对量子混沌系统的一般认识

(李君清)　　　　(朱介鼎)

(中国科学院近代物理研究所)，(兰州大学现代物理系)

1. 混沌运动

对于一个经典的可积系统，存在着与系统自由数相等数目的运动积分。这样的系统在给定初始条件后，随时间的演变运动状态仅占据相空间的一部分，且通常具有周期性的特点，轨道分布在n维环面上，不同的初始条件定义不同的环面，这样的运动是规则运动。另一方面，对规则运动，可以通过解运动方程给出运动的全部规律。但如果系统受到某种作用或扰动，使它丧失部分或全部运动积分，成为不可积系统，这时系统的运动即使开始于一个单一的初始状态，其轨道也会布满整个空间，而不会被什么守恒定律所隔断。对于这种情况，如果解运动方程，其运动永不重复，即永远不能预言下一时刻的运动状态。这种运动称之为混沌运动。

类比于经典的混沌运动，量子系统也有混沌运动：如在初始时刻相空间中相邻的两个相点，它们的位相差随时间的演化是指数增加的，则该系统为混沌系统[1]。但这个定义在实用上是很不方便的；因为据此定义是无法判断量子系统是否混沌的。实际上对于量子系统至今还没有一个人所公认的完善而可行的定义。下面介绍的是对量子系统混沌运动的一种较为流行的观点[2]。

2. 量子系统的涨落

对一个处于高激发态的复合核，在中子阈附近，核密度是非常高的，以致人们不得不放弃对其某一具体态及所有微观细节的详尽而具体的描述，而只能研究它的一些平均性质，如能级密度、共振态、相似态的分布等，这必须用统计理论。因此不去着眼于每个核的能级的具体序列，而是去研究能级序列分布的不规则程度，即能级的涨落性质。由Wigner新开创的无规矩阵理论就用来研究这种性质。例如一个哈密顿量H可被看成是一个N×N的随机矩阵(即矩阵元是随机变量)，这个无规矩阵系综可由几率密度P(H)dH来描述，并给出当N趋于一个很大的极限值时，本征值的涨落性质。系统所必须遵循的时空对称性将给所允许的矩阵系综一些限制：若哈密顿量是时间反演不变的，并具有整数角动量(或者对1/2奇整数角动量不变)则矩阵是实对称的，且除了普通的时间－空间对称性之外不再有别的限制，那末，这个矩阵是实的，对称矩阵元构成了“高斯正交系综”，简记为GOE。

为了对涨落进行度量，引进如下变量和函数：

(1)相邻能级的能级间隔x的分布函数P(x)。

(2)与统计量n(L)相关的量。

给定一个长度为L的间隔，n(L)为包含在这个长度间隔内的能级数。若我们度量能谱时选取的单位使得平均间隔为1，则n(L)的平均值为L。还有n(L)的高次矩：偏差$\sum^2(L)$、歪斜度$\gamma_1(L)$及过剩量$\gamma_2(L)$。

(3)Dyson和Mehta的$\triangle_3$统计。

令N(E)为能量直到E所包含的能级数目的阶梯函数。给定一长度L，$\triangle_3$度量阶梯函数与它的最相应的最好直线的最小平均偏差。它的平均值$\overline{\triangle}_3$与n(L)的偏差与$\sum^2(L)$相关。

一般地$\sum^2(L)$和$\triangle_3(L)$可用二能级关联函数来表示，而$\gamma_1(L)$、$\gamma_2(L)$与三能级(三和四能级)的关联函数有关。

为了便于比较，考虑以下三种极限情形。

(1)取无规变量s，它的几率密度P(x)是$\exp(-x)$，构成如下的系列$\{x_i\}$: $x=1/2$; $x_{i+1}=x_i+s_i(i=1,2,\cdots)$; s_i是变量s的独立试验的结果，所产生的谱是泊松谱(最大无规性情况)。它有$P(x)=e^{-x}$,

$\sum^2(L)=L$, $\overline{\triangle}_3=L/15$

(2)栅栏谱或一维谱振子谱。$x_{i+1}=x_i+1$。这是最规则的谱，完全没有无规性，具有：

$P(x)=\delta_{(x-1)}$; $\sum^2(L)=0$; $\overline{\triangle}_3(L)=1/12$。

(3)GOE的间隔分布可表为：

$P(x)=(\pi/2)x\exp(-\pi x^2/4)$

这种分布显示了能级的排斥性，即避免了能级密集结团，或者说小间隔的几率很小(在零点时P(x)为零)，对于$L\geqslant 1$时偏差为

$\sum^2(L)=(2/\pi^2)\ln L+0.44$

随L的对数增大可与泊松分布的线性增大相比，对较大的L，$\triangle_3(L)$的平均值为：

$\overline{\triangle}_3(L)\cong(1/\pi^2)\ln L-0.007$ 它度量谱的刚度。

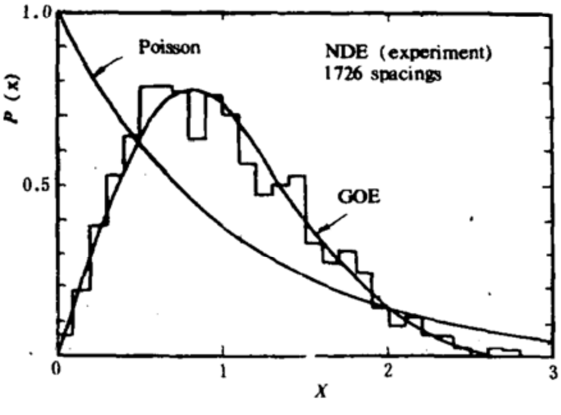

图1 核共振涨落测量的结果。泊松分布和GOE分布的预言都标在图上以便比较，数据取自文[3]、[4]、[5]

图1给出了复合核中对共振能级的涨落的结果。测量共取了1726个间隔，所有的统计性质都符合GOE的统计结果，这里限于篇幅只给出能级间隔分布。

值得注意的问题是：上述GOE涨落只是高斯正交系综才具有的呢还是其它模型亦具有的呢？从实验的角度说，核共振能级的涨落性质是核所特有的呢还是在其它非核系统中也能观测到呢？我们已经知道，现在已有的各种无规矩阵系综模型，它们给出GOE涨落(可以是解析结果，有些也可从蒙特卡罗法计算结果)。但也从分析一些原子能谱，它们的哈密顿量矩阵元虽然并非高斯正交系综，然而能级涨落性质却似乎与GOE一致的，虽然这些系统的统计性比原子核的情形低得多。因此，我们看到：一方面，一些非常不同的系统(例如原子系统与原子核系统)的谱，当被适当刻度后，似乎具有相同的涨落特征，即使它们受不同的力的定律所支配(短程强相互作用、库仑长程作用)。另一方面，这些涨落特征都与GOE的结果很好地符合，为无参数理论。因此，可以看到一个简单的图像：无论从实验观点还是从理论观点来说，能级涨落定律似乎是普遍的。

3. 量子系统谱的涨落性质

研究一个量子系统若把它作为经典系统处理时该系统的运动是混沌时，对应的量子系统的谱的涨落性质。例如研究一个二维弹子球的运动，其质量为m，在任意形状的平面Γ区域内运动，作为自由的质点，当它与Γ边界碰撞时被弹性反射(按照镜面反射定律)，这样的运动至少有一个运动积分，即能量$E=\frac{1}{2}mv^2$。对于Γ边界形状不同时该弹子球的运动有不同的特征，如图2的(a)，Γ边界是圆形时，除运动积分$E=\frac{1}{2}mv^2$外，还有一个运动积分——角动量，具有确定能量E及初始条件的弹子的运动是规则的。图2的b)和c)则找不到第二个运动积分，可积性被破坏，弹子球的运动轨道将布满整个Γ区

域，运动是混沌的。

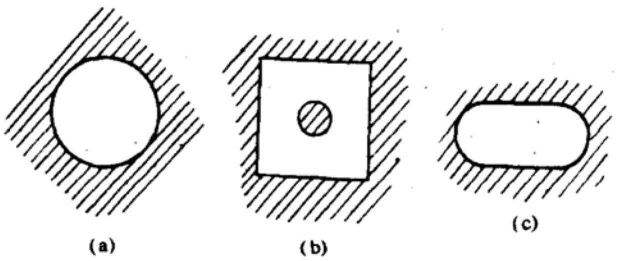

图 2 自由质点(弹子球)在不同形状的平面区域 Γ 内的运动。a)在圆形 Γ 边界内的运动; b)在 Sinai 形的 Γ 边界内的运动; c)在运动场形 Γ 边界内的运动

以上作为经典系统的弹子球，作为量子系统处理时，谱的涨落怎样呢？解下列弹子球的薛定谔方程:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_n(\vec{r})=E_n\psi_n(\vec{r})$$

边界条件为: $\psi_n(\vec{r})$ 在Γ 边界处为零。谱涨落的特性经计算其结果在图3 中给出。结果非常清楚，当对应的经典运动可积时，给出系统的谱是泊松涨落。而当对应的经典运动完全是混沌时，量子弹子球则给出GOE 涨落的特征。其它更为复杂的系统的许多计算结果支持这个结论。这似乎使我们可以把这一个结果认为是普遍的，即谱涨落定律具有普遍意义的。对于混沌运动的量子系统，它的能谱呈现GOE 的Wigner 分布。因此，哈密顿量矩阵元可用GOE 描述复合核，被看成是一个混沌的量子系统。

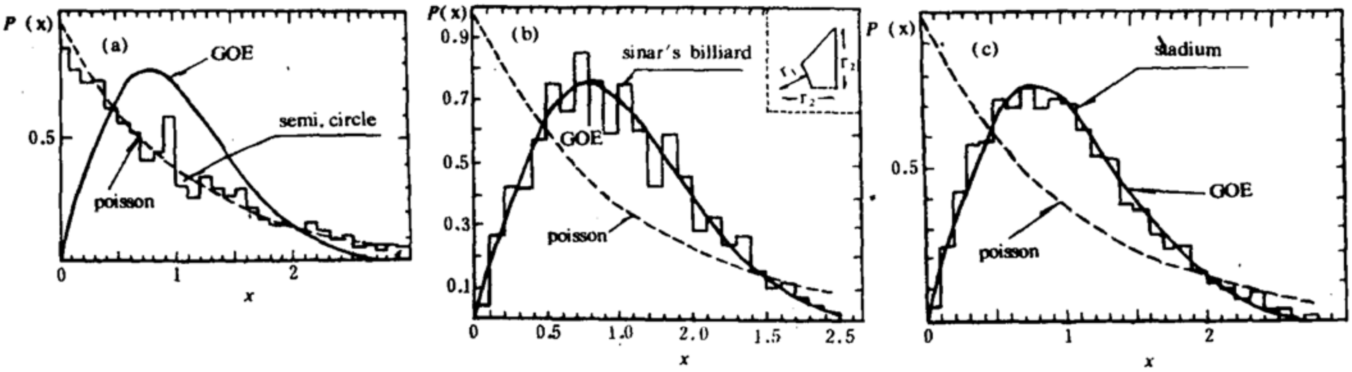

图 3 给出图 2 中所示各形状情况下量子谱涨落的间隔分布 P(x). a)圆形, b)Sinai 形, c)运动场形。谱的其他统计性质如$\overline{\triangle_3}$(L)、Σ^2(L)、γ_1(L)、γ_2(L)参阅文献 2 图 3

最近 Berry[6] 用半经典方法从谱的刚度出发进一步证明了一个普遍的规律，经典可积系统与Poisson 分布相对应，混沌系统则与GOE 的Wigner 分布相对应，具有GOE 的涨落特征。这一规律的得出没有用无规矩阵理论和任何统计假定。

至此，可以有理由的把系统的量子混沌与系统的谱涨落特征相联系，而作为量子混沌的判据。这一认识虽然还没有成为量子混沌的定义，但似乎已被相当多的人所认识。

4. 跃迁体制，在磁场中的氢原子

对于一个这样的经典系统，它的相空间表现为由混沌区域环绕的一些规则岛，整个相空间既不是规则的也不是完全混沌的。那末相应于量子系统，其谱涨落是否也能反映出来呢? Berry 和 Robink 在 1986 年提出可用一种权重为 μ 的 Poisson 谱和权重为 $\bar{\mu}$ 的GOE 谱的重叠谱来描述这种情形的谱涨落特征，μ 由经典规则运动的相空间部分给出，$\bar{\mu}$ 则由经典混沌相空间部分给出:

$$P(x)=\mu^2e^{-\mu x}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\bar{\mu}x\right)+\left(2\mu\bar{\mu}+\frac{\pi}{2}\bar{\mu}^3x\right)\exp\left(-\mu x-\frac{\pi}{4}\bar{\mu}^2x^2\right)$$

它在Poisson结果($\bar{\mu}=0$)与GOE 结果($\bar{\mu}=1$)之间。

在磁场中的氢原子问题。在磁场为零或极端强的情况下具有十分不同的对称性。而且这是一个无论从经典情况或量子理论都可精确求解的唯一的三维问题。一个电子在库仑力和劳伦茨力的作用下的运动,哈密顿量(磁场在 z 方向)为:

$$H=\frac{p^2}{2}-\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{2}L_z+\frac{\gamma^2}{8}(x^2+y^2)$$

γ 为约化磁场强度 B/B_C,$B_C=2.35\times10^5T$,矢势$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{r}\wedge\vec{B}$,这里 L_z(及字称)是除能量以外唯一的运动常数。反磁效应的重要性由反磁场能与库仑能的比率来表征。它正比于 $\gamma n^3\propto\gamma|E|^{-3/2}$,这里 n 是主量子数,E 是能量。为了增大反磁场,可采用两种方法:(1)增大磁场强度(在目前的实验条件下,可使 γ 达到 10^{-4}。(2)使用 Rydberg 原子(即激发原子,目前可使原子激发到 $n\cong50$)

Delande 和 Gay[7](1986 年)最近详细地计算了这个反磁开普勒系统的相空间结构。当逐渐增加 $\gamma|E|^{-3/2}$ 值时,系统从完全规则运动,到渐渐地出现一些混沌的区域,当 $\gamma|E|^{-3/2}$ 达到某个临界值时,出现完全的混沌运动。相对应的量子系统的谱涨落的计算显示了,当反磁场逐渐增强时,能谱涨落性质出现了从Poisson 到GOE 的跃迁,计算结果由图4示出,这里取$L_z=0$,偶字称。

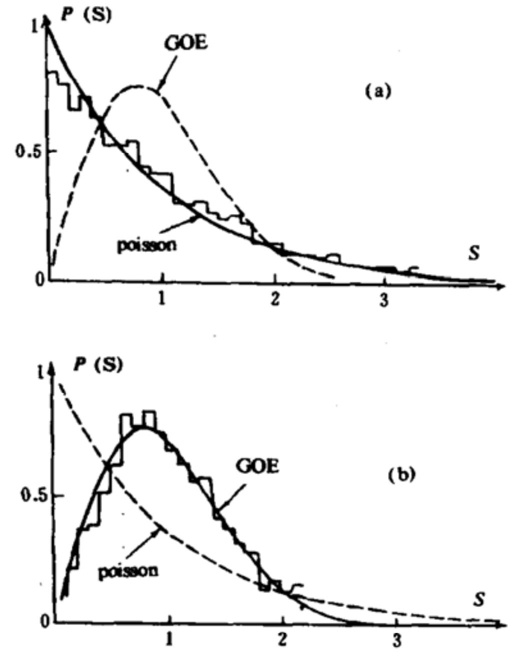

图4 在磁场中的氢原子。a)在规则区域的间隔分布。b)在完全混沌区域的间隔分布

总之,开普勒反磁场问题在以下意义上给出了研究混沌运动的唯一机会:1)它的对称性特别清楚。2)经典及量子的性质都可以精确地计算。3)当场强增加时,有从规则到混沌的跃迁。4)可以在实验上进行研究。

5.一个有意义的问题

在过去相当长的时间里,无规矩阵理论和混沌运动的研究这两个领域是没有联系的,而在最近几年里,正在互相渗透。现在我们知道复合核所呈现的涨落,其实并不是多自由度的有无限复杂状态的高激发态复合核所特有的,而是混沌系统所共有的性质,即使是低维度的系统也呈现相同的涨落。原来认为"无规"是个宏观的概念,是由很多粒子组成的系统的性质相关联的,因而可以用统计方法处理。现在看来无论是在经典上或量子理论上都非如此,少数粒子系统也呈现了统计的结果。这可能给统计物理提供新的理论基础。这对于由有限个粒子组成的原子核系统可应用统计理论处理的理论研究具有特别重要的意义。

参考文献

[1] H.A.Weidenüller, 1988 年 5 月在北京原子能科学研究院访问学术报告

[2] O.Bohigas, Int. nucl. Phys. Conf, Harrogate, UK, 1986.P511- 520

[3] R.U.Hag et. al., Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1086

[4] O.Bohigas. et. al., 1983 in Nuclear Data for Science and Technology

[5] O.Bohigas et. al., Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 1645

[6] M.V.Berry. proc. Roy. Soc. Lond A400 (1985) 229

[7] D. Delande, J. C. Gay Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 2006