等时量子输运理论*

庄鹏飞
(清华大学物理系 北京 100084)

摘 要 在普遍量子情形下，建立了协变 Wigner 函数的能量矩的等时动力论链和链的截断方案，得到了与低阶矩相关的物理密度量的输运方程和约束方程，并且证明高阶矩都能通过低阶矩表示.

关 键 词 输运理论 量子效应 夸克-胶子等离子体
分 类 号 O571.42

1 引言

建立在 Wigner 算符基础上的输运理论被广泛用于讨论超相对论重离子碰撞和夸克-胶子等离子体. Wigner 算符可以在4维和3维动量空间表示，即 $\hat{W}(x,p)$ 和 $\hat{W}(x,\boldsymbol{p})$. 相应地，输运理论有协变[1]和等时[2,3]两种形式. 除了具有明显的 Lorentz 协变性外，协变理论的一个优点，是量子动力论方程可以分解为输运方程和反应离壳效应的约束方程. 等时理论的最大优点，是它能作为初始问题求解，因此，等时理论是联接相对论重离子碰撞实验和夸壳物质理论的桥梁. 至今为止，一些真正的量子问题，例如在外场中的夸克对产生[4]，都是在等时理论的框架内进行讨论的.

可以用平行于协变理论中的方法[2]，通过对等时密度算符 $\hat{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 进行3维 Wigner 变换得到关于等时 Wigner 算符 $\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ 的动力论方程. 但是，容易看出，4维和3维 Wigner 算符是不等价的. 由它们的定义

$$\hat{W}(x,p)=\int d^4y\, e^{ipy}\hat{\Phi}(x,y)\ ,$$
$$\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\int d^3y\, e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}}\hat{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ , \qquad (1)$$

有2个 Wigner 算符之间的关系

$$\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\int\frac{dp_0}{2\pi}\hat{W}(x,p)\ . \qquad (2)$$

由于在量子情形下，能量 p_0是一个自由的变量，3维 Wigner 算符并不包含4维 Wigner 算符的所有信息. 只有协变 Wigner 函数的所有能量矩的集合才完整地体现了系统的量子性质，即

$$\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\{\hat{W}^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\int\frac{dp_0}{2\pi}p_0^n\hat{W}(x,p)\ ,\quad n=0,1,2\cdots\cdots\}\ , \qquad (3)$$

这里，已定义 $\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\equiv\hat{W}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$. 所以，一个完备的等时理论不仅包含零阶能量矩，还应包含所有的高阶矩. 每一个协变的动力论方程对应一个关于能量矩的无穷长的等时动力论链.

2 等时动力链

为了简单起见，先不考虑动力论方程的碰撞项. 在平均场近似下，协变的输运方程和约束方程一般可以写成

$$\hat{G}(x,p)W(x,p)=0\ ,$$
$$\hat{F}(x,p)W(x,p)=0\ , \qquad (4)$$

输运算符 $\hat{G}$ 和约束算符 $\hat{F}$ 是4维时空 X_μ、4维动量 p_μ 以及它们的导数 ∂_x^μ、∂_p^μ的函数. 由于4维动量 p_μ 与场方程中的微分 ∂_μ相对应，场方程最多包含二阶微分这一事实使得算符

* 国家自然科学基金(项目号 19845001)资助.

$\hat{G}$ 和 $\hat{F}$ 最多含有动量的平方项.

将协变 Wigner 函数用一个正交的多项式 $h_j(p_0)$展开.

$$W(x,p) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j(x,p) h_j(p_0) , \quad (5)$$

h_j 满足

$$\int d\mu(p_0) h_i(p_0) h_j(p_0) = \delta_{ij} , \quad (6)$$

$d\mu(p_0)$是多项式 h_j 的一个合适的度规. 等时分量 $\omega_j(x,p)$是协变 Wigner 函数的能量积分.

$$\omega_j(x,p) = \int d\mu(p_0) h_j(p_0) W(x,p) . \quad (7)$$

将展开式(5)和算符 $\hat{G}$、$\hat{F}$ 的双重展开式

$$\hat{G}(x,p) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{s=0}^{\infty} \hat{G}_{ms}(x,p) p_0^m \left(\frac{\partial}{\partial p_0}\right)^s ,$$

$$\hat{F}(x,p) = \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{s=0}^{\infty} \hat{F}_{ms}(x,p) p_0^m \left(\frac{\partial}{\partial p_0}\right)^s , \quad (8)$$

(如上所述，这里 $M \leqslant 1$)代入协变输运方程和约束方程(4)，并且利用边界条件

$$\int d\mu(p_0) \frac{\partial}{\partial p_0}\left(\frac{\partial^s}{\partial p_0^s} (h_i(p_0) p_0^m) \cdot \frac{\partial^j}{\partial p_0^j} W(x,p) \right) = 0 , \quad (9)$$

得到两个关于等时分量 $\omega_j(x,p)$的无穷动力论链：

$$\sum_{j=0}^{i+M} \hat{g}_{ij}(x,p)\, \omega_j(x,p) = 0 ,$$

$$\sum_{j=0}^{i+M+1} \hat{f}_{ij}(x,p)\, \omega_j(x,p) = 0 , \quad (10)$$

其中,

$$\hat{g}_{ij}(x,p) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{s=0}^{i+m} C_{ij}^{ms} \hat{G}_{ms}(x,p) ,$$

$$i = 0,1,2\cdots \quad (11)$$

$$\hat{f}_{ij}(x,p) = \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{s=0}^{i+m} C_{ij}^{ms} \hat{F}_{ms}(x,p) .$$

$$C_{ij}^{ms} = \frac{1}{2}\sqrt{(2i+1)(2j+1)} \int_{-1}^{1} dp_0 h_j(p_0) \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial p_0}\right)^s (h_i(p_0) p_0^m) . \quad (12)$$

为了给出系数 C_{ij}^{ms}的具体形式，我们已经考虑了 Legendre 多项式. 这时，等时分量 $\omega_j(x,p)$是由(3)式定义的能量矩 $W^k(x,p)$的线性组合，且有 $k \leqslant j$. 例如，零阶能量矩 $W(x,p) = \sqrt{2}\,\omega_0(x,p)$.

等时输运链和约束链(10)式完全等价于协变的输运方程和约束方程(4)，所有量子效应都包含在这两个链中.

3　链的截断

(10)式是两个互相耦合的无穷长的动力学链，数学上不可能求解. 用等时输运理论解决实际问题，首先需要对链进行截断. 假设用如下方法来截断两个动力论链：只考虑输运链中的前(I_t+1)个方程和约束链中的前(I_c+1)个方程，这些方程只包含前$(j_{max}+1)$个能量矩. 由(10)式中的求和限制，有

$$I_t + M = j_{max} ,$$
$$I_c + M + 1 = j_{max} . \quad (13)$$

另外，从前(I_t+1)个输运方程和前(I_c+1)个约束方程唯一确定前$(j_{max}+1)$个能量矩的充分必要条件是

$$I_t + 1 + I_c + 1 = j_{max} + 1 . \quad (14)$$

由方程(13)和(14)，可以将截断参数 I_t、I_c和 j_{max}用 M 表示：

$$I_t = M , \quad I_c = M - 1, \quad j_{max} = 2M . \quad (15)$$

这表明，输运链中的前$(M+1)$个方程和约束

链中的前 M 个方程构成一个有限的封闭子集合，唯一地确定了前$(2M+1)$个等时能量矩 $W^i(x,p)$，$i\leqslant 2M+1$.

对于标量场，Klein-Gordon 方程包含二阶微分，动力论方程中的 $M=1$. 因此，前两个输运方程和第1个约束方程构成子集合，唯一给出前3个能量矩的解. 而这3个矩的物理意义分别是系统的电荷密度、电流密度和能量密度，即

$$
\begin{aligned}
&\text{电荷密度} \quad \rho(x,p) = 2eW^1(x,p)\ , \\
&\text{电流密度} \quad j(x,p) = 2epW(x,p)\ , \\
&\text{能量密度} \quad \varepsilon(x,p) = 2W^2(x,p)\ .
\end{aligned} \tag{16}
$$

因此，子集合完全确定了关于系统物理密度量的动力论方程.

对于自旋为1/2的夸克场，Dirac 方程只含一阶微分，动力论方程中的 $M=0$. 因此，子集合只含第1个输运方程，它唯一地确定零阶能量矩. 即等时 Wigner 函数 $W(x,p)$. 在有自旋情形时，任意阶的能量矩都是一个4×4的矩阵，通过自旋分解:

$$
\begin{aligned}
W(x,p) = \frac{1}{4}[&f_0(x,p) + \gamma_5 f_1(x,p) - \\
&i\gamma_0\gamma_5 f_2(x,p) + \gamma_0 f_3(x,p) + \\
&\gamma_5\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{g}_0(x,p) + \gamma_0\boldsymbol{\gamma}\cdot \\
&\boldsymbol{g}_1(x,p) - i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{g}_2(x,p) - \\
&\gamma_5\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{g}_3(x,p)]\ ,
\end{aligned} \tag{17}
$$

可以得到16个输运方程，它们给出16个自旋分量的解. 所有自旋分量都有明确的物理意义. 例如，f_0表示电荷密度，$\boldsymbol{g}_0$表示自旋密度.

可以严格证明[5]，子集合以外的所有输运方程都不是独立的，子集合以外的高阶能量矩由相应的约束方程决定. 于是，以上构造的子集合不仅给出了关于物理密度量的演化方程，还可以用子集合的解来表示所有的高阶能量矩. 至此，等时动力论链的建立和截断完成.

4 讨论

我们提供了一种普遍的方法来从协变理论出发建立完备的等时量子输运理论、关键之处，是对协变方程进行不同阶的能量平均，构造等时动力论链，然后截断链以得到实用的关于物理密度量的演化方程. 值得注意的是，我们提供的截断方案，是找出一个有限的封闭子集合，因此截断之后没有丢掉任何信息.

截断之后得到的子集合在完全量子情形下，仍然是非常难以求解的. 可以用半经典展开[6]系统地考虑量子修正，用阿贝尔优势展开[1]逐级考虑非阿贝尔效应，用 Bjorken 近似[7]考察相对论重离子碰撞中心区的演化. 将以上等时输运理论用于有效的 QCD 模型，可以数值讨论有限温度和有限密度时的夸克囚禁解除相变和手征相变.

参 考 文 献

1 Elze H Th, Heinz U. Transport of Quark-gluon Plasma. Phys Rep, 1989, 183: 81～111

2 Bialynicki-Birula I, Gornicki P, Rafelski J. Equal-time Transport Theory. Phys Rev, 1991, D44: 1 825～1 837

3 Zhuang P, Heinz U. Relativistic Transport Theory for Quantum Electrodynamics. Ann Phys (N Y), 1996, 245: 311～338

4 Kluger Y, Eisenberg M J, Svetitsky B *et al*. Pair Production of Electrodynamics. Phys Rev Lett, 1991, 67: 2 427～2 431

5 Zhuang P, Heinz U. Kinetic Hierarchies for Equal-time Transport Theory. Phys Rev, 1998, D57: 6 525～6 543

6 Vasak D, Gyulassy M, Elze E Th. Relativistic Transport Theory of QED. Ann Phys (N Y), 1987, 173: 462～491

7 Bjorken J D. Hydrodynamics of Relativistic Heavy Ion Collisions. Phy Rev, 1983, D27: 140～157

(下转第53页)

Principal and Experimental Study of Source of Polarized Electrons

Shang Rencheng　Gao Junfang　Xiao Yuan　Pang Wenning　Deng Jingkang
(*Laboratory of Polarized Physics, Department of Physics, Tsinghua University, Beijing* 100084)

Abstract　The getting of polarized electrons was briefly introduced, that is the source of polarized electrons. The measurement of polarization in future, the application of polarized electrons in atomic and molecular physics, condensed physics, biological physics, nuclear and particle physics were discussed.

Key words　polarized electron　polarization　stained GaAs
Classifying number　G34.80

（上接第46页）

Equal-time Quantum Transport Theory

Zhuang Pengfei
(*Department of Physics, Tsinghua University, Beijing* 100084)

Abstract　In general quantum case the equal-time kinetic hierarchies for the energy moments of the covariant Wigner function were established. The transport and constraint equations for the physical densities which are related to the lower-order moments were extracted from the hierarchies, and it is also proved that the higher-order moments can be expressed in terms of these lower-order moments.

Key words　transport theory　quantum effect　quark-gluon plasma
Classifying number　O413