混沌运动与原子核性质的联系

李君清　　　　朱介鼎

（中国科学院近代物理研究所）　　（兰州大学现代物理系）

近来，非线性骚乱或混沌现象的研究，吸引了众多物理工作者的注意力。混沌现象不仅仅出现在经典物理中，它涉及的领域很广，包括流体力学、化学、电子线路……等众多领域都出现了现象各异的混沌现象，它们属于非线性动力学理论的研究范畴。对于原子核，除了核反应统计理论及无规矩阵理论外，还没有把它与混沌运动相联系。仅仅最近几年，核物理学家们才渐渐地领悟到：对于规则运动到混沌运动的研究是与核物理问题的研究有关的[1]。

一、原子核的静态性质与混沌运动的联系

在"对量子混沌系统的一般认识"[2]一文的第三个问题中，我们讨论了具有不同形状边界的二维弹子球，其在边界上的弹性散射为[3]：具有圆形边界的弹子球的经典运动是规则运动，而具有Sinai形的和运动场形边界的弹子球经典运动则是混沌的。作为量子力学解薛定谔方程时，具有圆形边界的能级最相邻间隔的分布呈泊松涨落，而另外两种边界的解，其能级最相邻间隔分布是GOE（高斯正交系综）涨落。还有一些其它例子都表明，与经典规则运动相对应的量子力学问题的能级最相邻间隔分布具有泊松分布，而与经典混沌运动相对应的量子力学问题其能级最相邻间隔分布服从GOE涨落。从而自然地，把能级间隔分布具有GOE特征的系统我们便认为是量子混沌系统。原子核物理中研究核结构时，我们引用了平均场近似，每个核子都是近似独立地在一个共同势阱中运动，这个势阱对于轻核类似于一个非谐振子，对于重核则类似于一个空腔。可以即刻想到：原子核的形状对其中核子的运动形态至关重要。

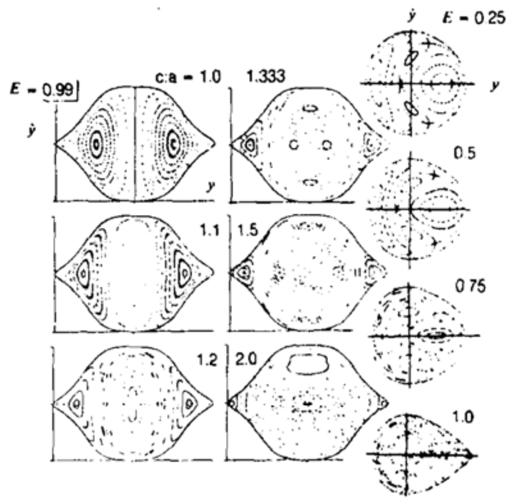

图1　Henon－Heiles问题在能量为逃逸能量的25－100%时的Poincare截面（右图）。粒子在类似轻核系统的势中运动，其长短轴之比从1增加到2时，粒子在势场中的能量为逃逸能量的99%时的Poincare截面（左图）

图1的左边给出了在椭圆核势中运动的粒子在相空间内的轨道，右边是在非谐势 $V=\frac{1}{2}r^2-br^3\cos3\theta$（称为Henon－Heiles问题）中运动的粒子在相空间内的轨道。在这两种情况下，都有一个有限深度的二维势阱，可以用两维笛卡尔坐标x、y的简单函数来描述。在核的情况，势阱是Woods－Saxon势。由上所述，如果势阱是圆的，问题是可积的，但如果平均场之外又有了剩余相互作用，

原子核变形，核子的运动成为不可积的、混沌的。对 Henon－Heiles 势也是这样，当粒子的能量从一个很小的值上升到逃逸能量时，可积性就丢失了。图 1 中所示的是通过整个相空间的 Poincare 截面，即截面是取在固定的 x 的 $y-\dot{y}$ 截面（$\dot{x}$ 的值遵从能量守恒）。一个给定初始条件的粒子轨道与这个平面连续相交形成了一系列的点，如果在相空间的运动是在 Poincare 旋转曲面上，那么这些点在和 Poincare 截面相交形成一些封闭的曲线，如果运动是混沌的，则运动轨道与截面相交形成一些不规则的点，称为 Boltzmann 雾。图 1（左图）表示出在核的情况下由于核的变形的增加，粒子的运动怎样由规则向混沌运动跃迁，右图表明了所研究的 Henon－Heiles 问题的相同的序列。我们可以看到，原子核问题确实显示了它与本来可以认为是相互独立的非线性 Henon－Heiles 问题之间存在着相似性。

我们已经知道，球形核存在着很强的壳效应。随着剩余相互作用的出现，原子核发生形变，能级的某些简并解除，形变越大，能级越趋向于平均分布，壳效应渐不明显。变形原子核的壳效应与核中核子运动从规则向混沌跃迁的过程肯定是有关系的。但这种关系我们暂时还不能清楚地认识它。原子核中的什么性质与核中核子的运动从规则到混沌的跃迁有关系呢？对核的静态性质，我们可以从上述讨论中得出以下定性的认识：

（1）当原子核中核子运动是可积的，可以在核结构理论中看到很强的壳效应。

（2）当核内核子的运动是混沌的，则光滑的统计的托马斯－费米小滴模型将是个好的近似。因为在这种情况下，相空间被 Boltzmann 雾非常均匀地填充着。

我们一向用宏观－微观方法来计算原子核的基态能量，特别是用 Strutinsky 的壳修正方法。而这个方法是人为地将两种极端的情况——可积的和混沌系统的——硬加在一起而得到的。对其中间机制的适当理解仍然是不够的。当核子的运动偏离可积情况时，壳效应是怎样消失的呢？或者说核子运动开始靠近可积情况时，壳效应是怎样出现的呢？这个问题还有待于回答。

实际上，即使对一个经典系统，对很简单的图形如运动场形，从规则到混沌的跃迁也呈现了非常复杂的性质。说明一个一般的可积系统在非可积扰动下如何以一定的趋势失去它的可积行为，是用著名的 Kolmogorov－Armold－M'oser（KAM）定理在解析动力学中描述的。由 KAM 定理可知，在三维空间的旋面起着一个障碍物的作用，它阻止混沌的 Boltzmann 雾的扩散，也就是阻止混沌相空间的一个区域向另一个区域扩展。KAM 旋面的这种阻止作用可以在核物理中找到对应关系。核的独立粒子模型的适用性，可能不仅由于抑制核子之间两体关联的泡里原理的缘故，也可能还由于 KAM 定理的作用，尽管剩余核子－核子相互作用存在，KAM 定理帮助了这类可积系统独立粒子性质的存在。更一般地说，在费米液体理论中准粒子方法的使用就可能与 KAM 旋面的阻碍作用有关。我们可能得因此感谢 KAM 定理，由此才使得 Strutinsky 的核的壳修正方法得以应用。但当原子核的形状变化时，核系统究竟怎样偏离可积，或当核温度增加时泡里的阻塞效应不大能抑制剩余相互作用导致的非可积性时壳效应是怎样被洗掉的，这可能与规则到混沌的跃迁有关。

如果由于势场形状的改变使得势场中的非相互作用粒子失去了所有的可积性，由 Boltzmann 雾占据。可用现今发展较为成熟的无规矩阵理论来研究本征值在这个势场中的分布。Weye－Balian－Bloch－Baltes 公式可计算平均能级密度，无规矩阵理论则提供了围绕此平均值的涨落的信息。假如对所有的涨落本征值求和，再减去光滑的平均值，所剩的偏差将会多大呢？上述两种理论提供了得到关于这个偏差的均方根公式的可能性。如果能得到这个公式，那将是对球形核及变

形核的质量的宏观、微观理论的一个非常有价值的补充。因为它能够说明，确定液滴或托马斯－费米类型近似精度的不可约极限。

二、混沌运动与原子核动力学性质的联系

由近似独立的粒子组成的理想系统在一个势阱中运动，当势阱随时间变化时，例如形状随时间变化时，粒子的运动将怎样响应这种变化呢？这个问题通常被认为是一个抽象的动力学问题，对经典问题比对量子力学问题了解得更少。在我们核物理的特殊范围内，已经积累了大量宝贵经验，但问题是以前并没有领悟到这个问题关系到核子运动从规则到混沌的跃迁。原子核动力学的有关这个问题的研究所总结的经验似乎可总结如下：

(1)当核内核子的运动是可积的，原子核对形状的响应类似于弹性固体材料对形变的响应。

(2)当核内核子的运动是混沌的，响应类似于非常粘滞的流体的响应，具有特定的粘滞性。

(3)中间抑制：呈现弹性可塑性。

多年前，Hill 和 Wheeler[2] 还有 Sussmann[3] 就定性地做过一些工作，他们观察到可积系统的能谱和 Hill－Wheeler 盒子或其它实际的形状，与椭球空腔的能谱定性地相似。如在这样的空腔里有 N 个粒子，并以保持粒子的运动积分不变的方式来改变一个空腔的形状，系统的能谱将是一个似抛物线形的曲线〔参见文献 1〕。在空腔是方盒的情况下，这相当于以体积守恒的方式沿一个轴拉伸每个波函数。则可立即证明以下定理存在：一个具有任意数目的独立的量子化粒子的系统，在任意形式的势场中运动，其波函数以体积守恒的方式(或四极方式)伸长时，系统在接近平衡组态下以两倍于其动能的刚度响应而伸长。因此，如果我们把动能 E 的增加写成：

$$\Delta E = \frac{1}{2} K\alpha^2$$

α 表示被伸长的轴的维度的相对增长，刚度由 2E 给出。在 A 个粒子的费米气体的情况下，费米能为 $\frac{1}{2}mv^2$，每个粒子具有费米能的 3/5，则

$$K = \alpha\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{mV^2}{2}\right)A = \left(\frac{3}{5}\right)MV^2$$

M 是系统的总质量，等于 mA。因此刚度正比于总质量或总粒子数。因此，显示了大块物质的性质，就像是固体的刚度。另外，质量为 M 半径为 R 的球相对于体积守恒的四极伸长的惯性阻滞为：

$$M_{eff} = \left(\frac{3}{10}\right)MR^2$$

则相对于巨四极共振的频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M_{eff}}} = \sqrt{2}\ \frac{V}{R}$$

这与实验测量的结果非常一致。

如果在系统的变形过程中，粒子失去了它们的运动积分，而重新分布到每个形变条件下的最低能态，则系统的刚度则比上述抛物曲线软得多，其刚度相应于那些相应守恒量取不同数值的一系列抛物线底部的包络线。则可立即证明，对一个存在表面的系统，如在一个空腔里的经典的或量子的气体，这个包络线的刚度正比于 $A^{2/3}$(或者说，对固定的粒子数A，正比于系统的表面积)，因此我们处理的是具有一定表面张力的流体的刚度。为什么粒子可以改变它们的运动常数，而分布到包络线所确定的能态呢？显然，我们必须足够强烈地扰动系统的可积性，以使运动积分，即相空间的旋转曲面，也即量子化问题中的量子数，也即上述能谱中的抛物曲面不再存在了，这时处于一种混沌机制，表现为前述的粘滞流体行为。这些粘滞流体的动力学行为如何呢？在原子核的情况下已经进行了大量的研究[4]、[5]，一般把原子核看成具有特

殊类型粘滞性的流体。一体耗散情况下，从形变自由度到气体的粒子能量的耗散，其能量流的速率由下面的"墙公式"给出[4]:

$$\frac{dE}{dt}=\rho\bar{V}\oint\bar{\dot{n}}^2 d\sigma$$

ρ 是气体的质量密度，$\bar{V}$ 是平均粒子速度，$\dot{n}$ 是表面元 $d\sigma$ 的法向速度，积分在表面进行，假定此时无漂移及转动的变形。

一般，一个系统既不是完全可积的，也不是完全混沌的。系统的动力学行为与形变的速度有关。对于慢变形系统遵循似流体行为而沿上述包络线的最低能量曲线进行。对于较快变形，那些抛物线曲线则倾向于变形并避免相互交叉，系统倾向于越过这些避免交叉的能隙，变形速度越高，跳能隙的效率越高。因此在给定的瞬间，某些能量将被当作弹性能贮存，某些能量被以耗散的形式排出，使粒子重新分布到更适合给定形变的能谱，特别是Nörenberg[5]等发展了这种弹性可塑行为的理论，这种耗散以力的形式给出，此力大小不仅正比于坐标q的瞬时速度 $\dot{q}$，而且须对此速度的时间历史的指数式权重积分为

$$F=-c\int_{t_v}^{t}dt'e^{-(t-t')/\tau}g(t')$$

这个力，对慢变形有耗散作用的性质，对快变形以弹性方式作用。

上述理论只是两个核动力学的例子。还有Weidenmüller 等的输运理论，Hoffman 和 Siemens 等人的线性响应理论，Gross 等的带摩擦的核碰撞理论，Nix、Sierk 等的裂变和核碰撞的流体动力学理论，Moretto 等人的主方程处理，Randrup、Feldmeier、Døssing 等人的核碰撞的粒子交换理论。当然，最杰出的是基于与时间有关的HF 方法的模拟，这工作在核的领域由 Bonche、Kerman、Koonin 和Negele 开创，并由其它研究小组进一步发展。但是，在上述理论发展的年代里，核子运动中从规则到混沌的跃迁与原子核动力学问题的相关性还没有被充分地认识到。为了合理地估计核系统对形状改变的响应，无论是弹性的、弹性可塑的或是耗散的，我们必须特别注意对称性的破缺及剩余相互作用的加入。

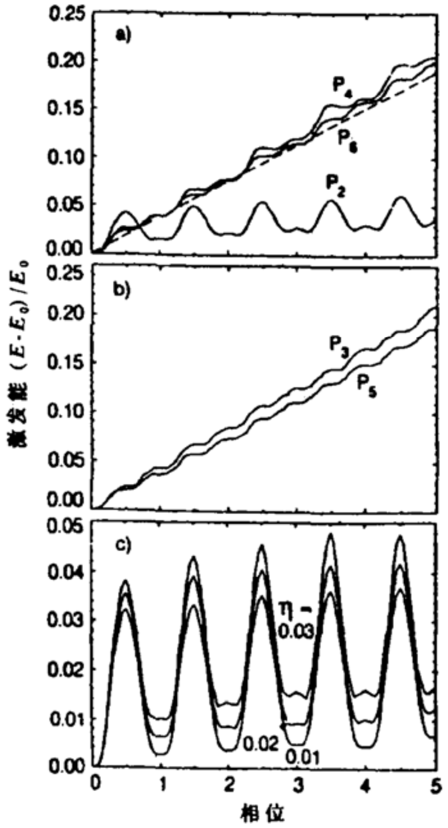

图2 在容器中粒子的能量在经过五个相对球形的振荡后，相对能量的变化。底图中是椭球形振荡，不同频率由 η 表征，响应趋于弹性可逆，η 是最大速度峰值与费米速度V之比。上、中图中标有 P_n 的曲线指相对于不同阶的勒让特函数的振动，除了对 P_2 其余都有能量的单调耗散增加，与"墙公式"的预言一致（虚线表示）

图2中给出一个理想系统对动力学响应时其中单个核子的运动从规则到混沌的跃迁关系。当一个容器周期性地相对于球形振动时，容器中的非相互作用的粒子的能区发生什么变化。在a)、b)图容器表面对球形的偏离正比于2、3、4、5、6级勒让特函数。在c)图中振动相对于椭球形，因此不随时间变化时椭球中的粒子运动是精确可积的。当随时间变化时，能量对形变的响应是弹性的，振荡速度

η 表征绝热指标。当 $\eta \to 0$ 时，能量随形变完全可逆（形变时能量减小，变化为球形时，能量又回到原处）。a)、b)图中不同的曲线都表示了对振动的五个周期（运动从变形的最大幅度开始），气体能区的相对增加，在畸变为 P_3、P_4、P_5、P_6 时能量的增加是单调的，相应于纯的系统的耗散响应。事实上，这种响应与上述墙公式的结果是完全一致的。P_2 的情况描述了近可积性，系统的响应是部分弹性的，在耗散的背景上再加上能量的弹性振荡。图 2 中给出的从弹性到耗散的不同响应，可与图 3 中的规则到混沌的跃迁相对应。

图 3 中给出了在各种变形的静态容器中粒子在相空间轨道的 Poincare 截面。变形的程度由参数 α 给出，对椭球 α 表示主轴的伸长程度，负值表明扁椭球。对多项式型的形变幅度选择：对给定的 α 选其均方根变形与椭球变形一致。在椭球的情况下，对所有的形变其 Poincare 截面都表明了相空间旋转曲面的存在。在 P_4 和 P_6 除了小形变都有较大程度的混沌。对 P_2 情况小变形规则与椭球情况相同，但形变大时，混沌开始侵入相空间，因此图 3 对图 2 中的动力学行为提供了定性解释。

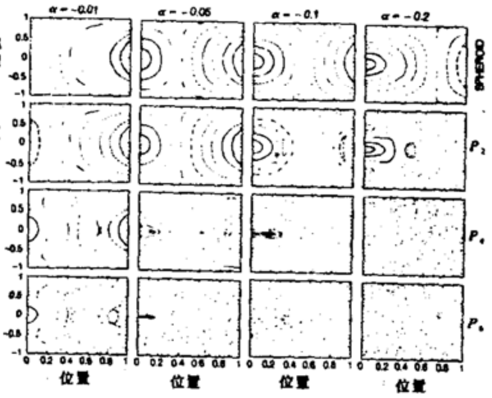

图 3 柱极坐标 ρ 及速度 $\dot{\rho}$ 平面的 Poincare 截面。相对于图 2 中所研究气体的 10 个粒子。当不可积形变 α 的幅度增加时，出现混沌

总之，核物理领域最近由于两个主要的发展而振兴。一是建立了与量子色动力学的亚重子世界的联系。二是与量子混沌运动世界的联系。前者建立了一个通向基本粒子物理领域的桥梁，后者则建立了通向非线性动力学这个普遍领域的桥梁。核物理工作者去接触这两方面的研究工作绝不会劳而无功的。

本文作者感谢与顾金南同志有意义的讨论。

参考文献

1. W. J. Swiatecki, Nucl. Phys. A488 (1988) 375c－394c
2. 李君清，核物理动态；第七卷第三期 1990
3. 卓益忠，核物理动态，第六卷第一期 1989. P27
4. C. Yannouleas, Nucl. Phys., A439 (1985) 336
   C. Yannouleas, Nucl. Phys., A339 (1980) 219
5. W. Nörenberg, in "New Vistas in Nuclear Dynamics". by P J. Brussard J. H. Koch, Plenum Press, New York, (1986)