

文章编号: 1007-4627(2012)01-0057-05

拓展的 Skyrme 模型中的 Skyrmion 与其量子化

张金虎^{1,2}, 贾多杰^{1,2}, 王晓维^{1,2}, 卢一平^{1,2}

(1. 西北师范大学物理与电子工程学院, 甘肃 兰州 730070;

2. 甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 考察了包含手征流非对易项的拓展 Skyrme 模型。在推导出相应 Skyrme 模型运动方程的基础上对模型中的球对称 Skyrmion 孤子进行了数值模拟。对模型进行零模 (Zero-mode) 量子化之后, 计算核子的若干静态性质, 并讨论了拓展 Skyrme 模型中手征流非对易项与 QCD 之间的联系。

关键词: 改进 Skyrme 模型; Zero-mode 量子化; 核子; 静态性质

中图分类号: O572.34; O413.3

文献标志码: A

1 引言

20 世纪 60 年代初, Skyrme 提出非线性介子场论模型^[1], 即以 Skyrme 模型描述 πN 强相互作用。他做出的一个大胆尝试是把包含核子的重子作为该介子场理论的拓扑孤立子来处理, 类似于非线性 σ 模型中的拓扑孤立子, 而重子数则相应于孤立子的绕数。按照大 N_c 量子色动力学 (QCD), 强相互作用在低能区可近似为一个介子的非线性场理论。Skyrme 模型可视为 σ 模型的一种非线性实现, 其中的拓扑孤立子解则恰好给出了 QCD 中重子的各种低能激发态的量子数。今天, Skyrme 模型已被认为是描述 QCD 低能行为的一种有效理论^[2-3], 并发现容许稳定的扭结拓扑孤立子存在, 而后者对理解量子场论的非微扰性质是十分重要的。此模型已广泛应用于核物理、粒子物理、凝聚态物理 (如超导^[4-5]等)、天体物理等许多物理领域^[6-11]。然而, Skyrme 相互作用还不是真正的核子相互作用, 而是一种参数化的唯象相互作用, 有其局限性。由于对两核子系统孤子场的描述简单地采用了乘积假设, Skyrme 模型没有给出核子之间的中程吸引, 而该中程吸引是两核子系统形成束缚态的关键。所以人们不断尝试通过拓展拉氏量对 Skyrme 模型进行改进^[12-16]。本文讨论在经典的 Skyrme 拉氏量中引进流反对易项的拓展 Skyrme 模型, 推导出拓展

的 Skyrme 模型的运动方程并用数值方法进行了模拟; 采用 Zero-mode 量子化方法^[17-18] 进行分析推导, 并通过计算核子的一些静态性质^[19] 考察了流反对易项对经典 Skyrme 模型的修正。在论文最后, 也讨论了此模型中流反对易项的 QCD 起源以及该项的正负号与 Skyrmion 孤子的稳定性之间的联系^[20-21]。

2 拓展 Skyrme 模型中的 Skyrmion

从拓展的二味 Skyrme 模型的拉格朗日密度出发:

$$L = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} [L_\mu^2] + \frac{\epsilon^2}{4} \text{Tr} [L_\mu, L_\nu]^2 - \frac{\kappa^2}{4} \text{Tr} [L_\mu, L_\nu]_+^2, \quad (1)$$

这里 $L_\mu = U \partial_\mu U^\dagger$ 是手征流, 其中 U 是 $SU(2)$ 手征场, 满足么正条件。 $[A, B]_\pm = AB \pm BA$ 代表矩阵 A 和 B 的对易子及反对易子。 f_π 为 π 介子衰变常数, ϵ 和 κ 为无量纲耦合参数。按照对对称 Skyrmion 的标准处理, 采用标量 F 和三维单位矢量 $\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1)$ 将 Skyrme 场函数 U 参数化:

$$U = \exp \left(-\frac{iF}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \right) = \cos \frac{F}{2} - i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \sin \frac{F}{2}, \quad (2)$$

收稿日期: 2011-06-01; 修改日期: 2011-06-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10965005); 教育部留学回国人员科研启动基金; 甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室项目

作者简介: 张金虎 (1986—), 男, 甘肃永靖人, 硕士研究生, 从事粒子物理与核物理研究; E-mail: bury72@163.com

通讯联系人: 贾多杰, E-mail: jiadj@nwnu.edu.cn

这里 σ 是泡利矩阵, $F(x, t)$ 和 \mathbf{n} 分别代表标量手征角和手征角的定向场。做如下球对称假设: $\mathbf{n} = \pm \mathbf{r}/r$, $F = F(r)$ 。为使 $U(r)$ 的绕数为 1 (即重子数 = 1), $F(r)$ 必须满足如下边界条件:

$$F(0) = \pi, F(\infty) = 0. \quad (3)$$

现在考察 Skyrme 模型的静态解。将式(2)代入式(1)得到:

$$L = \frac{f_\pi^2}{4} \left(2F_r^2 + 4 \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) - \frac{\epsilon^2}{4} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left(16 \frac{\sin^2 F}{r^2} + 32F_r^2 \right) - \frac{\kappa^2}{4} \left(8F_r^4 + 16 \frac{\sin^4 F}{r^4} \right), \quad (4)$$

其哈密顿量是

$$H = \frac{f_\pi^2}{4} \left(2F_r^2 + 4 \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) + \frac{\epsilon^2}{4} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left(16 \frac{\sin^2 F}{r^2} + 32F_r^2 \right) + \frac{\kappa^2}{4} \left(8F_r^4 + 16 \frac{\sin^4 F}{r^4} \right), \quad (5)$$

其中 F_r 为 F 的一阶导数。做变换 $r = \sqrt{8} \epsilon x / f_\pi$, 得到无量纲化后的哈密顿量:

$$h = \left(F_x^2 + 2 \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) + \frac{\sin^2 F}{x^2} \left(\frac{\sin^2 F}{x^2} + 2F_x^2 \right) - K \left(\frac{1}{2} F_x^4 + \frac{\sin^4 F}{x^4} \right), \quad (6)$$

其中 $K = -\kappa^2 / \epsilon^2$, 而且上式中统一提出了系数 $f_\pi^4 / 16 \epsilon^2$ 。变分式(6)得到运动微分方程如下:

$$\left(1 + 2 \frac{\sin^2 F}{x^2} - 3KF_x^2 \right) F_{xx} + \frac{2}{x} F_x - \frac{\sin(2F)}{x^2} \left[1 - F_x^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} (1 - K) \right] - K \frac{2F_x^3}{x} = 0. \quad (7)$$

同时, 具体写出能量表达式, 结果为

$$E = 2\pi(\sqrt{8}\epsilon f_\pi) \int dx \left[x^2 F_x^2 + 2\sin^2 F + 2\sin^2 F F_x^2 + \frac{\sin^4 F}{x^2} - K \left(\frac{1}{2} x^2 F_x^4 + \frac{\sin^4 F}{x^2} \right) \right]. \quad (8)$$

运动方程式(7)为高度非线性的微分方程, 只在特殊情况才能求出其解析解或近似解析解^[12-14]。这里, 利用数值松弛方法求其满足边界条件的解 $F(x)$ 。数值模拟发现, 与反对易项相关的参数 K 影响方程的稳定性, 在 $K \leq 0$ 时方程稳定, 即拉格朗日量中的手征流反对易项要求为负值, 这与文献[15]的结果一致。不同的 K 值所对应的手征角函数 $F(x)$ 的图像如图 1 所示, 能量密度图像见图 2。

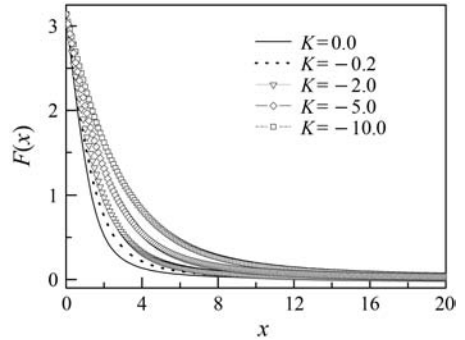


图 1 手征角函数 $F(x)$ 与 x 的关系

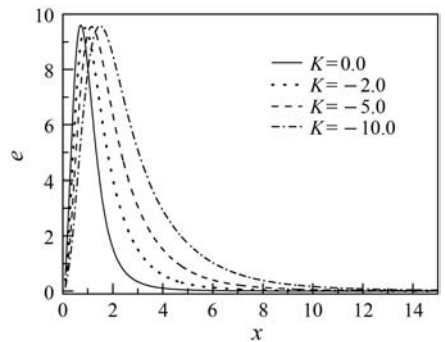


图 2 能量密度 e 与 x 的关系

$x = f_\pi r / (\sqrt{8}\epsilon)$, 能量密度 e 单位为 $E / (2\pi\sqrt{8}\epsilon f_\pi)$ 。

3 零模量子化

为讨论运动孤立子的量子态, 我们考虑静态孤立子式(2)的整体转动模(即 Zero-mode)的量子化, 就要求考虑 $U(r)$ 在同位旋空间的 $SU(2)$ 转动。首先, 无量纲化后的拉格朗日量为

$$L = -\frac{1}{2} \text{Tr} [L_i^2] - \frac{1}{16} \text{Tr} [L_i, L_j]^2 - \frac{K}{16} \text{Tr} [L_i, L_j]^2, \quad (9)$$

令 $U(\mathbf{r}, t) = A(t) U_0 A^\dagger(t)$, 其中, $A(t)$ 为任一 $SU(2)$ 矩阵。参考文献[17], 将有:

$$L = -M + \frac{1}{2} a_i U_{ij} a_j, \quad (10)$$

其中: $a_k = -i \text{Tr}(\sigma_k A^\dagger \dot{A})$, R 代表式(10)中的 i 或 j ;

$$U_{ij} = - \int d^3 x \text{Tr} \left(T_i T_j + \frac{1}{4} [R_k, T_i] [R_k, T_j] + \frac{K}{4} [R_k, T_i]_+ [R_k, T_j]_+ \right), \quad (11)$$

其中 $T_i = i \left[\frac{\sigma_i}{2}, U_R \right] U_0^\dagger$ (T_j 表达式同 T_i , 而 i 和 j 互换), $R_\mu = \partial_R U U^\dagger$ 。据文献[18], 在球坐标系中积分, 得到:

$$I_0 \Lambda = I_0 U_{11} = \frac{64\sqrt{8}}{3f_\pi} \epsilon^3 \pi \int r^2 dr \sin^2 F \times \left[1 + F_r^2 + (1-K) \frac{\sin^2 F}{r^2} \right], \quad (12)$$

记 $I_0 = 8\sqrt{8}\epsilon^3\pi/(3f_\pi)$, 则:

$$\Lambda = 8 \int r^2 dr \sin^2 F \left[1 + F_r^2 + (1-K) \frac{\sin^2 F}{r^2} \right]. \quad (13)$$

将式(10)的哈密顿量用 a_k 和它的广义正则动量的不对易式量子化^[12], 并将 $I=J=1/2$ 和 $3/2$ 对应于核子态 N 和 Δ 共振态, 则相应能量分别为

$$M_N = M + \frac{3}{8I_0\Lambda}, \quad M_\Delta = M + \frac{15}{8I_0\Lambda}. \quad (14)$$

其中, M 即式(8)中的能量 E 。给定 K , 式(14)容许用 M_N 和 M_Δ 的实验值确定 f_π 和 ϵ 。同位旋的电半径平方的平均值和磁半径平方的平均值^[19]定义为

$$\frac{f_\pi \langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2}}{\sqrt{8}\epsilon} = \left\{ -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty x^2 \sin^2 FF_x dx \right\}^{1/2},$$

$$\frac{f_\pi \langle r^2 \rangle_{M, I=0}^{1/2}}{\sqrt{8}\epsilon} = \left\{ \frac{\int_0^\infty x^4 \sin^2 FF_x dx}{\int_0^\infty x^2 \sin^2 FF_x dx} \right\}^{1/2}, \quad (15)$$

质子和中子的磁矩由下式给出:

$$\mu_{p, n} = \mu_{p, n}^{I=0} + \mu_{p, n}^{I=1} = \frac{\langle r^2 \rangle_{I=0}}{9} \times M_N (M_\Delta - M_N) \pm \frac{M_N}{2(M_\Delta - M_N)}. \quad (16)$$

我们取不同 K 值对低能重子的一些其他内禀性质做了计算, 其中 $M_N = 938.9$ MeV, $M_\Delta = 1232$ MeV。从而得到数值结果如表 1 所列。

由图 1 可知, 当 K 的绝对值增大时, 手征角函数 $F(x)$ 降低更慢更平缓, 说明核子中心到核子外部手征对称性破缺更慢。结合图 2 和表 1 可看出, 当 K 的绝对值增大时, 核子的电荷分布半径减小而核子能量分布半径增大, 说明核子中的 3 个夸克趋向于聚集(按组分夸克模型观点来说), 而核子内的胶子分布略有膨胀。

表 1 参数 K 取不同值时核子静态性质的变化

K	$E/(2\sqrt{8}\epsilon f_\pi)$	$2f_\pi/\text{MeV}$	Λ	$\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2}/\text{fm}$	$\langle r^2 \rangle_{M, I=0}^{1/2}/\text{fm}$	μ_p	μ_n	$ \mu_p/\mu_n $
0.0	36.490 71	129.155 34	50.556 98	0.594 77	0.922 84	1.878 98	-1.324 36	1.418 77
-0.2	38.480 97	134.877 96	60.130 62	0.577 32	0.913 61	1.862 94	-1.340 39	1.389 84
-2.0	52.951 33	172.230 80	159.872 92	0.489 02	0.815 54	1.789 13	-1.414 20	1.265 11
-3.0	58.945 53	187.372 03	223.949 79	0.462 10	0.780 32	1.769 06	-1.434 28	1.233 41
实验值	—	186	—	0.72	0.81	2.79	-1.91	1.46

4 Skyrme 模型中流反对易项与 QCD 的联系

从无源情形下联系真空幅 QCD 生成泛函 Z_{QCD} 开始^[20]:

$$Z_{\text{QCD}} = \int [dA_\mu][dq d\bar{q}][dc d\bar{c}] \times \exp [S_{\text{QCD}} + S_{\text{FP}} + S_{\text{GF}}], \quad (17)$$

其中: S_{QCD} 是联系 QCD 拉氏量的作用量; S_{FP} 是涉及鬼场 c 和 \bar{c} 的 Faddeev-Popov 作用量; S_{GF} 是规范固定项。虽然式(17)包含了所有的真空性质, 但它是极复杂的。然而, 由格点 QCD 和 QCD 求和规则得知, QCD 的长波分支由标量夸克和胶子凝聚 $\langle \bar{q}q \rangle$, $\langle GG \rangle$ 等所描述。因此, 可以合理地将式(17)中要积分的场组态分为由低能真空结构刻画的某些

类。为了便于描述，这里只考虑集体的介子场，赋予胶子以被动的角色并忽略较重的胶球激发。人们清楚，此种近似将禁闭和渐进自由细节忽略而突出了 QCD 的手征对称性，而前两个也是 QCD 3 个最重要的特性之中的两个，因此这里的分析是 QCD 较粗糙的近似。但我们期望这将有助于理解 Skyrme 模型或手征微扰论的 QCD 起源。通过引进单位因子，可以把式(17)写为

$$Z_{\text{QCD}} = \int d[\text{QCD}] d_\mu U [\bar{d} \sigma d \sigma^\dagger] \delta(\sigma - \sigma^\dagger) \times \delta(\bar{q}_R q_L - U^\dagger \sigma) \delta(\bar{q}_L q_R - \sigma^\dagger U) \times \exp [S_{\text{QCD}} + S_{\text{FP}} + S_{\text{GF}}],$$

将附属场组态限制在经典的真空期望场，积分掉夸克和胶子场，并转到欧氏空间之后得到：

$$Z_{\text{QCD}} \sim \int d[U] d[U^\dagger] \exp \{N_c \text{Tr} \ln [\not{D}_E + (m + \bar{S}U_5^\dagger)]\} \exp \left\{ \int d^4 x [2\text{Tr}(S\bar{S}) - V_G(\bar{\sigma})] \right\}, \quad (18)$$

并考虑：

$$\exp (iS_1 + S_2) = \exp \{N_c \text{Tr} \ln [\not{D}_E + (m + \bar{S}U_5^\dagger)]\}, \quad (19)$$

该式实部相角部分 S_2 ，这里 $U_5^\dagger = \exp (i\phi^a \lambda^a \gamma_5)$ ，虚部相角部分 iS_1 恰好给出非定域的 Wess-Zumino 项^[21]。首先将式(19)中的 S_2 写为以下形式：

$$S_2 = \frac{1}{2} N_c \text{Tr} \ln \{[\not{D}_E + (m + \bar{S}U_5^\dagger)] \times [-\not{D}_E + (m + \bar{S}U_5^\dagger)]\} = \frac{1}{2} N_c \text{Tr} \ln (-\partial_E^2 + M^2) + \frac{1}{2} N_c \text{Tr} \ln \{1 + (-\partial_E^2 + M^2)^{-1} \times [m\bar{S}(U_5^\dagger + U_5) - \bar{S}\not{D}_E U_5^\dagger]\}, \quad (20)$$

其中：第一项代表对有效势的自由真空贡献；第二项中， $m\bar{S}(U_5 + U_5^\dagger)$ 对应的相展开给出 Skyrme 模型的质量项，这里都略去。利用 U 场的绝热梯度展开并忽略其中为零的奇数项，可以得到 S_2 的其余部分为

$$S_{2L} = \frac{1}{2} N_c \text{Tr} \ln [1 - (-\partial^2 + M^2)\bar{S}\not{D}U_5^\dagger] = \frac{1}{4} N_c \text{Tr} \{ [(-\partial^2 + M^2)^{-1} \not{D}S U_5^\dagger]^2 \} -$$

$$\frac{1}{8} N_c \text{Tr} \{ [(-\partial^2 + M^2)^{-1} \not{D}\bar{S}U_5^\dagger]^4 \} + \dots, \quad (21)$$

保留到梯度场展开的四阶项为止，热核展开计算可以得出：

式(21)右边第一项

$$\propto -N_c \int d^4 x \text{Tr} [\partial^\mu U^\dagger \partial_\mu U] + N_c \int d^4 x \text{Tr} [(\partial^2 U)(\partial^2 U^\dagger)], \quad (22)$$

式(21)右边第二项

$$\propto N_c \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} [L_\mu, L_\nu]^2 - \text{Tr} [L_\mu^2 L_\nu^2] \right\}. \quad (23)$$

从式(22)和(23)可以看到，保留到四阶梯度展开的 QCD 有效拉氏量包含了 Skyrme 模型(1)，其中式(23)右边最后一项与 Skyrme 模型(1)中的流反对易项相对应：

$$-\int d^4 x \text{Tr} [L_\mu^2 L_\nu^2] = -\frac{1}{4} \int d^4 x \text{Tr} [L_\mu, L_\nu]_+^2. \quad (24)$$

这也证实了我们关于 $K < 0$ 的模拟结果和文献[15]的分析，即要使该模型存在稳定 Skyrme 孤子，模型中流反对易项的系数必须为负。同时，式(22)和(23)中的颜色数依赖性表明，Skyrme 模型是大 N_c -QCD 领域内的领头阶近似。Skyrmion 孤子可以量子化为费米子或玻色子，本文用的就是费米子型的半经典集体量子化；量子化之后的孤子分别对应核子的基态和 Δ 共振态。

5 结论与展望

本文推导了重子荷=1 时的含手征流反对易项的拓展 Skyrme 模型的剖面函数方程，通过数值模拟剖面函数方程得到了手征流反对易项因子对 Skyrme 孤子的剖面函数及其稳定性的影响。对模型进行零模量子化之后计算了核子的若干静态性质，并讨论了拓展 Skyrme 模型中手征流非对易项与 QCD 之间的联系。由以上分析可以得出，在 Skyrme 模型中引进手征流反对易项后，对核子的静态性质产生一定的修正。这里只是考察了 $K = -\kappa^2/\epsilon^2$ 为自由的负数的情形，并没有考虑式(23)的推导对 K 的约束：即便计及一圈软 Pion 修正，该

约束不应有较大的改变。我们将另文讨论这种约束下的手征流非对易项对 Skyrmion 剖面函数和核子性质, 以及核子之间力的修正。期望这里的工作为重子结构的手征孤子模型描述的有效性和对拓展 Skyrme 模型的参数变异行为研究提供参考依据。

致谢 作者之一(贾多杰)感谢他访问清华大学高能物理研究中心时和王青教授的有益讨论。

参考文献 (References):

- [1] SKYRME T H R. Nucl Phys, 1962, **31**: 556.
 [2] WITTEN E. Nucl Phys, 1983, **223**: 422.
 [3] SUTCLIFFE P M. Proceedings of the Royal Society, 2007, **A463**: 3001.
 [4] NAMBU Y, JONA LASINIO G. Phys Rev, 1961, **122**: 345.
 [5] NAMBU Y, JONA LASINIO G. Phys Rev, 1961, **124**: 246.
 [6] DECKON R. Nucl Phys, 1986, **B277**: 661.
 [7] MANTON N S, SAMOLS T M. J Phys, 1990, **A23**: 3749.
 [8] HALE M, SCHWINDT O, WEIDIG T. Mod Phys, 2000, **E62**: 4333.
 [9] SUTCLIFFE P M. Phys Lett, 1992, **B209**: 104.
 [10] BATTYE R, SUTCLIFFE P M. Phys Rev Lett, 1997, **79**: 363.
 [11] FADDEEV L D. Lett Math Phys, 1976, **1**: 289.
 [12] ADKINS G S, NAPPI C R, WITTEN E. Nucl Phys, 1983, **B228**: 552.
 [13] YAMASHITA J, HIRAYAMA M. Phys Lett, 2006, **B642**: 160.
 [14] JIA Duo-jie, WANG Xiaowei, LIU Feng. Chin Phys Lett, 2010, **27**: 121201.
 [15] AN Yonghong, WANG Qing. The Lagrangian of Nucleon and Calculation of the Quark Propagator [D]. Beijing: Tsinghua University, 2005(5), 16–19(in Chinese).
 (安永红, 王青. 核子拉氏量与夸克传播子的计算 [D]. 北京: 清华大学, 2003, 16–19.)
 [16] WANG Xiaoping, TIAN Junlong, LI Xian, *et al.* Nuclear Physics Review, 2010, **27**(2): 130(in Chinese).
 (王小平, 田俊龙, 李贤, 等. 原子核物理评论, 2010, **27**(2): 130.)
 [17] ZAHED I, WIRZBA A. Phys Rev, 1986, **D33**: 3.
 [18] CONOR H, SHANE M. Physics Letters, 2006, **B632**: 593.
 [19] JACKSON G S, JACKSON A D, PASQUIER V. Nucl Phys, 1986, **A432**: 567.
 [20] ZAHED I, BROWN G E. Phys Rept, 1986, **142**: 1.
 [21] SIMIC P. Phys Rev Lett, 1985, **55**: 40.

Skyrmion in Extended Skyrme Model and Its Quantization

ZHANG Jin-hu^{1,2}, JIA Duo-jie^{1,2}, WANG Xiao-wei^{1,2}, LU Yi-ping^{1,2}

(1. College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;

2. Key Laboratory of Atomic Molecular Physics & Functional Materials of Gansu Province, Lanzhou 730070, China)

Abstract: This paper considers the extended Skyrme model with the anti-commutator of the chiral current. By deducing the equations of motion of extended Skyrme model, the spherically symmetric Skyrmion was numerically simulated. After the Zero-mode quantization of the model, the static properties of nucleons were calculated and the connection of the anti-commutator of the chiral current with QCD was discussed.

Key words: extended Skyrme model; Zero-mode quantization; nucleon; static property

Received date: 1 Jun. 2011; Revised date: 25 Jun. 2011

Foundation item: National Natural Science Foundation of China(10965005); SRF for ROCS, SEM; Project of Key Laboratory of Atomic and Molecular Physics and Functional Materials of Gansu Province

Corresponding author: JIA Duo-jie, E-mail: jiadj@nwnu.edu.cn