$O(N) \supset O(N-1)$ 约化因子*

阮 东[1,2] 孙洪洲[1,2,3]
1（清华大学物理系 北京 100084）
2（兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心 兰州 730000）
3（中国科学院理论物理研究所 北京 100080）

摘 要 利用不可约张量基的概念和不可约张量算符的性质，给出了所有 $O(N) \supset O(N-1)$ 约化因子 $(m_{1N}\ m_{2N} \cdots m_{[N/2]N}) \otimes (10\cdots0)$ 的代数表达式.

关 键 词 $O(N)$ 群 约化因子 不可约张量基方法
分 类 号 O152.5；O152.6

1 引言

正交群在原子分子物理、原子核物理和粒子物理中有着重要的作用. 从物理应用的角度来看，为了构造波函数，计算能级和跃迁几率等物理量，需要知道：荷载正交群不可约表示的完备基矢量、生成元的约化矩阵元和约化因子（约化 Wigner 系数）等.

正交群的数学基础是由 Gel'fand 和 Tsetlin[1]奠定的. 他们分别为酉群 $SU(N)$ 和正交群 $O(N)$ 的不可约表示构造了一组完备的基矢量—— Gel'fand-Tsetlin 基，并在此基矢量下首次给出了 $SU(N)$ 群和 $O(N)$ 群无穷小生成元的矩阵元. 随后，许多人进一步发展了这种方法，但是都没有给出一般正交群相应的约化因子[2]. 实际上，$O(3) \supset O(2)$ 约化因子就是我们熟知的 $O(3)$ 群的 Clebsch-Gordon 系数[3]. 其它一些低秩正交群，如 $O(4)$、$O(5)$ 和 $O(6)$ 的耦合系数（约化因子）也有不少人讨论过[4~8]. 目前，Ališauskas 等[9]利用 $SP_4(SO_5)$ 群的替代技术和 Pan 等[10]给出了一些特殊情形的 $O(N) \supset O(N-1)$ 约化因子的代数表达式，但他们只考虑了 $O(N)$ 群的不超过 2 行的不可约表示.

60年代初期，Biedenharn[11] 与孙洪洲[12]提出了一种计算不可约表示和约化因子的有效方法——不可约张量基方法. 这种方法基于群的不可约张量基的概念，即群 G 的生成元是由其子群 G' 的生成元及 G' 的不可约张量算符构成的. 如果 G' 的不可约表示已知，那么求群 G 的不可约表示就只需要对 G' 的不可约张量算符进行计算. 这将大大减少计算工作量，而且所有的计算只利用其相应李代数的对易关系式. 现在，这种方法已被广泛应用[13~22]. 最近，孙洪洲等[22]利用这种方法得到了 $O(N) \supset O(N-1)$ 约化因子 $(m_{1N}m_{2N}m_{3N}0\cdots0) \otimes (1\ 0\cdots0)$ 的代数表达式.

在本文中，我们将应用不可约张量基方法求出 $O(N) \supset O(N-1)$ 约化因子 $(m_{1N}\ m_{2N} \cdots m_{[N/2]N}) \otimes (10\cdots0)$.

2 $O(N)$ 的不可约张量基

为了利用不可约张量基方法求 $O(N)$ 群的不可约表示和 $O(N) \supset O(N-1)$ 约化因子，首先需要为 $O(N)$ 群构造一个新基——不可约张量基. 利用 $O(N)$ 群生成元的基础矩阵实现 I_{pq}**，$O(N)$ 群的不可约张量基为：

(1) $O(N-1)$ 群的生成元 $X_{p}^{(N-1)}$[$(p =$

* 兰州重离子加速器国家实验室理论中心资助.

$1, 2, \cdots, 1/2(N-1)(N-2)$];

(2) 一个 $O(N-1)$ 群的 1 秩不可约张量算符 $T^{(N-1)}(10\cdot 0)$. 它的 $N-1$ 个分量的具体构造为:

$$T^{(N-1)}(\beta_{\pm 1}) = (-i)^N \sqrt{\frac{1}{2}}\,(I_{N2} \mp iI_{N1}),$$

$$T^{(N-1)}(\beta_L) = (-i)^{N-L+2} I_{NL},$$

$$L = 3, 4, \cdots, N-1,$$

其中 $\beta_i(i=-1, +1, 3, 4, \cdots, N-1)$ 是荷载 $O(N-1)$ 群基础表示的 Gel'fand 标记, 即

$$\beta_{-1} = \begin{array}{llll} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & 0 & & \\ -1 & & & \end{array}, \quad \beta_{+1} = \begin{array}{llll} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & 0 & & \\ 1 & & & \end{array}, \quad \beta_3 = \begin{array}{llll} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & & \end{array}, \tag{1}$$

$$\beta_4 = \begin{array}{llll} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & & \end{array}, \quad \cdots, \quad \beta_{N-1} = \left.\begin{array}{llll} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & & & \end{array}\right\} N-2\text{ 行}.$$

类似地, 我们可以构造正则群链 $O(N) \supset O(N-1) \supset \cdots \supset O(3)$ 中每个子群的不可约张量基.

这样, $O(N)$ 群的生成元满足的对易关系为:

(1) $O(N-1)$ 群的生成元 $X_\gamma^{(N-1)}$ 满足的对易关系.

(2) $O(N-1)$ 群的生成元 $X_\gamma^{(N-1)}$ 与其 1 秩不可约张量算符 $T^{(N-1)}(10\cdot 0)$ 间的对易关系. 按照不可约张量算符的定义, 它们是

$$[X_\gamma^{(N-1)}, T^{(N-1)}(\beta_i)] = \sum_\nu T^{(N-1)}(\beta_\nu)\,[\beta_\nu | X_\gamma^{(N-1)} | \beta_i].$$

对 $O(N)$ 群来说, 其子群 $O(N-1)$ 的基础不可约表示 $[\beta_\nu | X_\gamma^{(N-1)} | \beta_i]$ 是已知的.

(3) 不可约张量算符 $T^{(N-1)}(\beta_i)$ 间的对易关系. 利用其定义, 有

$$[T^{(N-1)}(\beta_{-1}), T^{(N-1)}(\beta_{+1})] = (-1)^N L_0,$$

$$[T^{(N-1)}(\beta_{\pm 1}), T^{(N-1)}(\beta_L)] = (-1)^{N+L+1} T^{(L-1)}(\beta_{\pm 1}),$$

$$[T^{(N-1)}(\beta_k), T^{(N-1)}(\beta_L)] = (-1)^{N-L-1} T^{(L-1)}(\beta_k),$$

$$k < L; \quad k, L = 3, 4, \cdots, N-1.$$

3　O(N) ⊃ O(N−1) 约化因子

实际上, 不可约张量基的结构特点已经表明: 不可约张量基方法是一种递推的方法——从已知的低秩群的不可约表示和约化因子, 可以求出高秩群的不可约表示和约化因子. 具体对 $O(N)$ 群来说, 其子群 $O(3)$ 的不可约表示和 CG 系数是我们所熟知的. 利用

** $I_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$, 其中 E_{ij} 是一个在第 i 行第 j 列的矩阵元为1, 其余均为0的 $N\times N$ 矩阵. 它们满足 $[I_{ij}, I_{kl}]=I_{il}+I_{jk}-I_{ik}-I_{jl}$.

$O(3)$的 CG 系数 $L\otimes 1$，可以首先得到 $O(4)$ 的不可约表示$(v_1\ v_2)$，然后借助 $O(4)$的不可约表示，就可得到 $O(4)\supset O(3)$ 的约化因子 $(v_1\ v_2)\otimes(10)$．把这种方法继续下去，利用数学归纳法就可以证明并得到 $O(N)$的不可约表示 $\Gamma_N=(m_{1N}\ m_{2N}\cdots\ m_{[N/2]N})$ 和 $O(N)\supset O(N-1)$ 约化因子 $(m_{1N}\ m_{2N}\cdots\ m_{[N/2]N})\otimes(1\ 0\ \cdots\ 0)$．为节省篇幅，直接列出结果．

(1)当 $N=2p$ 时，$O(2p)$的不可约表示 $\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right]$ 给出如下：

$$\Gamma'_{2p-1} \qquad \left[\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma'_{2p-1}\end{matrix}\right],$$

$$\Gamma_{2p} \qquad \frac{\prod_{k=1}^{p} l_{k2p}}{\prod_{k=1}^{p-1}\sqrt{l_{k2p-1}(l_{k2p-1}+1)}},$$

$$\Gamma_{2p-1}(+i) \qquad \left\{-\frac{\prod_{k=1}^{p}(l_{k2p}-l_{i2p-1}-1)(l_{k2p}+l_{i2p-1}+1)}{(l_{i2p-1}+1)\ (2l_{i2p-1}+1)\prod_{k\neq i}^{p-1}(l_{k2p-1}-l_{i2p-1})(l_{k2p-1}+l_{i2p-1}+1)}\right\}^{1/2},$$

$$\Gamma_{2p-1}(-i) \qquad \left\{-\frac{\prod_{k=1}^{p}(l_{k2p}-l_{i2p-1})(l_{k2p}+l_{i2p-1})}{(l_{i2p-1})\ (2l_{i2p-1}+1)\prod_{k\neq i}^{p-1}(l_{k2p-1}-l_{i2p-1})(l_{k2p-1}+l_{i2p-1}+1)}\right\}^{1/2},$$

$O(2p)\supset O(2p-1)$ 约化因子 $\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p} & 1\\ \Gamma_{2p-1} & q\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right]$ 给出如下：

$$\Gamma'_{2p} \qquad \left[\begin{matrix}\Gamma_{2p} & 1\\ \Gamma_{2p-1} & 0\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma'_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right],$$

$$\Gamma_{2p}(+i) \qquad \left\{\frac{\prod_{k}^{p-1}(l_{i2p}-l_{k2p-1})(l_{i2p}+l_{k2p-1}+1)}{2\prod_{k\neq i}^{p}(l_{i2p}-l_{k2p})(l_{i2p}+l_{k2p})}\right\}^{1/2},$$

$$\Gamma_{2p}(-i) \qquad \left\{-\frac{\prod_{k}^{p-1}(l_{i2p}-l_{k2p-1}-1)(l_{i2p}+l_{k2p-1})}{2\prod_{k\neq i}^{p}(l_{i2p}-l_{k2p})(l_{i2p}+l_{k2p})}\right\}^{1/2},$$

$$\Gamma'_{2p-1} \qquad \left[\begin{matrix}\Gamma_{2p} & 1\\ \Gamma'_{2p-1} & 1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right],$$

$$\Gamma_{2p-1} \qquad \pm\frac{1}{l_{i2p}}\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p} & 1\\ \Gamma'_{2p-1} & 0\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right].$$

$$\Gamma_{2p-1}(+j) \qquad \frac{1}{\pm l_{i2p}+l_{j2p-1}+1}\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p} & 1\\ \Gamma_{2p-1} & 0\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\|T^{(2p-1)}\left\|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(+j)\end{matrix}\right],$$

$$\Gamma_{2p-1}(-j) \qquad \frac{1}{\pm l_{i2p}-l_{j2p-1}}\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p} & 1\\ \Gamma_{2p-1} & 0\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\|T^{(2p-1)}\left\|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-j)\end{matrix}\right].$$

(2)当 $N=2p+1$时，$O(2p+1)$的不可约表示 $\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\|T^{(2p)}\left\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma'_{2p}\end{matrix}\right]$ 给出如下：

$$\Gamma'_{2p} \qquad \left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\|T^{(2p)}\left\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma'_{2p}\end{matrix}\right],$$

$$\Gamma_{2p}(+j) \qquad \left\{\frac{\prod'_{k=1}(l_{k2p+1}-l_{j2p})(l_{k2p+1}+l_{j2p}+1)}{2\prod'_{k\neq j}(l_{k2p}-l_{j2p})(l_{k2p}+l_{j2p})}\right\}^{1/2},$$

$$\Gamma_{2p}(-j) \qquad \left\{\frac{\prod'_{k=1}(l_{k2p+1}-l_{j2p})(l_{k2p+1}+l_{j2p}+1)}{2\prod'_{k\neq i}(l_{k2p}-l_{j2p})(l_{k2p}+l_{j2p})}\right\}^{1/2};$$

$O(2p+1)\supset O(2p)$ 约化因子 $\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1} & 1\\ \Gamma'_{2p} & q\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}(\pm i)\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right]$ 给出如下：

$$\Gamma'_{2p+1} \qquad \left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1} & 1\\ \Gamma_{2p} & 0\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma'_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right],$$

$$\Gamma_{2p+1} \qquad \left\{\frac{\prod'_{k=1}l^2_{k2p}}{\prod^{p-1}_{i=1}l_{i2p+1}(l_{i2p+1}+1)}\right\}^{1/2},$$

$$\Gamma_{2p+1}(+i) \qquad \left\{\frac{\prod'_{k=1}(l_{i2p+1}-l_{k2p}+1)(l_{i2p+1}+l_{k2p}+1)}{(l_{i2p+1}+1)\,(2l_{i2p+1}+1)\prod'_{k\neq i}(l_{i2p+1}-l_{k2p+1})(l_{i2p+1}+l_{k2p+1}+1)}\right\}^{1/2},$$

$$\Gamma_{2p+1}(-i) \qquad \left\{\frac{\prod'_{k=1}(l_{i2p+1}-l_{k2p})(l_{i2p+1}+l_{k2p})}{(l_{i2p+1})\,(2l_{i2p+1}+1)\prod'_{k\neq i}(l_{i2p+1}-l_{k2p+1})(l_{i2p+1}+l_{k2p+1}+1)}\right\}^{1/2},$$

$$\Gamma'_{2p+1} \qquad \left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1} & 1\\ \Gamma'_{2p}(\pm j) & 1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma'_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right],$$

$$\Gamma'_{2p+1} \qquad \pm\frac{1}{l_{j2p}}\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1} & 1\\ \Gamma_{2p} & 0\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\|T^{(2p)}\left\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(\pm j)\end{matrix}\right],$$

$$\Gamma_{2p+1}(+i) \qquad \frac{1}{l_{i2p+1} \pm l_{j2p} + 1}\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1} & 1\\ \Gamma_{2p} & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}(\pm i)\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(\pm j)\end{matrix}\right],$$

$$\Gamma_{2p+1}(-i) \qquad \frac{1}{-l_{i2p+1} \pm l_{j2p}}\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1} & 1\\ \Gamma_{2p} & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}(-i)\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(\pm j)\end{matrix}\right].$$

我们给出了所有$O(N)$到$O(N-1)$的基本约化因子的表达式. 利用这些表达式可以进一步计算更复杂的约化因子. 同时, 这些基本表达式可以直接应用于原子核结构和原子分子结构的代数模型的研究中.

参 考 文 献

1 Gel'fand I M, Tsetlin M L. Finite Dimensional Representations of Orthogonal Matrices. Dokl Akad Nauk SSSR, 1950, 71: 1 017～1 010

2 阮　东. 群表示论中的不可约张量基方法的研究. 清华大学博士学位论文, 北京, 1997年3月

3 Edmonds A R. Angular Momentum in Quantum Mechanics. New York: Princeton University, 1957

4 Biedenharn L C. Wigner Coefficients for the R_4 Group and Some Applications. J Math Phys, 1961, 2: 433～441

5 Hecht K T. Five-dimensional Quasi-spin —— The n, T Dependence of Shell-model Matrix Elements in the Seniority Scheme. Nucl Phys, 1967, A102: 11～80

6 Han Qizhi, Sun Hongzhou, Wang Jiajun. Coupling Coefficients of Quasispin Group $SO(5)_L$. Commun Theor Phys, 1993, 20: 313～328

7 Van Isacker P. Generalized Coupling Coefficients for $O(6)\supset O(5)$ and $O(5)\supset O(3)$ in Bose-Fermi Symmetries for Odd-odd Nuclei. J Math Phys, 1987, 28: 957～963

8 Han Qizhi, Zhao Engang, Sun Hongzhou. The Isoscalar of $O(6)\times O(6)$. J Phys, 1989, A22: 1 495～1 511

9 Alisauskas S J. Some Coupling and Recoupling Coefficients for Symmetri. Representations of SO_n. J Phys, 1987, A20: 35～44

10 Pan F, Cao Y F. Some Isoscalar Factors for $SO_N\supset SO_{N-1}$ and State Expansion Coefficients for $SO_N\supset SO_{N-1}$ in Terms of $SU_N\supset SU_{N-1}\supset SO_{N-1}$. J Math Phys, 1988, 29: 2 384～2 389

11 Biedenharn L C. On the Representations of the Semisimple Lie Groups. J Math Phys, 1963, 4: 436～445

12 孙洪洲. 对 $SU(3)$ 波函数的讨论. 物理学报, 1964, 20: 483～500

13 孙洪洲. 秩 2 紧致单纯李群的不可约表示. 高能物理与核物理, 1980, 4: 73～94; 137～159; 271～285

14 孙洪洲, 韩其智. 单纯李群的不可约表示. 高能物理与核物理, 1981, 5: 588～599

15 Han Qizhi. The Finite-dimensionl Star and Grade Star Irreducible Representations of $SU(n/1)$. Nuo Cim, 1981, A64: 391～405

16 孙洪洲, 韩其智. 李超代数综述. 物理学进展, 1983, 3: 81～125

17 韩其智, 宋行长, 李根道等. 阶化李代数 $SU(m/n)$ 的不可约表示. 高能物理与核物理, 1981, 5: 546～553

18 Han Qizhi, Sun Hongzhou. Irreducible Representations of Superalgebras $B(1, 1)$ and $B(0, 2)$. Commu Theor Phys, 1983, 2: 1 137～1 144

19 Han Qizhi, Liu F S, Sun Hongzhou. Infinite Dimensional Boson-fermion Representations of Lie Superalgebras $D(m/n)$. Commu Theor Phys, 1984, 3: 529～538

20 Han Qizhi, Sun Hongzhou, Zhang Mei *et al*. The Fork Wavefunction as Classified by the Supergroup Chain $SU(N/M)\supset Osp(N/M)\supset O(N)\times Sp(M)$. J Math Phys, 1985, 26: 1 822～1 827

21 Yu Zurong, Scholten O, Sun Hongzhou. J Math Phys, 1986, 27: 442～448

22 Sun Hongzhou, Ruan Dong. Algebraic Expressions for $O(N)\supset O(N-1)$ Reduction Factor for the Three-rowed Irreducible Representations. J Math Phys, 1998, 39: 630～649

(下转第30页)