

核模型中量子混沌的若干探索

傅德基 刘桂民 朱志远 徐躬耦*

(中国科学院上海原子核研究所 上海 201800)

摘要 本文叙述了高斯正交系综基础和量子混沌系统渐近行为方面的研究进展. 指出, 通过脱耦变换, 采用等效哈密顿量的分析是关键, 足以说明统计描述得以成立的基本方法. 继而用统计分析可以定量地得出混沌系统一些渐近行为的性质.

关键词 高斯正交系综, 量子混沌渐近行为.

尽管量子混沌存在一些基本疑难得不到学者们的共识, 但近年来作为经典混沌的对应方面的量子表述或者量子不可积性的研究还是取得了进展. 实验核谱数据及核理论模型提供的计算数据非常丰富, 因此作为索寻或验证量子混沌的工作判据、表征方式、可积性破坏机制及联系应用等, 都是理想的领域.

本文就上海原子核所与南京大学合作探索有关(1)量子混沌的力学机制(与具体系统有关); (2)混沌的统计行为和渐近行为(不依赖于具体系统)两类工作作一简介.

1 角动量投影形变壳模型的混沌研究

该模型的哈密顿量包含通常的单极及四极对力, 四极相互作用项目. 调节四极作用强度, 经过自洽计算获得形变参量. 通过角动量投影方法由形变场下准粒子(BCS)态获得总自旋宇称确定的能态. 该模型描述原子核低能谱直至高自旋态区都很成功; 并能提供同一自旋宇称数百条之多的能级, 因此用于研究高于转晕线能区的核态性质较合适.

研究力学机制, 包含研究什么样的作用下以及什么样的内禀激发条件下, 才产生高自旋态中的混沌运动. 通过计算邻近能级间隔涨落分布曲线 $P(s)$, 我们的初步结论是: 该模型仅就其包含的各项作用来说, 变动其强度不足以改变 $P(s)$ 的类型. (注: 可积情况下,

$P(s)$ 类泊松分布; 不可积情况下, $P(s)$ 类维格纳分布. 四准粒子态成份增多, 增大了量子数 K (内禀轴上角动量投影) 混杂范围, 使 $P(s)$ 趋向类维格纳型. 该模型所预言的能谱, 整体地说是可积或近可积的; 但其分能区段的逐段分析, 即局部地说, 可以有维格纳分布的 $P(s)$. 最近得知, 冯达璇等人也采用该模型具体分析了高自旋区核谱统计性质, 他们得出混沌程度依赖于能区的划分、激发能高低、自旋值, 并随后两因素增高而增大的结论.

目前大家都采用能级间隔涨落统计分析, 即 $P(s)$ 的计算, 或类似的刚度 Δ_3 计算作为工作判据, 它的成立牵涉到一系列待阐明的基本问题. 我们在与此有关的方面作了以下工作.

2 量子混沌的统计行为和渐近行为

2.1 高斯正交系综(GOE)的理论基础

众所周知, GOE 可以直接推导出对应能谱最邻近间隔涨落分布 $P(s)$ 满足维格纳分布, 且其对应的本征系数平方满足自由度 $\gamma=1$ 的 χ^2 分布. 这是无规矩阵理论的结果. 而无规矩阵的矩阵元是随机数, 从一个有确定意义的哈密顿量出发, 如何达到这一要求是有条件的, 这正是必须认真分析的问题.

设哈密顿量表示为 $H(\lambda) = H(0) + \lambda V$; $H(0)$ 及 V 并不对易 $[H(0), V] \neq 0$; λ 是扰动

常数,又令其本征解为: $H(0)|\varphi_m^0\rangle = E_m^0|\varphi_m^0\rangle$;
 $H(\lambda)|\varphi_i(\lambda)\rangle = E_i(\lambda)|\varphi_i(\lambda)\rangle$. 则 $H(\lambda)$ 的本征
 解问题可表示为:

$$\langle\varphi_i(\lambda)|H(\lambda)|\varphi_j(\lambda)\rangle = \sum_m \langle\varphi_i^0|U^+(\lambda,0)|\varphi_m^0\rangle \cdot \langle\varphi_m^0|H(\lambda)|\varphi_n^0\rangle \langle\varphi_n^0|U(\lambda,0)|\varphi_j^0\rangle = E_i(\lambda)\delta_{ij} \quad (1)$$

其中, $\langle\varphi_n^0|U(\lambda,0)|\varphi_j^0\rangle = \langle\varphi_n^0|\varphi_j(\lambda)\rangle$ 就是本征
 系数.

对于本征系数矩阵的分析,可以有以下
 两种情况:

第一, $\langle\varphi_n^0|U(\lambda,0)|\varphi_j^0\rangle$ 可能还未在整个
 范围内(通常 \sum_n 求和项数截断到 N 项, N 是
 足够大的整数)达到如此复杂的程度,使其表
 现为随机分布,则哈密顿量矩阵及相应 $E_i(\lambda)$
 至多达到局部范围内的极端复杂性.

第二,即使 $\langle\varphi_n^0|U(\lambda,0)|\varphi_j^0\rangle$ 已达到整个
 范围内的极端复杂性,同时也标志着 $\langle\varphi_m^0|$
 $H(\lambda)|\varphi_n^0\rangle$ 和 $E_i(\lambda)$ 的相应的极端复杂性,但
 $E_i(\lambda)$ 的这种极端复杂性只意味着 $E_i(\lambda)$ 对于
 一定范围内的平均值的涨落的随机性. 相应
 范围内的等效哈密顿量矩阵的极端复杂性也
 只意味着对其平均值的涨落的随机性.

为了考察具体情况,可以通过如下步骤,
 由相应于某一范围的等效哈密顿量来进行.
 这里讲的某一范围,可以是某一能区,也就是
 (1)式中 $N \times N$ 矩阵内的一个 $\Delta N \times \Delta N$ 维数
 的子矩阵.

为了给出相应于某一范围(以 $[\mu]$ 表示其
 指标集合)的等效哈密顿量,需先考虑脱耦合
 变换 $U_c(\lambda,0)$,使得:

$$\begin{cases} U(\lambda,0) = U_l(\lambda)U_c(\lambda,0) \\ U_l(\lambda) \text{ 与 } U_c(\lambda,0) \text{ 彼此独立} \\ |\eta_i(\lambda)\rangle = U_c(\lambda,0)|\varphi_i^0\rangle \\ \text{处在}\{|\varphi_i(\lambda)\rangle, i \in [\mu]\} \text{子空间内} \end{cases} \quad (2)$$

因而, $\langle\eta_i(\lambda)|U(\lambda,0)|\varphi_j^0\rangle = \langle\eta_i(\lambda)|U_l(\lambda)$
 $|\eta_j(\lambda)\rangle, i, j \in [\mu]$ 成为方块矩阵. $\{|\eta_i(\lambda)\rangle, i$
 $\in [\mu]\}$ 集合是最接近 $\{|\varphi_i^0\rangle, i \in [\mu]\}$ 也是最远
 离 $\{|\varphi_i(\lambda)\rangle, i \in [\mu]\}$ 的基矢系. 因为,当 $i, j \in$

$[\mu]$ 时,

$$\langle\varphi_i(\lambda)|H(\lambda)|\varphi_j(\lambda)\rangle = \sum_{ks} \langle\eta_i(\lambda)|U_l(\lambda)|\eta_k(\lambda)\rangle \langle\eta_k(\lambda)|H(\lambda)|\eta_s(\lambda)\rangle \langle\eta_s(\lambda)|U_l(\lambda)|\eta_j(\lambda)\rangle \quad (3)$$

其中 $\langle\eta_k(\lambda)|H(\lambda)|\eta_s(\lambda)\rangle$ 由方块变换矩阵
 $\langle\eta_i(\lambda)|U_l(\lambda)|\eta_j(\lambda)\rangle$ 对角化,故 $\langle\eta_k(\lambda)|H(\lambda)$
 $|\eta_s(\lambda)\rangle$ 也是方块矩阵,而等效哈密顿量矩阵
 为,

$$\langle\varphi_k^0|H_{\text{eff},\mu}|\varphi_s^0\rangle = \langle\eta_k(\lambda)|H(\lambda)|\eta_s(\lambda)\rangle = \langle\varphi_k^0|U_c^+(\lambda,0)H(\lambda)U_c(\lambda,0)|\varphi_s^0\rangle \quad (4)$$

当消去各个区域 $[\mu]$ 中的平均性质((4)式中
 仅表示某一 $[\mu]$ 中的 $k, s \in [\mu]$)的差异(即称
 为 unfolding 的处理)之后,所得的 $\langle\varphi_k^0|\bar{H}_{\text{eff},\mu}$
 $|\varphi_s^0\rangle$ 成了随机矩阵. 这样的随机矩阵的集合,
 不管来自同一系统或不同系统,构成随机矩
 阵(无规矩阵)理论中的无规矩阵系综.

如把同一系统的经过 unfolding 的等效
 哈密顿矩阵放在一起考虑,不同区域的
 $\langle\eta_k(\lambda)|U_l(\lambda)|\eta_s(\lambda)\rangle$,可以有三种情形:(1)全
 部符合随机要求, $P(s)$ 为维格纳分布;(2)部
 分符合随机要求, $P(s)$ 为居间分布;(3)全不
 符合随机要求, $P(s)$ 为泊松分布.

相应(1)的情形,其本征系数平方满足 ν
 $= 1$ 的 χ^2 分布,且 $\langle\eta_k(\lambda)|H(\lambda)|\eta_s(\lambda)\rangle$ 矩阵元
 或者说(4)式相应的等效哈密顿量矩阵元具
 有高斯分布,确切地说是方差颇宽的正态分
 布. 这一点均由我们的具体计算工作证实.

值得强调的是,(1)情形还要求 $N \geq M \gg$
 $\Delta N \gg 1$,这里 M 是分布度,其数值可由信息
 熵 S 通过 $M = \exp(S)$ 求出. 因此是有条件的.

2.2 混沌系统的一些渐近行为

2.2.1 可观测物理量 F 各态历经性质问题

前段(1)式中, $H(0)$ 常被认定为可积的
 部份,与 $H(0)$ 对易的一组完备算符集 CSCO
 确定量子数,而 F 应是 CSCO 的函数. 于是观
 测结果可表示为

$$\langle\bar{n}(t)|F|\bar{n}(t)\rangle = \sum_m F(\underline{m}) |\langle\bar{m}|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\bar{n}\rangle|^2 = \sum_m F(\underline{m}) \left| \sum_k \langle\bar{m}|\psi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} \langle\psi_k|\bar{n}\rangle \right|^2 \quad (5)$$

其中, $\underline{n}, \underline{m}$ 皆表示一组量子数标号, 记为矢量形式, E_k 及 $|\psi_k\rangle$ 是 H 的本征解. 对时间平均之后, 可得

$$\overline{\langle \underline{n}(t) | F | \underline{n}(t) \rangle} = \sum_{\underline{m}} \sum_k F(\underline{m}) |\langle \underline{m} | \psi_k \rangle|^2 \cdot |\langle \psi_k | \underline{m} \rangle|^2 \quad (6)$$

达到混沌时 $|\langle \underline{m} | \psi_k \rangle|^2 \approx \frac{1}{M}$, 与 k, \underline{m} 基本无关, 仅有微小涨落, 所以

$$\overline{\langle \underline{n}(t) | F | \underline{n}(t) \rangle} \approx \frac{1}{M} \sum_{\underline{m}} \sum_k F(\underline{m}) |\langle \psi_k | \underline{m} \rangle|^2 = \frac{1}{M} \sum_{\underline{m}} F(\underline{m}) \quad (7)$$

而与初始条件基本上无关, 仅在系综平均值附近有微小涨落. 这种各态历经性质的基础是: “长时间平均值仅与 $\langle \underline{m} | \psi_k \rangle$ 有关, 在混沌系统 $\{\langle \underline{m} | \psi_k \rangle\}$ 为随机变量”. 由此可见, 不仅 F 的平均值如此, 其推论是, 其它的渐近行为也有类似性质.

2.2.2 能谱的自关联函数性质

H 不显含时间 t , 则 $t=0$ 时刻的某一状态 $|n\rangle = \sum_k \langle \psi_k | n \rangle |\psi_k\rangle$, 按 H 本征态 $|\psi_k\rangle$ 展开, 可定义自关联几率或生还几率为,

$$\begin{aligned} P_{nn}(t) &= |\langle \underline{n}(t) | \underline{n} \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_k \langle \underline{n} | \psi_k \rangle e^{-iE_k t/\hbar} \langle \psi_k | \underline{n} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_k |\langle \underline{n} | \psi_k \rangle|^4 + 2 \sum_k \sum_{l(\neq k)} |\langle \underline{n} | \psi_k \rangle|^2 \cdot |\langle \underline{n} | \psi_l \rangle|^2 \cos \frac{i}{\hbar} (E_k - E_l) t \end{aligned} \quad (8)$$

经过对时间平均后 $\overline{P_{nn}(t)} = \sum_k |\langle \underline{n} | \psi_k \rangle|^4$. 对于混沌系统, 这应是与初始条件基本无关的仅有微小涨落的量. 我们的数值计算表明, 当受扰参量 λ 增大, 系统逐渐趋于混沌时, 自关联几率的确符合这种性质, 见图 1.

2.2.3 $\langle \underline{m} | \psi_k(\lambda) \rangle$ 随机性质的进一步检验

$\langle \underline{m} | \psi_k(\lambda) \rangle$ 的随机性是上面讨论的关键. 按统计理论, 对于随机量应有

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{\underline{m}} |\langle \underline{m} | \psi_k(\lambda) \rangle|^4 &= \int_0^\infty y^2 P(y) d\mu(y) \\ &= \frac{3}{M} \end{aligned} \quad (9)$$

数值计算结果表明, 随 λ 增大, 的确逐渐趋于此理论值, 见图 1. (M 即牵涉能级条数).

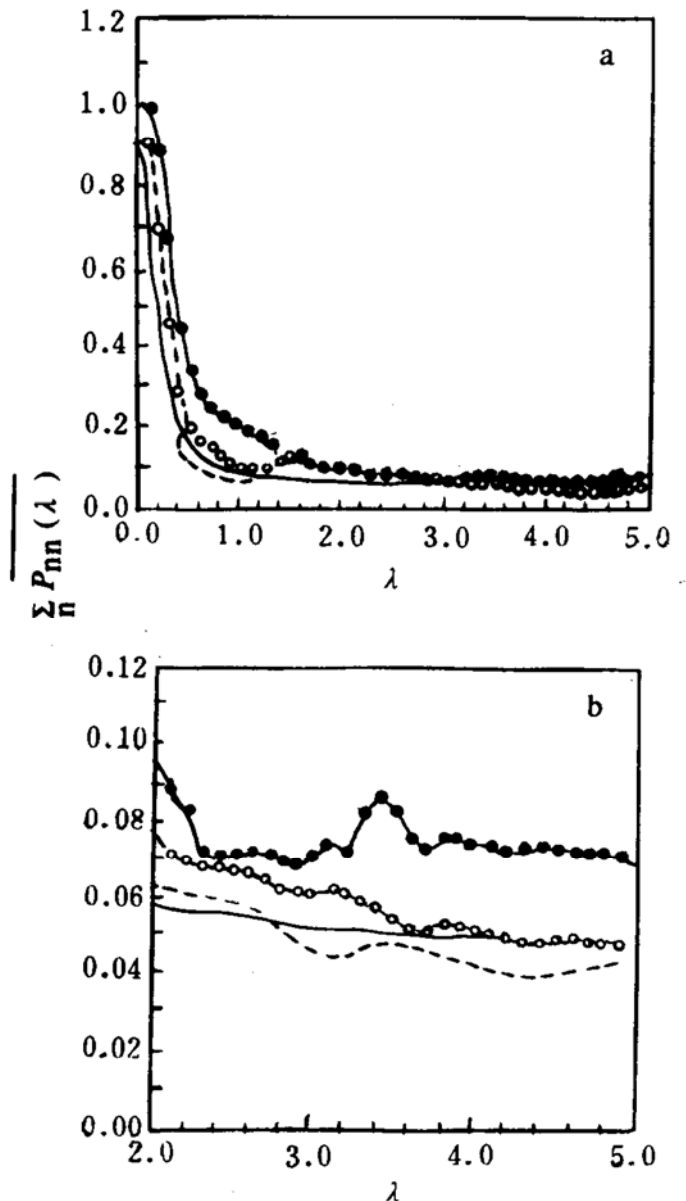


图 1 a. 以 Lipkin 三能级模型计算 $\overline{\sum_n P_{nn}(t)}$ 随受扰参量 λ 的变化. 实践表示 $M=66$ 条能级平均值, 虚线为去除低能级及极高能级相应情况, 圈实践代表低能级与高能级情况. b. a 的部分放大图

还应指出, 在 $(E_k - E_l)t/\hbar$ 是很小数值时, 当系统趋于混沌, $\overline{\sum_n P_{nn}(t)}$ 会有一个低于时间平均值的凹下区域出现, 称为关联空洞. 其根源亦来自能级的排斥性(非简并性).

Quantum Manifestation of Some Chaotic Behavior in Nuclear Model

Fu Deji Liu Guimin Zhu Zhiyuan Xu Gongou

(Shanghai Institute of Nuclear Research, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract The fundamental aspects of Gaussian orthogonal ensemble (GOE) level statistics and the asymptotic behavior of time dependent quantum chaotic system are described. It is shown that performing a decoupled transformation and taking an effective hamiltonian are the key points to elucidate the foundation of statistic description. The asymptotic behavior of quantum chaotic system can be described quantitatively by the statistical well.

Key Words GOE, asymptotic behavior of quantum chaos.

(上接 58 页)

小型化,减少和调整了一些部件,既缩小占地面积,又有利于系统的操作运行.

4 进一步的改进

第二台加速器已在江苏省溧阳电缆厂完

成安装调试工作,性能已达到设计指标.同时,还为其它用户制造这种加速器.此外,将进一步完善和改进这种加速器.束流扫描频率将由目前的 50Hz 提高到 100Hz,束流强度 20mA 将逐步提高到 30mA 以上.这些改进将可大大提高辐照加工效率.

Progress of 3 MV 20 mA Dynamitron Project

Li Minxi Sha Zhenyuan Lai Weiquan Li Yeye

(Shanghai Institute of Nuclear Research, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract Dynamitrons provide high energy electron beams for industrial applications. SINR succeeded in developing a 3MV, 20mA dynamitron, which has been installed in several cable factories in China. The paper describes in brief its principles of acceleration, specifications of the system, and the technical approaches in constructing the machine. Efforts are being made to upgrade the module.

Key Words Dynamitron, radiation—processing, cable industry.