，本文将予初步的回答.

3 描述 Happer 简并的算子——Yangian

先回忆在通常量子力学中建立李代数的结构的过程. 设有态 $|K, K_3\rangle$($K_3|K, K_3\rangle=K_3|K, K_3\rangle$)，它有 $(2K+1)$ 个态. 给定态…，$|K, K_3-1\rangle$、$|K, K_3\rangle$、$|K, K_3+1\rangle$、…，我们需要引入算子 $K_\pm$，使得对任意 m

$$K_\pm |K,K_3\rangle \approx |K,K_3\pm 1\rangle, \tag{11}$$

而且保证 $K_+|K, K\rangle=0$，$K_-|K, -K\rangle=0$. 给出这些态最简单的办法就是对给定态猜出 $K_\pm$(上升，下降)算子，然后计算 $K_\pm$，K_3 的对易关系，如果封闭，即形成代数，从而确定出 $SU(2)$代数关系.

现在对表 1 重复这一过程. 这里特别之点是，在表 1 中，例如对 $x=1$，对 $m\leqslant|K-1|$，α_D 为 3 种态组合. $m=\pm K$ 为两态组合. 而 $m=|K+1|$则无组合. 另一个特殊点是，对 $x=1$，$m=K+1$ 的态与 $m=-K$ 的态不是 α_D 的本征态，即有"断开"现象. 这与(11)是完全不同的.

因为描述态"断开"集合的上升、下降算子绝不会是李代数算子.

(1)首先可证明形如(a，b 为常数)$aS_\pm+bK_\pm$的算子不可能保证在 α_{Dm}中起升降算子作用.

(2) 进一步计算可证明，保证上述要求的上升算子为

$$\begin{aligned} J_- &= (m+K+1)G_+ + aS_- + \\ &\quad bK_+ + \frac{1}{2}(S_3K_+ - S_+K_3) \\ &= (m+K+1)G_+ + J_-(a,b), \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\quad a=-\dfrac{K}{2},\ b-a=\dfrac{1}{2}(K+1)$,

$$G_+ = K_+ + S_-. \tag{13}$$

注意$(b-a)$不依赖于 m. 而

$$\begin{aligned} J_- &= -(m+K)G_- + cS_- + \\ &\quad dK_- - \frac{1}{2}(S_3K_- - S_-K_3) \\ &= -(m+K)G_- + J_-(c,d), \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\quad c=\dfrac{K}{2}+\dfrac{1}{2},\ d-c=-\dfrac{K}{2}$,

$$G_- = K_- + S_-. \tag{15}$$

注意 c 相当于 a 中做替换 $K\to K+1$，再反符号(它有表示论的根源)，且$(b-a)$与$(d-c)$不依赖于 m.

(3) 可以验证对 $x=1$，$J_+|\alpha_{D,m=K}\rangle=0$，$J_+|\alpha_{D,m=-K-1}\rangle=0$，即自动断开. 而对 $x=-1$，$J_-|\alpha_{D,m=-K}\rangle=0$，$J_-|\alpha_{D,m=K+1}\rangle=0$. 由于标号的差异，$x=1$ 的 $J_+(J_-)$可视 $x=-1$ 的 $J_-(J_+)$的厄米共轭.

(4) 考虑一般算子形式

$$J=\lambda G+J', \tag{16}$$

$$J'=\mu K+\gamma s-\frac{i}{2}S\times K, \tag{17}$$

其中 λ、μ 与 γ 为任意常数. 显然，当 $\mu=\gamma=0$，且作用于向量空间的话，则只有 λG 起作用，如果 λ 与守恒量子数无关，将蜕化为李代数($SU(2)$). 而 J'为 $\boldsymbol{K}$ 与 S 的线性叠加与张量空间的组合. 可证 J'满足的对易关系是非线性的，称为 Yangian(现在是与 $SU(2)$有关的 $Y(SU(2))$)[4]. 而 λG 称为平移项;任意 Yangian(J')作平移后仍满足 Yangian 对易关系[2]. Yangian 是李代数的推广，最早由 Drinfeld 引入[2]. $Y(SU(2))$的表示论由 Chari-Pressley 给出[5]. 形如(16)，(17)简单形式的仔细讨论及其在氢原子中的应用见[3].

由于 a、b 与 c，d 系数不同，说明 α_{Dm}集合不是 $Y(SU(2))$的表示. 但有趣的是当 $\mu-\gamma=1/2(K-1)$时，由 Yangian 表示论[5]知道表 1 中 $G=K+1$ 的列矢量为其不可约子表示. 而当 $\mu-\gamma=-1/2K$ 时，$G=K-1$ 列矢量则为子表示. 因而可以提供观测这种 Yangian 效应的可能性.

4 S=1 时才会出现奇怪简并的原因

如果只考虑线性空间，即李代数的组合，只能有 $aS_\pm+bK_\pm$的线性组合形式，因而可以有一个独立参数 b/a. 但当存在张量项 $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{K}$ 后(见(17))，a 与 b 变为两个独立参数. 另一方面在 α_{Dm}中，由于 $S=1$，故须有三个态的线性组合(见表 1). 去掉归一化常数，也有两个独立参数，因此一般情况下，确

定态 α_{Dm} 中不同 m 的上升，下降算子中的 a 与 b 的方程个数与未知参数个数一样可以解出，故可用 Yangian 描述．因为 Yangian 实现中允许有若干独立参数[2-5]，对两角动量系统恰为两个．

如果 $S>1$，则方程个数大于 2，一般没有解（当 $S=1/2$，即 Breit-Rabi 模型为蜕化情况）．值得强调的是从三态组合 α_D（见表 1）确定的上升、下降算子（即决定 a，b），当 $x=1$，外推到作用于 $\alpha_{D,m=-K}$ 时会自动为零，但同样 a，b 的 J_+ 作用于 $\alpha_{D,m=K-1}$ 时，蜕化为二态组合 $\alpha_{D,m=K}$，进一步 $J_+\alpha_{D,m=K}=0$．这种自动保证的外推机制也显示了引入 Yangian 算子不会是巧合．对 $x=-1$ 也有类似情况．同时 $(a-b)$ 不依赖于 m，也与表示论相符．

5　测量 $x=\pm1$ 时的 Yangian 效应

既然在 $x=\pm1$ 有奇怪简并，而这些简并态由 $J_+(a,b)$，$J_-(c,d)(x=\pm1)$ 区分，那么如何解除这种简并呢？观察上升算子 J_+，将 J_+ 作用在表 1 的 $G=K+1$ 列矢量 $\{\Psi_{K+1,m}\}$（共 $2K+3$ 个态），计算表明，

$$J_+\{\Psi_{K+1,m}\}=0,\ (\text{对任意 } m)\ ,\tag{18}$$

$$J_+\{\Psi_{K+1,m}\}=(K+m+1)G_+\{\Psi_{K+1,m}\}\ ,\tag{19}$$

这就是说，如果将 $(K+m+1)G_+$（非线性作用）作用于列矢量 $\{\Psi_{K+1,m}\}$（李代数态）上，其效果与 J_+ 作用类似．在 $P_m=(m+K+1)G_+$ 中 m 的出现表示了非线性性质，要记住态的"历史"．在非线性模型中引入上升、下降算子时，这种现象是必然的[6]．它在实验中表明谱线强度与 m 有关，不再是均匀的，而是依赖于从哪个态跃迁．

由(15)，表示论[5]表明列矢量 $\Psi_{K-1,m}$ 为不可约子空间．而

$$J_-\{\Psi_{K-1,m}\}=0,\ (\text{对任意 } m)\ ,\tag{20}$$

$$J_-\{\Psi_{K-1,m}\}=-(K+m)G_-\{\Psi_{K-1,m}\},\tag{21}$$

它有 $(2K-1)$ 个态，且强度依赖于 $(m+K)$．

因此，解除 $x=\pm1$ 点处简并态的后果是"跃迁"与"辐射"并不对称，不但谱线个数不同，强度也不同．更有趣的是 Yangian 的效应可以通过态矢量 $\{\Psi_{K+1,m}\}$ 与算子 $P_m=(m+K+1)G_-$ 描述"跃迁"，而 $\{\Psi_{K-1,m}\}$ 与 $Q_m=-(m+K)G_-$ 描述"辐射"．它们不同，因而"跃迁"、"辐射"具有不对称，或方向性，这是由李代数态确定的谱线断定是否存在 Yangia 的重要标志．以后我们称其为"方向跃迁"．

6　惰性气体原子的低激发态

作为 Happer 问题的推广，将哈密顿量(9)推广为

$$H=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{S}+\rho\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}\ ,\tag{22}$$

其中 K 与 L 为任意角动量，ρ 为任意参数．当 $L=(0,0,B_0)$ 的经典极限下，它将回到(9)．当 L 为量子算符时，情况要复杂得多．在求解(22)并阐明它的物理意义之前，我们先考虑推广的 Breit-Rabi 模型（自由相对论粒子中轨道-自旋耦合哈密顿量也可包括在内，见[3]），即[6]

$$H_{BR}=-\lambda_1\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{s}_1-\lambda_2\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\ ,\tag{23}$$

其中独立参数为 $\lambda_2/\lambda_1=\beta$，$\boldsymbol{T}$ 为核自旋，$\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 为自旋 1/2 算子．(23)描述低激发态的惰性气体．众所周知惰性气体为满壳层，在填满 np 后（n 为主量子数）并不填 nd（如 $n>2$），而是 $(n+1)S$ 比 nd 能量低，即其低激发态为 $np\to(n+1)S$．当发生这种跃迁时，在 $(n+1)S$ 态出现自旋 1/2 的电子，在满壳层中留下自旋 1/2 的空穴，它们均与核自旋 T 互作用，因而形成形如(23)哈密顿量．β 为唯象参数．现在有三个角动量 T，s_1 与 s_2，并可以严格求解，且哈密顿(23)的本征值，甚至本征函数可以作到与耦合次序无关．由于 T^2 守恒，故有三组独立态矢量，以两个来源不同．$|T\rangle=(\Phi_1/\Phi_2)$ 的组合态：

$$\Psi=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}\ .\tag{24}$$

将 H_{BR} 作用在上得到

$$H_{BR}\Psi=\frac{\lambda_1}{4}(1+\lambda)+\frac{1}{2}\omega\cdot(\cos\varphi\,\sigma_1+\sin\varphi\,\sigma_2)\ ,\tag{25}$$

其中 σ_1 与 σ_2 为泡里矩阵，

$$\lambda=\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2)+\frac{1}{4}[(4I(I+1)+1)\lambda_1^2+4\lambda_2^2-4\lambda_1\lambda_2]^{1/2}\ ,\tag{26}$$

$$\omega^2=(\frac{1}{2}-\lambda)^2+I(I+1)\ ,\tag{27}$$

将(25)对角化，确定出：

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega+1/2-\lambda}. \tag{28}$$

于是形如(23)的哈密顿(它介于 j-j 与 L-S 耦合之间)的谱即可决定出来，与实验的比较见文献[7].

现在考虑向自旋为 1 的推广，即(23)式中 $S=1$.

7 低激发态惰性气体准分子的本征态

考虑首先将惰性气体激发到$(n+1)S$ 态，再加压力，类似$^{87}Rb_2$实验，可以设想此时形成总自旋为 1，空穴自旋亦为 1，但核自旋可为任意(实际上是核壳层为饱和剩余自旋的两倍). 这时可能形成其激发态的准分子. 由于自旋部分与径向部分可以分离变量，所以可以单独考虑自旋部分的哈密顿量对角化问题. 为了更一般的讨论，我们引入哈密顿量

$$H=-\alpha\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}-\beta\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{S},(\lambda=\beta/\alpha). \tag{29}$$

其中 K 代表核自旋，$S^2=S(S+1)$中 $S=1$ 即自旋为 1，而 L 代表另一种自旋自由度，可为任意值. 为寻求(29)的本征值与本征态，我们引入态矢量：

$$\boldsymbol{\Phi}=(\boldsymbol{Y}(u,v)\cdot\boldsymbol{u})Z, \tag{30}$$

其中

$$Y(u,v)=uL+vK+\frac{\mathrm{i}}{2}L\times K, \tag{31}$$

也即是 Yangian 算子，其中参数 u 与 v 将由

$$H\Phi=E\Phi \tag{32}$$

的本征值方程确定. $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$为自旋为 1 的旋量：

$$u_1=\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix},u_2=\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix},u_3=\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}, \tag{33}$$

Z 为 $G^2=G(G+1)(G=K+L)$的本征态. 注意由(29)易知 K 与 L 是守恒的. 引入

$$\Phi_1=(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u})Z,$$
$$\Phi_2=(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{u})Z,$$
$$\Phi_3=\mathrm{i}((\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{K})\cdot\boldsymbol{u})Z. \tag{34}$$

也即引入(31)中分别沿 $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{K}$ 与($\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{K}$)三个独立方向的态矢量(这个形式首先是由 F. Dyson 引入的). 以它们为基，经过计算就可表为矩阵形式

$$H=\begin{vmatrix}\alpha & 0 & -\beta\\ 0 & \beta & \alpha\\ -\mu & \gamma & \alpha+\beta\end{vmatrix}. \tag{35}$$

其中 α, β 为(29)中的参数，且

$$\mu=\alpha(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{K})+\beta K(K+1),$$
$$\gamma=\beta(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{K})+\alpha L(L+1). \tag{36}$$

求 H 本征值，即求 $\det|H-E|=0$ 的解时，在(36)中出现 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{K}$ 项，它与哈密顿量不对易，它也不是守恒量，故须要求它前面系数为零，从而得到

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(1+\lambda),\left(\varepsilon=\frac{E}{\alpha},\lambda=\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{37}$$

从而由本征值方程可解出：

$$\lambda=\frac{L+(1/2)}{K+(1/2)}. \tag{38}$$

取

$$\alpha=K+\frac{1}{2}, \tag{39}$$

则得到

$$E=\frac{1}{2}(L+K+1), \tag{40}$$

它仅当

$$\alpha=K+\frac{1}{2},\beta=L+\frac{1}{2} \tag{41}$$

时成立. 也就是说(29)当参数选为(41)时有严格解. 如果 $L=1$，则 $E=1/2K+1$，亦即除了零点能之外，其能量正比于核的自旋(现在 K 应为惰性气体原子的核剩余自旋的 2 倍).

在设想的低激发惰性气体准分子实验中，唯象参数 $\lambda=\beta/\alpha$ 应当依赖于外加压力 P. 如果达到适当的 P_0，使得

$$\lambda(P_0)=\pm\frac{3}{2K+1} \tag{42}$$

时，便将出现形如(39)的谱线，因而(39)在实验中是可以检验的.

8 *P*波液氦超流转动性质的半唯象描述

形如(29)的哈密顿量也可代表一个 $S=1$ 的相对角动量 $L=1$ 的 P 波"对". 而 K 可以理解为该对的质心的轨道角动量. 如果忽略对间互作用(即很少激发时)，则系统总哈密顿量为

$$H_{\text{total}}=-\sum_{i=1}^{N}(\alpha\boldsymbol{K}_i+\beta\boldsymbol{L}_i)\cdot\boldsymbol{S}_i, \tag{43}$$

其中 $S_i=1$, $L_i=1$. 而 K 为任意角动量，当唯象参数 λ 满足(37)时，总能量

$$E_{\text{total}}\approx\frac{N}{2}(K+2). \tag{44}$$

(44)式的右端实际是转动态的总角动量. 也就是说，此时转动态能量与角动量成正比，而不是 $K(K+1)$. 这个描述粗糙，但与 BEC 凝聚行为的实验大体相符，当然，这个结论也与用李代数处理非线性模型的结论一致[8].

因而描述量子张量空间的 Yangian 可望帮助我们了解更多的细致的量子力学现象，而有些现象以前用李代数是难以理解的.

9 结论

通过以上例子，我们看到量子张量空间中由于两个单个空间的波函数有很多的重叠，会表现出与

单独空间不同的性质. 在探求严格解时会发现它与微扰论有很大不同. 类似描述单个向量空间引入李代数，描述这种能量空间的最简单方式就是将李代数推广为 Yangian (它在向量空间中即还原为李代数). Yangian 的特点是包含李代数生成元的直积并且还包含两个任意参数. 它们在可积格点模型中实际代表不同格点自旋态间相差的相移(亦即在周期边条件时的一维动量). 这种将相移与自旋结合在一起的解正是非线性可积模型的特点. 同时在 Yangian 中只有两个空间的算子直乘，表明使用于多体互作用可以分解为两体互作用时，Yangian 才能适用. Drinfeld 已证明，在杨-Baxter 框架下，多体(多空间直乘)情况均可用 Yangian 生成[2].

以上的讨论实际上是在处理强关联问题. 如果能将上述形式推广到 N 体互作用系统，那么也许会对处理强关联系统有所帮助，当然这是个很难的问题.

最后要指出的是，现实实验已指明了的 Yangian 一些的效应，当然如本文所建议的，还可能有更多的实验去检验 Yangian 的物理效应，与李代数比较，多出来的(张量空间)效应一定是比较小的.

致谢　感谢 F. Dyson 与 W. Happer 的启发性的讨论与鼓励，实际上以上结果是我们合作的结果.

参 考 文 献：

[1] Happer W. Degeneracies of the Hamiltonian $X(K+1/2)S\cdot K\cdot S$[Z]. preprint, Princeton University, November, 2000

[2] Drinfel'd V. Hopf Algebras and the Quantum Yang-Baxter Equation[J]. Sov Math Dokl, 1985, 32: 254—258; Drinfel'd V. A New Realization of Yangian and Quantized Affine Algebras[J]. Sov Math Dokl, 1988, 36: 212—216; Drinfel'd V. Quantum Groups, in PICM, Berkley, 1986, American Mathematical Society, 1987, 798—820. 这些是最早引入 Yangian 的文献.

[3] 葛墨林，薛康. 量子力学中的杨-巴克斯特方程[M]. 上海：上海科技教育出版社，1998；Bai C M, Ge M L, Xue K. Further Understanding of Hydrogen Atom: Yangian approach and physical effect[J]. J Stat Phys, 2001, 102: 545—557; Ge M L, Xue K, Cho Y M. RTT Relations and Realizations of Yangian in Quantum Mechanics[J]. Phys Lett, 1998, A249: 358—362. 从量子力学角度介绍 Yangian 基本实现的内容可参看此类文献.

[4] Erickson C J, Levron D, Happer W, et al. Spin Relaxation Resonances Due to the Spin-axis Interaction in Dense Rubidium and Cesium Vapor[J]. Pyhs Rev Lett, 2000, 85: 4 237—4 240.

[5] Chari V, Pressley A. Yangian and R-matrix[J]. L'Enseignement Mathematique, 1990, 36: 267—302; Chari V, Pressley A. A Guide to Quantum Groups[M]. Cambridge University Press, 1994.

[6] Chen J L, Ge M L, Xue K. Possible Experimental Measure Theory for the XXX-Heisenberg Chain[J]. Phys Rev, 1999, E60: 1 486.

[7] Smirnov B M. Atomic Structure and the Resonant Charge Exchange Process[J]. Physics-Uspekhi, 2001, 44(3): 221—253.

[8] Jackson A D, Kavoulakis G M. Analytical Results for the Interaction Energy of a Trapped, Weakly Interacting Bose-Einstein Condensate[J]. Phys Rev Lett, 2000, 85: 3 854—3 856.

Puzzle Degeneracies for ^{87}Rb$_2$ and Yangian Structures Appearing in Lower Excited States of Rare Gas Atoms*

BAI Cheng-ming, GE Mo-lin

(*Theoretical Physics Division, Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin* 300071, *China*)

Abstract: We show that the degenerate states appearing in the experiment of the condensed vapor of ^{87}Rb$_2$ can be described by Yangian. Furthermore, the model for three angular momentum system is solved through Yangian that can be checked by the experiments for lower excited states of Inert Gas atoms under pressure.

Key words: puzzle degeneracy; Yangian; subrepresentation; lower excited states of rare gas atoms

* **Foundation item**: NSFC (19677104)