

原子核的新型集体态——混杂对称态

顾金南

(中国科学院近代物理研究所)

摘要:本文介绍和评述一种新的集体态,这种态具有质子中子自由度混杂对称特征。一九八四年,D.Bohle等用电子非弹性散射(e, e')实验发现了 ^{156}Gd 核的混杂对称态($I^\pi = 1^+$),也叫剪刀型态,后来,发现从轻核(^{46}Ti)到重核(^{238}U)都存在这种态。理论上,在中子质子相互作用玻色子模型的框架内,对这种混杂对称态作了较详细的讨论。最后,对几种模型理论,例如IBM2和双转子模型等理论处理作了简单的比较。

—

自从1984年Darmstadt电子散射组⁽¹⁾在电子非弹性散射实验中发现 ^{156}Gd 约3MeV处的 1^+ 态以来,至今已知从轻核(^{46}Ti)到重核(^{238}U)都存在这种新型的、轨道的磁偶极激发态 -1^+ 态。不仅在电子非弹性散射(e, e')实验⁽²⁾,而且在其它实验,如(γ, γ')⁽³⁾、(p, p')⁽⁴⁾中,已发现、验证并研究了这些态。

表1收集了变形核的这些最强的 1^+ 态的信息⁽²⁾,包括 E_{1^+} 和 $B(M1)$ 值,以及计算所用的IBM2的参数值和质量形变参数 δ 值。从表中可见,稀土核的 E_{1^+} 值大致相同,但是 ^{46}Ti 的 E_{1^+} 约为 ^{232}Th 和 ^{238}U 的 E_{1^+} 值的两倍。差不多所有模型都预期 $E_{1^+} = 66\delta A^{-1/3}$ (比例常数被固定在 ^{156}Gd 上)。除 ^{46}Ti 外,实验 $E_{1^+}^{\text{ex}}$ 值都与预期 $E_{1^+}^{\text{th}}$ 值符合较好。最强的 1^+ 态的M1跃迁强度大约为 $1\mu_N^2$ 左右,但 ^{164}Dy 的特大。从M1跃迁强度看来与 E_{1^+} 无关。实验表明,除了最强的 1^+ 态的

表1 1^+ 态的 E_{1^+} 和 $B(M1)\uparrow$,质量形变

参数 δ 和IBM2所用的参数值

核	E_{1^+} (MeV)	$B(M1)\uparrow$ (μ_N^2)	ε_d (MeV)	K (keV)	χ	λ (MeV)	δ
^{46}Ti	4.3	1.0 ± 0.2	1.16	-43	-0.63	0.64	0.16
^{110}Pd	(3.9)	≤ 0.5	0.68	-26	-0.26	0.28	0.22
^{154}Sm	3.2	0.8 ± 0.2	0.41	-20	-1.36	0.21	0.26
^{154}Gd	2.9	0.9 ± 0.2	0.46	-17	-0.88	0.19	0.24
^{156}Gd	3.1	1.3 ± 0.2	0.40	-20	-0.92	0.18	0.25
^{158}Gd	3.2	1.4 ± 0.3	0.38	-20	-0.88	0.18	0.26
^{164}Dy	3.1	1.3 ± 0.2	0.24	-22	-0.29	0.13	0.26
	3.2	2.3 ± 0.4					
^{168}Er	3.4	0.9 ± 0.2	0.34	-24	-0.32	0.15	0.27
^{232}Th	2.0	1.3 ± 0.2	0.22	-14	-0.91	0.12	0.20
^{238}U	2.2	2.7 ± 0.6	0.26	-12	-1.18	0.11	0.24

表2 核(γ, γ')实验结果^(3b)

核	E_x	$B(M1)\uparrow$
^{156}Gd	2.974	0.35 ± 0.07
	3.050	0.11 ± 0.03
	3.070	1.21 ± 0.23
	3.158	0.34 ± 0.07
	3.218	0.31 ± 0.06
	2.986	0.16 ± 0.03
	3.039	0.14 ± 0.02
	3.108	0.47 ± 0.06
^{158}Gd	3.192	0.66 ± 0.08
	3.201	0.77 ± 0.09
	3.299	0.34 ± 0.05
	3.165	0.71 ± 0.10
	3.277	0.55 ± 0.08
	3.307	0.43 ± 0.07
	3.328	0.22 ± 0.04
	3.459	0.30 ± 0.06
^{160}Gd		

强 M1 跃迁之外, 还有一些弱的 M1 跃迁贡献于总强度, 例如 ^{156}Gd 的 5 个跃迁的强度和为 $2.3 \mu_N^2$, 见表 2。

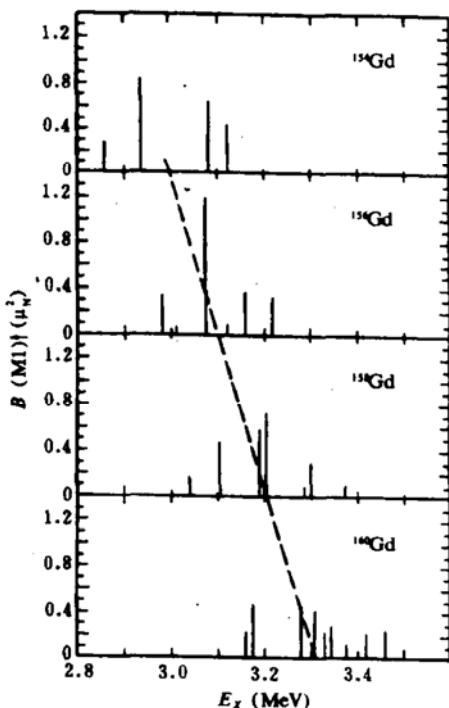


图 1 (e, e') 和 (γ, γ') 实验的 M1 跃迁强度分布⁽⁵⁾

表 2 和图 1 是这些核的 M1 强度分布实验值。可见, 对 Gd 同位素核, M1 跃迁强度大致相同 ($\simeq 2.5 \mu_N^2$), 只是从轻到重 (从 ^{154}Gd 到 ^{160}Gd) 可能略有增加。另一点是, 这些核的 1^+ 态的伸展宽度也大致相同 ($\simeq 50\text{keV}$)。理论上, IBM2 的计算结果只给出最低的 1^+ 态的 $B(M1 0_g^+ \rightarrow 1_M^+)$, 不能给出 M1 跃迁强度分布。最近的一些 RPA (Random Phase Approximation) 计算可给出大致符合实验的 M1 跃迁强度分布 (参看文献 5 图 12)。

M1 跃迁强度的同位矢 (Isoscalar) 部分又可分为轨道和自旋部分。实验已表明, 对 ^{156}Gd 核的 M1 跃迁强度的贡献几乎是纯轨道的。 (e, e') 和 (p, p') 实验的综合分析可以大致区分和判别自旋部分和轨道部分对 M1 跃迁强度各自贡献多少⁽⁵⁾, 可以说, 表 1 所列的核态基本上都是轨道方式, 即贡献于 M1 跃迁 $B(M1)$ 的基本上都是轨道部分。亦许

^{164}Dy 是一个例外^(5,6), 它的自旋部分对 M1 跃迁可能有一定贡献。

显然, 这是一个重要问题, 在剪刀型态中究竟是纯轨道的, 还是自旋也起着一定的作用? 这需要对 (e, e') 和 (p, p') 实验结果进行综合的仔细的分析才能确定。

在变形核中, 除了上述的 1^+ 态的激发能、M1 跃迁强度分布以及轨道对自旋的 M1 跃迁强度比以外, 1^+ 态的磁偶极跃迁形式因子 (form factor) 的研究也是很有意义的。不幸的是, 对不同的核的低动量转移时的形式因子的第一个极大处的实验数据大致相同, 而各种模型所预期的形式因子的形状也非常相似, 因而无从区别。现在, 已扩充到较高动量转移。图 2⁽⁵⁾ 给出了剪刀方式特强的核 ^{164}Dy 的 1^+ 态的形式因子。从图中可见, IBA (即 IBM 2) 理论预期的符合最好。

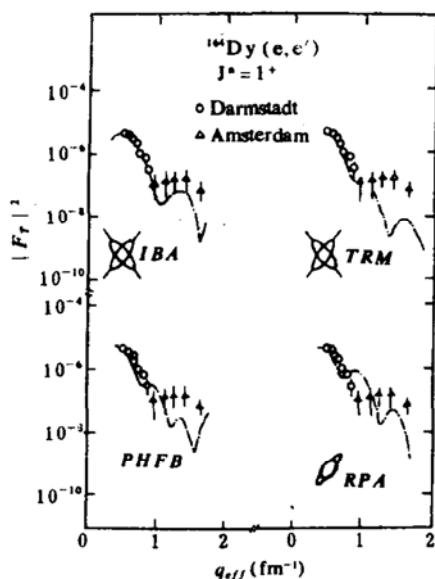


图 2 ^{164}Dy M1 剪刀方式的横向形式因子。所有的形式因子都是用扭曲波玻恩近似 (DWBA) 计算的, 并在第一个极大处归一到实验数值

二

对于大变形核, 最低的混杂对称态是 1^+ 态。从基态 (偶偶核) 到 1^+ 态的跃迁是磁偶极跃迁, 反之, 从 1^+ 态到基态是磁偶极 γ

衰变。其跃迁算子为

$$T(M1) = \sum_i (g_i^{(l)} \vec{l}_i + g_i^{(s)} \vec{s}_i) \quad (1)$$

g 因子数值:

$$g^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{质子} \\ 0 & \text{中子} \end{cases} \quad g^{(s)} = \begin{cases} 5.586 & \text{质子} \\ -3.826 & \text{中子} \end{cases} \quad (2)$$

引进同位旋 τ_{i_3} 。核的总角动量为 I 时,

$$\begin{aligned} T(M1) &= \frac{1}{2} \sum_i (\vec{l}_i + \vec{s}_i) + \frac{1}{2} (g_p^{(s)} + g_n^{(s)} - 1) \sum_i \vec{s}_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i \tau_{i_3} (\vec{l}_i + (g_p^{(s)} - g_n^{(s)}) \vec{s}_i) \\ &= \left(\frac{1}{2} I + 0.38 \sum_{i=1}^A \vec{s}_i \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \tau_{i_3} (\vec{l}_i + 9.41 \vec{s}_i) \right) \\ &= T_s(M1) + T_v(M1) \end{aligned} \quad (3)$$

$T_s(M1)$ 是 $T(M1)$ 的同位旋标量部分, $T_v(M1)$ 是同位旋矢量(以后简称同位矢)部分。可见, $T_s(M1)$ 与同位旋算子无关。

从 $T(M1)$ 表示式可以看到两点:一是 $T_s(M1)$ 跃迁可能很小⁽⁷⁾,而 $T_v(M1)$ 部分的跃迁较强;二是在同位矢 $M1$ 跃迁 $T_v(M1)$ 中,包括了轨道和自旋两部分。

如果内部运动和集体运动可以分离,则磁偶极矩

$$\begin{aligned} \mu(M1) &= g_R \vec{R} + g_K \vec{J} \\ &= g_R \vec{I} + (g_K - g_R) \vec{J} \end{aligned} \quad (4)$$

在 $K=0$ 的转动带内, \vec{J} 部分不给出贡献

$$\text{故 } \mu(M1)_{K=0} = g_R \vec{I} \quad (5)$$

$$\text{这里 } g_R \simeq \frac{Z}{A} \quad (6)$$

I 、 R 和 J 分别是原子核的总角动量、转动和内部角动量。磁偶极跃迁几率不仅决定于跃迁算子,还依赖于初末态波函数,即 $\langle f | T(M1) | i \rangle$ 跃迁矩阵元。我们可以在壳模型的框架内讨论幻数附近核的 $M1$ 跃迁,也可以在集体模型(不区分中子质子)的框架中来讨论奇 A 核或奇奇核等的 $M1$ 跃迁。而

我们感兴趣的是新型的集体态,剪刀方式的 $M1$ 跃迁。所以让我们来讨论 IBM2 中的混杂对称态⁽⁸⁾。

在 IBM2 中,可以按照群 $U_x(6) \otimes U_y(6)$ 或者按 $U(6) \otimes SU(F)(2)$ 分类态,这两者是等价的。这里 $SU(F)(2)$ 群就是所谓的 F 旋群。对于交换中子质子变量不变的 Hamiltonian

$$H = \sum_{\alpha\beta\rho} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\rho)} G_{\alpha\beta}^{(\rho)} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\rho,\rho')} G_{\alpha\beta}^{(\rho)} G_{\gamma\delta}^{(\rho')} \quad (7)$$

如具有约束

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(\pi)} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(v)}$$

$$U_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\pi\pi)} = U_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\rho,\rho')}$$

$$(\rho, \rho') = (v, v); (\pi, v); (v, \pi)$$

而生成元

$$G_{\alpha\beta}^{(\rho)} \equiv b_{\alpha\rho}^+ b_{\beta\rho} \quad b_{\alpha\rho} \equiv S_\rho \text{ 或 } d_{\alpha\rho} \text{ (玻色子)}$$

则对这样的 Hamiltonian, F 旋是一个好量子数,相应乘积群 $U_\pi(6) \otimes U_v(6)$ 的子群链为:

$$\left[\begin{array}{c} U_\pi(6) \otimes U_v(6) \supset U_{\pi v}(6) \supset \dots \\ [N_\pi] \quad [N_v] \quad [N_1, N_2] \quad \dots \end{array} \right] \quad (8)$$

显然,属于 $U_{\pi v}(6)$ 对称不可约表示 $[N, 0]$ 的态对应于 IBM1 空间中的态,而不可约表示 $[N_1, N_2] = [N-f, f]$ ($f \neq 0$) 的态,就是所谓的混杂对称态。这里 $N = N_\pi + N_v$, N_π (N_v) 是质子 (中子) 玻色子数。

如果子群链是 $SU_{\pi v}(3)$ 的,即是 $SU_{\pi v}(3)$ 极限,最低的混杂对称态就是 1^+ 态,这就是 1984 年以来所发现的变形核中的剪刀型态,或同位旋矢量磁偶极激发态……。如果是 $U_{\pi v}(5)$ 极限和 $O_{\pi v}(6)$ 极限,则最低的混杂对称态就不是 1^+ 态,而可能是 2_M^+ 态(下标 M 表示混杂对称,以示区别于全对称态中的 2^+ 态)。最近的实验已发现这种 2_M^+ 态。

对于交换中子质子不变的 Hamiltonian (7) 中可以考虑引进 Majorana 算子,这算子在(8)式各种子群链中是对角化的,其本征值依赖于态的 F 旋。通常, Majorana 算子写为:

$$M = \xi_2 (d_\pi^+ s_\nu^+ - s_\pi^+ d_\nu^+)^{(2)} \cdot (\tilde{d}_\pi s_\nu - s_\pi \tilde{d}_\nu)^{(2)} - 2 \sum_{l=1,3} \xi_l (d_\pi^+ d_\nu^+)^{(l)} (\tilde{d}_\pi \tilde{d}_\nu)^{(l)} \quad (9)$$

ξ_i 是 Majorana 参数, 可以取 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \lambda$, 其系统值如图 3⁽⁵⁾ 所示。可见 λ/δ vs. $N_\nu N_\pi$ (δ 为质量形变参数) 与基态带 2^+ 态的激发能 $E_x(2^+)$ vs. $N_\nu \cdot N_\pi$ 图相似。

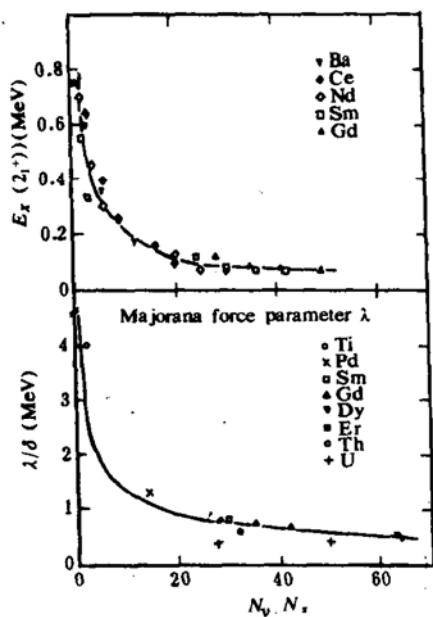


图3 上图为 $E_x(2^+)$ vs. $N_\nu N_\pi$, 下图为 λ/δ vs. $N_\nu \cdot N_\pi$, δ 为质量形变参数(表1)

我们知道 Majorana 相互作用强度参数 ξ_i 如取正值, 则将混杂对称态向高能拉; 相反, 如取负值, 则混杂对称态降低。可以定义

$$\begin{cases} \xi_1 = \langle d_\pi d_\nu; l | V | d_\pi d_\nu; l \rangle & l=1,3 \\ \xi_2 = \langle (d_\pi s_\nu - s_\pi d_\nu) / \sqrt{2} | V | (d_\pi s_\nu - s_\pi d_\nu) / \sqrt{2} \rangle \end{cases} \quad (10)$$

这样, ξ_i 就对应于双玻色子矩阵元。V 是玻色子两体相互作用。

至今, 我们对 Majorana 参数了解甚少, 包括 ξ_i 应该取相同值 λ , 还是取不同值, 都不太清楚。但是, 它在讨论混杂对称态的过程中, 无疑是十分重要的。所以, 这有待于对 Majorana 相互作用的进一步研究。

在 IBM2 框架中, 可同时讨论全对称态 (IBM1 态) 和混杂对称态, 以及它们的能谱

和电磁性质。

用简化的 Hamiltonian

$$H = \varepsilon_d + K (Q_\pi + Q_\nu) (Q_\pi + Q_\nu) + M \quad (11)$$

$$Q_\rho = (d_\rho^+ s_\rho + s_\rho^+ d_\rho)^{(2)} + \chi_\rho (d_\rho^+ \tilde{d}_\rho)^{(2)} \quad (\rho \equiv \pi, \nu)$$

立刻可以得到

$$E_x(1_M^+, U_{\pi\nu}(5)) = 2\varepsilon_d + \lambda N$$

$$E_x(1_M^+, SU_{\pi\nu}(3))$$

$$= (-3K + \lambda)N - \frac{3}{8} K L(L+1)$$

$$E_x(1_M^+, O_{\pi\nu}(6)) = (-2K + \lambda)N - 6K \quad (12)$$

其能谱, 最简单的两个玻色子情况的能谱如图 3 所示。如玻色子数增加, 能谱也就变复杂。

M1 跃迁算子为

$$T(M1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (g_\nu \vec{L}_\nu + g_\pi \vec{L}_\pi) \quad (13)$$

$$L_\rho = \sqrt{10} (d_\rho^+ \tilde{d}_\rho)^{(1)} \quad \rho = \pi, \nu$$

1^+ 态的磁偶极矩为

$$\mu(1_M^+) = \frac{1}{2} (g_\pi + g_\nu) \quad (14)$$

这对所有极限都适用。

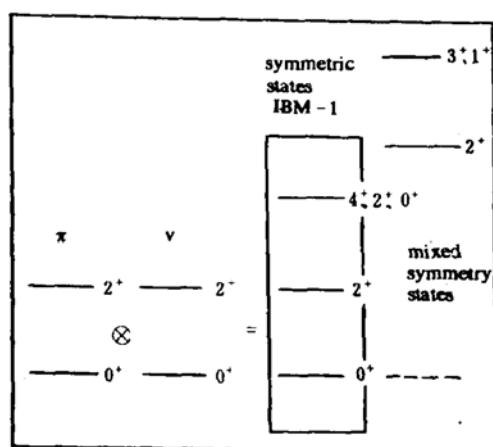


图4 中子质子玻色子 ($N_\pi = N_\nu = 1$) 耦合系统的对称态 ($F=1$) 和混杂对称态 ($F=0$) (左边)

人们已算出各种极限情况下的约化跃迁几率, 这里只列出 $SU_{\pi\nu}(3)$ 极限情况下的 1^+ 态

表 3 $SU_{\pi\nu}(3)$ 极限时 1^+ 态的电磁跃迁

J_f^π	$T\lambda$	$B(T\lambda; 1_M^+ \rightarrow J_f^\pi)$
0_1^+	M1	$\frac{3}{4\pi} (8_v - 8_\pi)^2 \frac{8}{3(2N-1)} N_v N_\pi$
2_1^+	M1	$\frac{3}{4\pi} (8_v - 8_\pi)^2 \frac{2(2N+3)}{3N(2N-1)} N_v N_\pi$
0_β^+	M1	$\frac{3}{4\pi} (8_v - 8_\pi)^2 \frac{4(2N+1)}{3N(2N-3)(2N-1)} N_v N_\pi$
2_β^+	M1	$\frac{3}{4\pi} (8_v - 8_\pi)^2 \frac{(4N^2-8N+7)^2}{3(N-1)N(2N-3)(2N-1)(4N^2-8N+1)} N_v N_\pi$
2_γ^+	M1	$\frac{3}{4\pi} (8_v - 8_\pi)^2 \frac{8(N-2)(2N+1)}{N(2N-3)(4N^2-8N+1)} N_v N_\pi$
2_1^+	E2	$(e_v - e_\pi)^2 \frac{3(2N+3)}{4N(2N-1)} N_v N_\pi$
2_β^+	E2	$(e_v - e_\pi)^2 \frac{3(4N^2-8N-1)^2}{8(N-1)N(2N-3)(2N-1)(4N^2-8N+1)} N_v N_\pi$
2_γ^+	E2	$(e_v - e_\pi)^2 \frac{(N-2)(2N+1)}{N(2N-3)(4N^2-8N+1)} N_v N_\pi$
3_γ^+	E2	$(e_v - e_\pi)^2 \frac{N-2}{(N-1)N(2N-3)} N_v N_\pi$

的约化跃迁几率。表 3 中取了经典极限 ($N \rightarrow \infty$)，下面再列出在三种极限情况下的 $B(M1)$ 的解析表达式：

$$B(M1 \quad 0_1^+ \rightarrow 1_M^+) = \begin{cases} 0 & U_{\pi\nu}(5) \text{ 极限} \\ \frac{3}{4\pi} \frac{8N N_v}{2N-1} (g_v - g_\pi)^2 & SU_{\pi\nu}(3) \text{ 极限} \\ \frac{3}{4\pi} \frac{3N N_v}{N+1} (g_v - g_\pi)^2 & O_{\pi\nu}(6) \text{ 极限} \end{cases} \quad (14)$$

显然，在电磁跃迁中，有两个待定参数，即 g_v 和 g_π (M1 跃迁) 或 e_v 和 e_π (E2 跃迁)。这可以微观推导出来，或从和实验符合来定出 g_v 和 g_π 。

三

在双流体模型 (Two-Fluid Model)^[9, 10] 的框架内，曾预期这种混杂对称态，也称剪刀态的存在。例如双转子模型 (TRM) 中^[10] 就将核内中子体和质子体看作为两个形变转子，各自围绕它们的公共对称轴转动和振动，

而中子体轴和质子体轴夹角不变，正象剪刀一样，所以形象地称为剪刀型 (Scissor Mode) 态 (图 5a); Faessler 和 Greiner 在 1966 年^[9] 就考虑了核内质子体和中子体的反相振动问题。后来，不管是在双转子模型，还是在振动势模型 (VPM) 中的转动振荡，都导致至形变核中 $I^\pi = 1^+$ 态 (混杂对称态) 的激发。Faessler 早期 (1966 年) 估计的 1^+ 态能量 E_{1^+} 偏高 ($E_{1^+} > 10$ MeV)，而今，通过改进， E_{1^+} 已大致与实验相

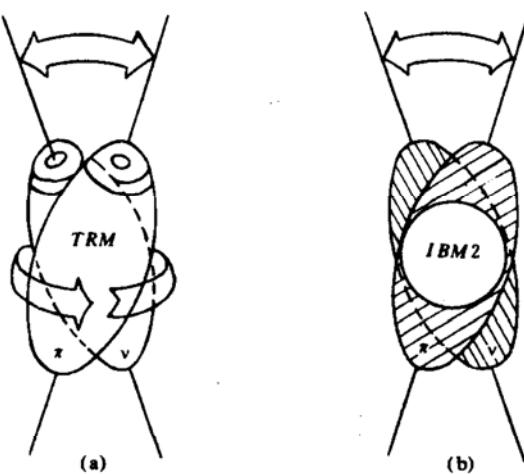


图 5 中子质子体剪刀型态

符,但 $B(M1)^\uparrow$ 强度仍然比实验值大得多。

无规位相近似(RPA)^(13,15,16)也用来描述这种混杂对称态。从形变单粒子基和残余的中子质子相互作用出发,用 RPA 方法,人们作了很多计算,其结果是 $B(M1)^\uparrow$ 强度的过大的碎裂(Fragmentation)和自旋部分对 M1 跃迁有一定的贡献⁽¹¹⁾。

IBM2 区分中子和质子玻色子,可以在一个框架下描述全对称的低自旋态(又叫 IBM1 态)和混杂对称态。从图 5b 可见,它与剪刀型态的差别在于:在 IBM2 中只有价质子和价中子(玻色子)参与这种集体运动,即磁偶极激发。

由于剪刀方式和 IBM2 可以较好地解释 1^+ 态,因而认为大变形核的 1^+ 态是集体的、轨道的同位旋矢量态。

比较起来,IBM2 对 M1 跃迁强度有明显不同的结果(表 4)。

(1)对于 M1 轨道总强度,IBM2 估计值与实验值相近,但远小于 Nilsson 模型值或 TRM 值。

(2)在 IBM2 框架内,强度基本上集中于一个态,最低的 IBM2 1^+ 态;而在 RPA 的粒子孔穴描述中,有相当的 M1 跃迁强度的碎裂;实验上观测到的是这两者的中间情况。

(3)因为 IBM2 中 s, d 玻色子代表粒子粒子对,所以只有轨道部分贡献于 M1 跃迁,而在 RPA 等框架中,强调了粒子孔穴(ph)相互作用。如果残余的 ph 相互作用限于同

位矢四极四极力,就发现有相当的轨道强度和自旋强度的混杂。这与 (e, e') , (p, p') 等实验数据的综合分析结果不一致。

参考文献

- (1) D.Bohle et al., Phys. Lett. B137 (1984) 27
- (2) U.Hartmann, D.Bohle et al., Nucl. Phys. A 465 (1987) 25
- (3) U.E.P.Berg and U.Kneissl Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 37 (1987) 33
- (4) H.H.Pitz et al., Nucl. Phys. A 492 (1989) 411–425
- (5) C.Djalali et al., Phys. Lett. 164 B (1985) 269
- (6) A.Richter Inter. Conf. on Contemporary Topics in Nucl. Structure Phys: edited by R.Casten et. al., (1988 world Scientific) 127–164
- (7) P.O.Lipas et al., Phys. Lett. 230 (1989) 1
- (8) I.Talmi, I.Unna, Ann. Rev. Nucl. Sci. 10 (1960) 353
- (9) K.Heyde Nucl. Structure, Reactions and Symmetries VI editors Richard (5–14 June 1986) 288
- (10) W.Greiner Nucl. Phys. 80 (1966) 417
- (11) A.Faessler Nucl. Phys. 85 (1966) 653
- (12) N.Loiudice, F.Palumbo, Phys. Rev. Lett. 41 (1987) 1532
- (13) I.Hamamoto, C.Ronstrom, Phys. Lett. 194B (1987) 1
- (14) P.Vanisacker et al., Ann. of Phys. (N.Y.)
- (15) E.Lipparini, S.Stringari, Phys. Lett. 130 B (1983) 139
- (16) A.Faessler et al., J. Phys. G12 (1986) L47.
- (17) D.Bes, R.A.Brogia, Phys. Lett. 137 B (1984) 141
- (18) I.Hamamoto, S.Åberg, Phys. Lett. 145B (1984) 163

表 4 稀土核的 M1 跃迁强度,各种模型理论值的比较

Nuclei	E_x (MeV)	$E_{xp.}$	$B(M1)^\uparrow$ ($\mu^2 N$)				RPA			
			IBM-2 ⁽¹²⁾		TRM		(I) ⁽¹³⁾	(II) ⁽¹⁴⁾	(I) ⁽¹⁵⁾	(II) ⁽¹⁶⁾
^{154}Sm	3.200	0.8 ± 0.2	2.7	1.2	17.52	7.66	5.84	9.52		
^{156}Gd	3.075	1.3 ± 0.2	2.9	1.2	17.12	7.07	5.69	9.27		
^{158}Gd	3.200	1.4 ± 0.3	3.2	1.4	17.93	7.58	5.95	9.70		
^{164}Dy	3.110	1.5 ± 0.3	3.9	1.6	18.97	8.05	6.25	10.19		
^{168}Er	3.390	0.9 ± 0.2	3.9	1.6	20.50	8.24	6.73	10.97		
^{174}Yb	3.555	0.8 ± 0.2	3.8	1.6	20.73	8.17	6.77	11.03		