第12卷 第2期
1995年6月

核物理动态
Trends in Nuclear Physics

Vol. 12, No. 2
June, 1995

# 非微扰色动力学的新途径*

杨泽森 周治宁 钟毓澍
(北京大学物理系 北京 100871)

**摘 要** 本文首先对于所谓光前QCD作一概述,然后阐述K. G. Wilson等人最近提出和发展的非微扰QCD理论方案的基本内容.

**关键词** 光前动力学, 光前QCD, 平庸真空, 相似重整化.

## 1 引 言

非微扰QCD研究的进展对于强子物理和核物理的新进展是至关重要的,对于QCD理论的进一步检验也是至关重要的. QCD理论在中低能区的复杂性表现在:(1)流动耦合常数在红外区无止境地增强;(2)存在色禁闭;(3)手征对称性自发破缺;(4)非常复杂的真空. 各种类型的非微扰QCD已经有一定的发展,但困难是巨大的. 格点QCD过分依赖于大型计算机,而且新的物理所需要的新概念和语言,很难依靠这样的计算来形成. QCD求和规则有较大的局限性. 手征微扰论无法重整化.

K. G. Wilsion等人最近提出和发展的理论方案,属于所谓光前QCD的类型,简称LFQCD. 其中,LF表明是light-front形式的动力学,即Dirac最初所说的front-form,后来常常称为光锥动力学. 但是,Wilson的理论方案与以往的光前QCD有实质性的不同. 它包含着完整的重整化方案,能够让夸克和胶子具有非零质量,以抑制流动耦合常数的无止境增长. 并能借助重整化抵消项迫使真空成为平庸的. 于是原来属于真空效应的色禁闭和手征对称性自发破缺,可以借助重整化哈密顿量来研究. 这一理论方案的目标是要做到仿照QED的方式处理QCD束缚态问题,即用非相对论量子力学方法求零级解,再用微扰论处理高阶修正. 以上各项,将在本文中扼要阐述.

## 2 光前动力学(Front Form)

在不考虑引力作用时,时空是平坦的,$\mathscr{L}$在洛伦兹变换下不变. 参考系的洛伦兹变换引起的时空坐标变换是

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + b^{\mu} \tag{1}$$

正常非齐次洛伦兹变换的无穷小形式可写成

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta b^{\mu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu}x^{\nu} \tag{2}$$

令 $\varepsilon^{\mu\nu}=\varepsilon^{\mu}_{\lambda}g^{\lambda\nu}$ 则 $\varepsilon^{\mu\nu}=-\varepsilon^{\nu\mu}$,度规张量为

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

故 $x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta b^{\mu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu}x_{\lambda}$ 洛伦兹变换$(\Lambda,b)$引起态矢量的变换为

$$|\Psi\rangle \rightarrow U(\lambda,b)|\Psi\rangle$$

量子力学要求$U(\lambda,b)$是幺正算符. 因此,对每种力学系统,$(\lambda,b)\rightarrow U(\lambda,b)$给出正常非洛伦兹群在态矢量空间的幺正表示.

在无穷小洛伦兹变换下有

$$U \approx 1 - \mathrm{i}P_{\mu}\delta b^{\mu} - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}M_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu} + \cdots,$$

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} \tag{3}$$

表示的无穷小算符$P_{\mu}$,$M_{\mu\nu}$是作用于态空间的厄米算符. $P_{\mu}$是四动量的协变分量,$P_0$是哈密顿量算符. $M_{12}$、$M_{23}$、$M_{31}$代表总角动量.

$$[P_{\mu},P_{\nu}] \quad = 0 \tag{4}$$

---

* 国家自然科学基金会、国家"八五"计划和国家教委博士点基金资助课题

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \mathrm{i}(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu) \tag{5}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \tag{6}$$

通常形式的动力学(Instant 形式或等时形式)将运动过程描述为系统从一定时刻的状态到另一时刻状态的演变过程. 因此,改变时间的洛伦兹变换包含状态演变的动力学内容是非平庸变换,不改变时间的洛伦兹变换只涉及运动学方面,称为平庸的. 平庸的非齐次洛伦兹变换可表示为

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{\mathrm{R}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$$

其中的 R 代表空间转动. 这个子群表示的无穷小算符是 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$M_{12}$、$M_{23}$和 $M_{31}$,相应的对称性即是 Kinematical 对称性.

光前动力学将运动过程描述为从一定光前时刻 $x^0+x^3$ 的状态到另一光前时刻的状态的演变过程. 因此改变 $x^0+x^3$ 值的洛伦兹变换包含状态演变的动力学内容是平庸变换. *不改变 $x^0+x^3$ 的变换则是平庸的.*

时空点的坐标可用 $x^+$、$x^1$、$x^2$ 和 $x^-$ 表示,下面将用 $\overline{x}^\mu$ 代表光前坐标,其定义是

$$\overline{x}^0 = x^+,\ \overline{x}^1 = x^1,\ \overline{x}^2 = x^2,\ \overline{x}^3 = x^- \tag{7}$$

对任意矢量 $A^\mu$,也定义它的光前分量为

$$\overline{A}^0 = A^+ = A^0 + A^3,\quad \overline{A}^1 = A^1 \tag{8}$$

$$\overline{A}^2 = A^2,\quad \overline{A}^3 = A^- = A^0 - A^3 \tag{9}$$

于是 $\overline{A}^\mu = C^\mu_\nu A^\nu$, $A^\nu = (C^{-1})^\nu_\lambda \overline{A}^\lambda$,即

$$\begin{pmatrix} \overline{A}^0 \\ \overline{A}^1 \\ \overline{A}^2 \\ \overline{A}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A}^0 \\ \overline{A}^1 \\ \overline{A}^2 \\ \overline{A}^3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

用光前分量表示 $A^\mu B_\mu$ 得到

$$\begin{aligned} A^\mu B_\mu &= g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu \\ &= \frac{1}{2}(A^+B^- + A^-B^+) - A^1B^1 - A^2B^2 \\ &= \overline{g}_{\mu\nu}\overline{A}^\mu \overline{B}^\nu = \overline{A}^\mu \overline{B}_\mu = \overline{A}_\mu \overline{B}^\mu \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\overline{g}_{\mu\nu} = (C^{-1})^\lambda_\mu g_{\lambda\rho}(C^{-1})^\rho_\nu = \overline{g}_{\nu\mu} \tag{13}$$

即

$$(\overline{g}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

而

$$\overline{A}_\mu = \overline{g}_{\mu\nu}\overline{A}^\nu = (C^{-1})^\nu_\mu A_\nu \tag{14}$$

或

$$\overline{A}_0 = \frac{1}{2}\overline{A}^3,\qquad \overline{A}_1 = -A^1,$$

$$\overline{A}_2 = -A^2,\qquad \overline{A}_3 = \frac{1}{2}\overline{A}^0$$

对高阶张量也可类似地定义光前分量为

$$\overline{A}^{\mu\nu} = C^\mu_\rho A^{\rho\lambda} C^\nu_\lambda,\quad \overline{A}_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\rho}\overline{A}^{\rho\lambda}\overline{g}_{\lambda\nu}$$

于是

$$\overline{A}_{\mu\nu} = (C_{-1})^\rho_\mu A_{\rho\lambda}(C^{-1})^\lambda_\nu$$

$$\overline{A}^{\mu\nu}\overline{B}_{\mu\nu} = A^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \tag{15}$$

无穷小洛伦兹变换及相应的 $U$ 算符又可写成

$$\overline{x}'^\mu = \overline{x}^\mu + \delta\overline{b}^\mu + \overline{\varepsilon}^{\mu\lambda}\overline{x}_\lambda \tag{16}$$

$$U \approx 1 - \mathrm{i}\overline{P}_\mu\delta\overline{b}^\mu - \mathrm{i}\frac{1}{2}\overline{M}_{\mu\nu}\overline{\varepsilon}^{\mu\nu} + \cdots \tag{17}$$

其中,$\delta\overline{b}^\mu = C^\mu_\nu\delta b^\nu$,$\overline{\varepsilon}^{\mu\nu} = C^\mu_\rho\varepsilon^{\rho\lambda}C^\nu_\lambda$,$\overline{\varepsilon}^{\mu\nu} = -\overline{\varepsilon}^{\nu\mu}$. 因此,在光前形式下,正常非齐次洛伦兹群的无穷小算符是 $\overline{P}_\mu$ 和 $\overline{M}_{\mu\nu}$. 而

$$[\overline{P}_\mu, \overline{P}_\nu] = 0 \tag{18}$$

$$[\overline{M}_{\mu\nu}, \overline{P}_\rho] = \mathrm{i}(\overline{g}_{\nu\rho}\overline{P}_\mu - \overline{g}_{\mu\rho}\overline{P}_\nu) \tag{19}$$

$$[\overline{M}_{\mu\nu}, \overline{M}_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(\overline{g}_{\nu\rho}\overline{M}_{\mu\sigma} - \overline{g}_{\mu\rho}\overline{M}_{\nu\sigma} + \overline{g}_{\mu\sigma}\overline{M}_{\nu\rho} - \overline{g}_{\nu\sigma}\overline{M}_{\mu\rho}) \tag{20}$$

$\overline{P}_0$ 即是光前哈密顿量算符. $\overline{P}_1$、$\overline{P}_2$ 即是 $P_1$、$P_2$,而 $\overline{P}_3$ 则是沿 $\mathbf{x}^-$ 方向(纵向)的动量算符. 平庸变换的生成元是 $\overline{P}_1$、$\overline{P}_2$、$\overline{P}_3$、$\overline{M}_{12}$、$\overline{M}_{23}$及 $\overline{M}_{31}$.

## 3　在光前规范下的光前 QCD

LFQCD 指 QCD 理论的光前描述方式，这种理论特别宜于采用光前规范.

### 3.1　光前拉氏方程及约束条件

QCD 拉氏函数为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f$$

其中，$\psi$ 为夸克场函数，$f$ 为味指标，$A$ 为胶子场函数，$g$ 为耦合常数. 胶子场强张量为

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - gf_{abc}A_b^\mu A_c^\nu$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_{a\mu}T^a$$

这里 $T^a = \frac{\lambda_a}{2}$，$\lambda_a(a = 1,2,3,\cdots,8)$ 是色 $SU_3$ 基础表示的 Gell-mann 矩阵，它们满足

$$[T^a,T^b] = if_{abc}T^c \quad \mathrm{Tr}(T^aT^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

$\mathscr{L}$ 中的 $F_a^{\mu\nu}$、$F_{a\mu\nu}$、$\gamma^\mu$ 及 $D_\mu$ 可直接换成光前分量. 再将 $\bar{\psi}_f$ 写成 $\psi_f^+\gamma^0$，得

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\bar{F}_a^{\mu\nu}\bar{F}_{a\mu\nu} + \sum_f \psi_f^+\gamma^0(i\bar{\gamma}^\mu\bar{D}_\mu - m_f)\psi_f$$

其中

$$\bar{F}_a^{\mu\nu} = C_\rho^\mu F_a^{\rho\lambda}C_\lambda^\nu, \quad \bar{F}_{a\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\rho}\bar{F}_a^{\rho\lambda}\bar{g}_{\lambda\nu},$$

$$\bar{\gamma}^\mu = C_\nu^\mu\gamma^\nu, \quad \bar{D}_\mu = \bar{\partial}_\mu + ig\bar{A}_{a\mu}T^a$$

光前微商 $\bar{\partial}_\mu$ 的各量为

$$\bar{\partial}_0 = \frac{1}{2}\bar{\partial}^3 = \frac{1}{2}\partial_-\ (\text{“时间”微商})$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\partial}_1 &= \partial_1\\ \bar{\partial}_2 &= \partial_2\end{aligned}\right\}(\text{横微商})$$

$$\bar{\partial}_3 = \frac{1}{2}\bar{\partial}^0 = \frac{1}{2}\partial_+\ (\text{纵微商})$$

光前形式的经典拉氏方程可由通常形式的拉氏方程改写而得. 通常形式为

$$\partial_\mu F_a^{\mu\nu} = g\sum_f \bar{\psi}_f\gamma^\nu T^a\psi_f + gf_{abc}A_{b\mu}F_c^{\mu\nu},$$

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_{a\mu}T^a) - m_f]\psi_f = 0$$

光前形式为

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_\mu\bar{F}_a^{\mu\nu} &= g\sum_f \psi_f^+\gamma^0\bar{\gamma}^\nu T^a\psi_f + gf_{abc}\bar{A}_{b\mu}\bar{F}_c^{\mu\nu}\\ &\cdot [i\bar{\gamma}^\mu(\bar{\partial}_\mu + ig\bar{A}_{a\mu}T^a) - m_f]\psi_f = 0\end{aligned}\tag{21}$$

由此直接看出，胶子场的约束条件是

$$\bar{\partial}_\mu\bar{F}_a^{\mu0} = g\sum_f \psi_f^+\gamma^0\gamma^0T^a\psi_f + gf_{abc}\bar{A}_{b\mu}\bar{F}_c^{\mu0}$$

现在夸克场也有约束条件. 用 $\gamma^0$ 乘上面写出的夸克场的拉氏方程，并令

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^+ = \frac{1}{2}(1 + \gamma^0\gamma^3)\tag{22}$$

$$\Lambda_- = \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^- = \frac{1}{2}(1 - \gamma^0\gamma^3)\tag{23}$$

$$\psi_{(f)+} = \Lambda_+\psi_f\tag{24}$$

$$\psi_{(f)-} = \Lambda_-\psi_f\tag{25}$$

得出

$$\begin{aligned}&2(i\bar{\partial}_0 + ig\bar{A}_{a0}T^a)\psi_{(f)+} + i\gamma^0\gamma^1\\ &\cdot(\partial_1 + igA_{a1}T^a)\psi_{(f)-} + i\gamma^0\gamma^2\\ &\cdot(\partial_2 + igA_{a2}T^a)\psi_{(f)-} - m_f\gamma^0\psi_{(f)+} = 0\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&2(i\bar{\partial}_3 + ig\bar{A}_{a3}T^a)\psi_{(f)-} + i\gamma^0\gamma^1\\ &\cdot(\partial_1 + igA_{a1}T^a)\psi_{(f)+} + i\gamma^0\gamma^2\\ &\cdot(\partial_2 + igA_{a2}T^a)\psi_{(f)+} - m_f\gamma^0\psi_{(f)+} = 0\end{aligned}\tag{27}$$

其中，第二方程不含“时间”微商，因此是约束条件. 只有 $\psi_{(f)+}$ 及 $\psi_{(f)+}^+$ 是动力学变量，$\psi_{(f)-}$ 及 $\psi_{(f)-}^+$ 则不是. 这是因采用光前描述造成的.

### 3.2　约束方程在光前规范下的解

用 $\bar{A}_{a\mu}$ 作为胶子场的场函数时，正则动量为

$$\bar{\Pi}_a^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\bar{\partial}_0\bar{A}_{a\mu})} = -\bar{F}_a^{0\mu} = \bar{F}_a^{\mu0}\tag{28}$$

即 $\bar{\Pi}_a^0 = 0$，$\bar{\Pi}_a^k = -\bar{F}_a^{0k}$. 所以 $\bar{A}_{a0}$ 及 $\bar{\Pi}_a^0$ 不是独立的动力学变量.

再由拉氏方程产生的约束条件有

$$\bar{\partial}_3\bar{\Pi}_a^3 + \partial_1\bar{\Pi}_a^1 + \partial_2\bar{\Pi}_a^2 = 2g\sum_f \bar{\psi}_{(f)+}^+T^a\psi_{(f)+} + gf_{abc}\bar{A}_{bk}\bar{\Pi}_c^k,$$

$$\begin{aligned}2(i\bar{\partial}_3 + ig\bar{A}_{a3}T^a)\psi_{(f)-} &= m_f\gamma^0\psi_{(f)+}\\ &= -i\alpha^1(\partial_1 + igA_{a1}T^a)\psi_{(f)+}\\ &\quad - i\alpha^2(\partial_2 + igA_{a2}T^a)\psi_{(f)+}\end{aligned}$$

其中，$\alpha^1 \equiv \gamma^0\gamma^1$，$\alpha^2 \equiv \gamma^0\gamma^2$. 自然的规范条件是

$$\bar{A}_a^0 = 0 \quad \text{即} \quad \bar{A}_{a3} = 0(\text{光前规范})\tag{29}$$

所以 $\bar{A}_{a3}$ 及 $\bar{\Pi}_a^3$ 也不是独立的动力学变量.

在光前规范下，$\bar{\Pi}_a^3$、$\psi_{(f)-}$ 及 $\psi_{(f)-}^+$ 满足的

约束方程为

$$\bar{\partial}_3\bar{\Pi}_a^3 = -\sum_{j=1}^{2}\partial_j\bar{\Pi}_a^j + gf_{abc}\sum_{j=1}^{2}A_{bj}\bar{\Pi}_c^j + 2g\sum_f\psi_{(f)+}^+T^a\psi_{(f)+} \quad (30)$$

$$2\mathrm{i}\bar{\partial}_3\psi_{(f)-} = -\mathrm{i}\sum_{j=1}^{2}\alpha^j(\partial_j + \mathrm{i}gA_{aj}T^a)\psi_{(f)+} + m_f\gamma^0\psi_{(f)+} \quad (31)$$

要由此"解出" $\bar{\Pi}_a^3$ 及 $\psi_{(f)-}$，还必须补入适当的边界条件. 换言之，光前规范条件加上适当的边界条件才能完全消除规范任意性.

在 Wilson 的 LFQCD 中采用的边界条件给出

$$(\bar{\partial}_3)^{-1}f(\bar{x}^0,\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\bar{y}^3\varepsilon(\bar{x}^3-\bar{y}^3)f(\bar{x}^0,\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3)$$

其中

$$\varepsilon(\bar{x}^3-\bar{y}^3) = \begin{cases} 1 & 当 \quad \bar{x}^3 > \bar{y}^3 \\ 0 & 当 \quad \bar{x}^3 = \bar{y}^3 \\ -1 & 当 \quad \bar{x}^3 < \bar{y}^3 \end{cases} \quad (32)$$

也可以写成

$$(\partial^+)^{-1}f(\bar{x}^0,\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\bar{y}^3\varepsilon(\bar{x}^3-\bar{y}^3)f(\bar{x}^0,\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3)$$

### 3.3 LFQCD 的哈密顿量和量子条件

拉氏函数的夸克场部分为

$$\mathscr{L}_\psi = \sum_f \psi_f^+\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^\mu\bar{D}_\mu - m_f)\psi_f = \sum_f \psi_{(f)+}^+\mathrm{i}\bar{\partial}_0\psi_{(f)+} - H_\psi \quad (33)$$

其中，$H$ 为相应的哈密顿量密度(相对于光前三维体元)

$$H_\psi = -\sum_f\psi_f^+\gamma^0\mathrm{i}\gamma^0\mathrm{i}g\bar{A}_{a0}T^a\psi_f - \sum_f\psi_f^+\gamma^0\mathrm{i}\gamma^k\bar{D}_k\psi_f + \sum_f\psi_f^+m_f\gamma^0\psi_f \quad (34)$$

总哈密顿量密度是

$$H = H_\psi + H_A \quad (35)$$

$$H_A = \bar{\Pi}_a^k\bar{\partial}_0\bar{A}_{ak} + \frac{1}{4}\bar{F}_a^{\mu\nu}\bar{F}_{a\mu\nu} \quad (36)$$

化简得

$$H_A = \bar{\partial}_k(\bar{\Pi}_a^k\bar{A}_{a0}) - (\bar{\partial}_k\bar{\Pi}_a^k)\bar{A}_{a0} + \frac{1}{8}\bar{\Pi}_a^3\bar{\Pi}_a^3 + \frac{1}{2}\bar{F}_a^{12}\bar{F}_{12} \quad (37)$$

用规范条件和约束方程可作进一步化简.

夸克场的独立变量的量子条件可像通常一样建立. 可选择 $\gamma^\mu$ 的特别表示，使

$$\gamma^0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 2i & 0 \end{array}\right) \qquad 2i 代表 \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

$$\gamma^3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -2i \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad 0 代表 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^1 = \gamma^1 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \gamma^2 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_+ = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Lambda_- = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

这样，$\psi_{(f)+}$ 及 $\psi_{(f)+}^+$ 只有两个上分量，$\psi_{(f)-}$ 及 $\psi_{(f)+}^-$ 只有两个下分量. 用 $\psi_{(f)+,s}$ 代表 $\psi_{(f)+}$ 的两个上分量 ($s=1,2$)，则量子条件为

$$\delta(\bar{x}^0-\bar{y}^0)[\psi_{(f)+,s}(\bar{x}),\psi_{(f)+,s'}^+(\bar{y})]_+ = \delta_{ss'}\delta(\bar{x}^0-\bar{y}^0)\delta(\bar{x}^1-\bar{y}^1)\delta(\bar{x}^2-\bar{y}^2) \quad (38)$$

$$\delta(\bar{x}^0-\bar{y}^0)[\psi_{(f)+,s}(\bar{x}),\psi_{(f)+,s'}(\bar{y})]_+ = 0 \quad (39)$$

规范场的量子条件可按 Dirac 有约束的量子化方法求出. $\bar{A}_{a1}$、$\bar{A}_{a2}$ 及 $\bar{\Pi}_a^1$、$\bar{\Pi}_a^2$ 之间的对易关系为

$$\delta(\bar{x}^0-\bar{y}^0)[\bar{A}_{aj}(\bar{x}),\bar{\Pi}_b^{j'}(\bar{y})] = \mathrm{i}\delta_{ab}\delta_{jj'}\delta^4(\bar{x}-\bar{y}) \quad (j=1,2) \quad (40)$$

其中

$$\delta^4(\bar{x}-\bar{y}) = \delta(\bar{x}^0-\bar{y}^0)\cdot\delta(\bar{x}^1-\bar{y}^1)\delta(\bar{x}^2-\bar{y}^2)\delta(\bar{x}^3-\bar{y}^3)$$

在光前规范下有

$$\bar{\Pi}_a{}^1 = -\bar{\partial}^0\bar{A}_a^1 = 2\bar{\partial}_3\bar{A}_{a1}$$
$$\bar{\Pi}_a{}^2 = -\bar{\partial}^0\bar{A}_a^2 = 2\bar{\partial}_3\bar{A}_{a2} \quad (41)$$

由前面给出的关于 $\bar{\partial}_3$ 的逆的结果得到

$$\delta(\bar{x}^0-\bar{y}^0)[\bar{A}_{a1}(\bar{x}),\bar{A}_{b1}(\bar{y})] = -\mathrm{i}\delta_{ab}\frac{1}{4}\varepsilon(\bar{x}^3-\bar{y}^3)\delta(\bar{x}^0-\bar{y}^0)\cdot\delta(\bar{x}^1-\bar{y}^1)\delta(\bar{x}^2-\bar{y}^2)$$

$$\delta(\bar{x}^0-\bar{y}^0)[\bar{A}_{a2}(\bar{x}),\bar{A}_{b2}(\bar{y})] = -\mathrm{i}\delta_{ab}\frac{1}{4}\varepsilon(\bar{x}^3-\bar{y}^3)\delta(\bar{x}^0-\bar{y}^0)$$

$$\cdot\delta(\overline{x}^1-\overline{y}^1)\delta(\overline{x}^2-\overline{y}^2)$$

$$\delta(\overline{x}^0-\overline{y}^0)[\overline{A}_{a1}(\overline{x}),\overline{A}_{b2}(\overline{y})]=0 \quad (42)$$

## 4　Wilison 发展的 LFQCD

### 4.1　是新的 LFQCD

如在引言中所说的，在这种 LFQCD 中包含着完整的重整化方案，让夸克和胶子具有非零质量．并且能够借助重整化抵消项迫使真空变成平庸的．色禁闭和手征对称性自发破缺可以用重整哈密顿量来研究．这些将在后面解释．

### 4.2　组元 Cutoff 与平庸真空

等时动力学的能量、动量在向前光锥内或在其上必须满足

$$P_\mu P^\mu\geq 0 \qquad P_0\geq 0$$

而

$$P_\mu P^\mu=P_0^2-(p^1)^2-(p^3)^2\rightarrow P_0^2(p^3)^2$$

故

$$\overline{P}_0\geq 0 \qquad \overline{P}_3\geq 0$$

又由

$$P_\mu P^\mu=\overline{P}_\mu\overline{P}^\mu=4\overline{P}_0\overline{P}^3-(p^1)^2-(p^2)^2$$

得

$$4\overline{P}_0\overline{P}_3=P_\mu P^\mu+(p^1)^2+(p^2)^2$$

当 $P_{横}\rightarrow\infty$ 时，光前能量 $\overline{P}_0\rightarrow\infty$（光前紫外发散），又只要 $P_\mu P^\mu>0$，则当纵动量 $\overline{P}_3\rightarrow 0$ 时，$\overline{P}_0\rightarrow\infty$，这称为光前红外发散．

所谓组元 Cutoff 即是抛弃每个组元的横动量为无穷大或纵动量为零的态．

在组元质量大于零的情况下，抛去组元的纵向动量为零的态（说成是抛去 0-模式），会使真空态不含任何组元（否则 $\overline{P}_3$总是正数，不会是真空态）．换言之，真空变成平庸的．

那么，相应于原来的复杂真空的内容，如何研究？

为了重整化，要引入抵消项．红外发散抵消项中的有限部分将保留在重整化后的哈密顿量中，因此可根据这样的哈密顿量研究真空效应。Wilson 主张，与胶子相联系的红外发散抵消项的有限部分是色禁闭的根源；与夸克相联系的红外发散抵消项的有限部分是手征对称性自发破缺效应的根源．他说，他们理论方案的最为大胆之处是将 0-模式的效应指派给红外发散的抵消项．

### 4.3　特别的光前 Power Counting 规则

由于理论方案破坏了洛伦兹协变性和规范对称性，不能用通常场论那种 Power Counting 规则来判断重整化抵消项的结构．

Wilson 及合作者建立了光前 Power Counting 规则．这比通常复杂得多．例如抵消项对于 $\overline{P}_3$与 $P_{横}$ 的依赖关系需要分别考虑．结果，允许抵消项含有一些特定的函数，而不象通常理论只带待定常数．

正是由于有这些待定函数，能够通过它们的适当选择，以便在重整化过程中恢复被破坏的对称性．

### 4.4　特别的重整化方案

这种新的重整化（称为相似重整化）的基本观念是将裸哈密顿量 $H_B$ 变换为重整化哈密顿量 $H_\sigma$（称为有效哈密顿量）

$$H_\sigma=S_\sigma H_B S_\sigma^+ \quad (S_\sigma^+=S_\sigma^{-1}) \qquad (43)$$

$$S_\sigma=T_{\exp}(\int_\sigma^\infty \mathrm{d}\sigma' T_{\sigma'}) \qquad (44)$$

$\sigma$ 是具有能量量纲的正参数．

重整化的第一个基本要求是：使 $H_\sigma$具有带状对角的性质，而且矩阵元不含发散．带状对角，即是 $H_\sigma$ 在能差大于 $\sigma$ 的任意两个态之间的矩阵元等于 0．所以当 $\sigma$ 足够小时，$H_\sigma$才有用．在实际计算中令 $H_\sigma$ 稍高于强子质量太小也不行，否则有小能量分母．为了 $H_\sigma$ 不含发散，要适当选择 $H_B$ 中的抵消项．$H_B$ 中包含四类项：(1)由正则量子化产生的哈密顿量；(2)外加的夸克、胶子质量项；(3)人工引入的位势（后面说明）；(4)待定的重整化抵消项．

重整化的第二个要求：适当选择抵消项有限部分包含的待定函数，以便恢复被破坏的对称性．

### 4.5　束缚态的计算

根据有效哈密顿量 $H_\sigma$，可将束缚态方程

写成

$$\sum_j H_{\sigma ij}\Psi_{N\sigma j}=\varepsilon_N\Psi_{N\sigma j} \qquad (45)$$

这里的求和号包括对动量的积分，$\varepsilon_N$为光前能量，下标 $N$ 表示第 $N$ 个本征态. 这个本征值问题将用束缚态微扰论求解. 首先要选出好的无微扰 $H_{\sigma 0}$，它不改变组元数目，便于用非微扰论进行求解. 零级解 $\Psi^{(0)}_{N\sigma i}$、$\varepsilon^{(0)}_N$本身要有明确的物理意义. 然后，在此基础上用微扰论处理 $H_\sigma-H_{\sigma 0}$. 现在选择如下的 $H_{\sigma 0}$

$$H_{\sigma 0}=V_{0\sigma}+H_0^B \quad (V_{0\sigma}\text{ 来自 }V_0) \qquad (46)$$

$V_0$是 $H_B$中人工位势的一部分，假定它是根据 CQM（组分夸克模型）的经验选定的. $H_0^B$是 $H_B$ 中的如下部分（按 Wilson 等人的约定，哈密顿量代表 $2\overline{P}_0$）

$$H_0^B=\int dx^- dx^1 dx^2\Big[\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{2}(\partial^i A_a^j)(\partial^i A_a^j)+m_G^2\sum_{i=1}^{2}\xi_f^\dagger\Big(\frac{-\partial_1^2-\partial_2^2+m_f}{i\partial^+}\Big)\xi_f\Big] \qquad (47)$$

这里 $dx^- dx^1 dx^2$ 是光前空间体元，$\xi_f$是 $\psi_{(f)+}$的两个分量，第二项是胶子质量项，最末一项是通过约束方程的解出现的.

下面讨论人工位势问题.

实际上在 $H_B$中引入人工位势时，对它的各个部分都乘了因子 $1-(g/g_s)^2$，$g_s$ 是 $g$ 的物理值. 我们只要求当 $g\to g_s$ 时得出合理的计算结果，所以原则上说，人工位势的引用是技巧问题.

如何运用这种技巧呢？现在不是也无法精确求解 $H_\sigma$ 的本征值方程，而是做束缚态微扰论. 因此必须选取尽可能好的初始 $H_{\sigma 0}$以保证计算合理. 什么是最合适的选择，不能从理论上回答，而且本来就有一定的任意性. 由于 CQM 概括了重要的经验，所以就根据它来选择 $V_0$[$V_0$本身不带因子 $1-(g/g_s)^2$].

$g_s$ 值的量级，是流动耦合常数在流动标度等于 $\Lambda_{QCD}$时的值，但它的精确值以及重整化质量的值，要通过实际计算分析一批基本观察量来决定. 如果试图用前面的 $H_0^B$ 作为 $H_{\sigma 0}$，那么在零级近似下甚至不存在稳定的束缚态，再作微扰也不会有意义.

## 5 结　语

以上阐述了 Wilson 等人的非微扰 QCD 理论方案的概貌. 它本身从概念到方法都还处在发展之中，而且要经过许多赞同者的共同工作，在实际运用中逐步完善.

但需要强调的是，这个理论方案的提出，以及到目前已经作出的工作，确是代表非微扰 QCD 的一个重要进展. 特别是它第一次使色禁闭、手征对称性自发破缺成为便于直接进行研究的领域，并且能够用 QED 的方式处理强子束缚态.

## 参 考 文 献


1 Wilson K G, et al. Phys. Rev., 1993, D48: 5863

2 Wilson K. G., et al. Phys. Rev., 1993, D49: 6720

3 Dirac P A M. Rev. Mod. Phys., 1949, 21: 392


# New Approach to Nonperturbative QCD


Yang Zesen　Zhou Zhining　Zhong Yushu

(*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871)



**Abstract** We explain the ideas of the light - front QCD and describe an outline of Wilson's approach to nonperturbative QCD.



**Key Words** light front dynamics, light front QCD, trivial vacuum, similarity renomalization.